DOI:10.11721/cqnuj20170103

二维 Extended Fisher-Kolmogorov 方程的渐近吸引子及维数估计*

周　萍，邢　超，罗　宏
(四川师范大学 数学与软件科学学院，成都 610066)

摘要:【目的】研究二维周期边界条件下 Extended Fisher-Kolmogorov 方程的渐近吸引子，并给出它的维数估计。【方法】利用正交分解、能量估计等方法对此进行讨论。【结果】构造了一个有限维解序列，并证明该解序列不会远离方程的吸收集。【结论】最后通过证明解序列趋近于真实解，从而可以得出方程渐近吸引子的存在性。

关键词:二维 Extended Fisher-Kolmogorov 方程；渐近吸引子；维数估计

中图分类号:O175.26　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2017)01-0061-08

人们在研究无穷维动力系统的过程中，常常对吸引子结构进行探讨，因此相继出现了整体吸引子、近似惯性流形和指数吸引子等概念，2000 年，王冠香和刘曾荣也提出了渐近吸引子这一概念[1]。

定义　对一个发展系统

$$u_t+Au=f(u), \tag{1}$$

记其相空间为 H，解算子半群为 $\{s(t),t\geqslant 0\}$，吸收集为 ，假设对任意 $u_0\in$ ，存在 N 维子空间中的近似解序列 $\{u^k(t)\}_{k\geqslant 1}$ 及 $t^*(\ )$，满足 $\|u^k(t)-s(t)u_0\|_H\to 0,k\to\infty,t\geqslant t^*(\ )$，则定义 $^k=\bigcap\limits_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup\limits_{\substack{t\geqslant s\\ u_0\in}} u^k(t)}$ 为系统(1)的渐近吸引子。其中 $\|\cdot\|_H$ 为相空间 H 的范数，$u^k(t)$ 依赖于初值 u_0，而 $t^*(\ )$ 只依赖于吸收集半径，即 t^* 对 中的 u_0 是一致的。

自此概念被提出以后，有关渐近吸引子的结果陆续出现[2-4]，但是这些结果大多都是在一维形式下研究的，对二维形式下方程的渐近吸引子还少有研究[5]。

本研究考虑二维周期边界条件下 Extended Fisher-Kolmogorov 方程

$$u_t+\gamma\Delta^2u-\Delta u-u+u^3=0,\gamma>0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x_i^j}=\frac{\partial^j u(x+2\pi e_i,t)}{\partial x_i^j},j=0,1,2,3,i=1,2, \tag{3}$$

$$u(x,0)=u_0(x),u_0(x)=u_0(x+2\pi e_i), \tag{4}$$

$$\int_\Omega u\,\mathrm{d}x=0, \tag{5}$$

其中 $x=(x_1,x_2)\in\Omega,\Omega=[0,2\pi]\times[0,2\pi],e_1=(1,0),e_2=(0,1)$。EFK 方程一直备受关注[6-9]，马丽蓉等人讨论了它在 Direchlet 边界条件下解的存在唯一性和全局吸引子的存在性[10-11]。因此，在二维周期边界条件下，解的存在唯一性和全局吸引子的存在性可类似得到。

文中 $\dot{L}_p^2(\Omega)$ 表示在 Ω 上零均值的 L^2 可积函数空间，下标 p 表示这里所讨论的均是周期函数，范数为 $\|\cdot\|$，内积为 $(\cdot,\cdot)$，$H^k(\Omega)(k=1,2,\cdots)$ 表示 Ω 上的 Sobolev 空间。

---

*　**收稿日期:**2015-12-18　　**修回日期:**2016-12-13　　**网络出版时间:**2017-1-12　11:34
资助项目:四川省科技计划项目(No. 2015JY0125)
第一作者简介:周萍，女，研究方向为偏微分方程与动力系统，E-mail:869454654@qq.com；**通信作者:**罗宏，教授，E-mail:lhscnu@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20170112.1134.040.html

1 预备知识

首先引入关于吸收集的结果[11]。

引理 1　对任意 $u_0\in\dot{L}_p^2(\Omega)$，若满足 $\|u_0\|\leqslant R<\infty$，则存在时间 $t^*=t^*(R)>0$ 和 ρ_0,ρ_1，使得 $\|u(x,t)\|\leqslant\rho_0$，$\|u(x,t)\|_{H^2}\leqslant\rho_1$，即 　$=\{u\in\dot{H}_p^2(\Omega)\mid\|u(x,t)\|\leqslant\rho_0,\ \|u(x,t)\|_{H^2}\leqslant\rho_1\|\}$。

下面构造一个有限维解序列。

因为 $\dot{L}_p^2(\Omega)$ 具有完备的正交基[12] $\{\cos k_1x_1\cos k_2x_2,\cos k_1x_1\sin k_2x_2,\sin k_1x_1\cos k_2x_2,\sin k_1x_1\sin k_2x_2,\ k_1,k_2=1,2,\cdots\}$，所以对 $N\in\mathbf{N}$，记其子空间 $\mathrm{span}\{\cos k_1x_1\cos k_2x_2,\cos k_1x_1\sin k_2x_2,\sin k_1x_1\cos k_2x_2,\ \sin k_1x_1\sin k_2x_2,\ k_1,k_2=1,2,\cdots,N\}$ 为 H_N，记 $L^2(\Omega)$ 到 H_N 的正交投影为 P_N，而 $Q_N=I-P_N$，对任意 $u(x,t)\in\dot{L}_p^2(\Omega)$，记 $p=P_Nu$，$q=Q_Nu$，即 $u=p+q$。用正交投影 P_N 可将方程(2)分成两部分：

$$p_t+\gamma\Delta^2p-\Delta p-p+P_Nu^3=0,\tag{6}$$

$$q_t+\gamma\Delta^2q-\Delta q-q+Q_Nu^3=0,\tag{7}$$

对任意初值 $u_0(x)\in$ 　，按如下方式构造渐近解序列：

$$\begin{cases}q_t^0+\gamma\Delta^2q^0-\Delta q^0-q^0+Q_Np^3=0,\\ q^0(x,t)=q^0(x+2\pi e_i,t),i=1,2,\\ q^0(x,0)=Q_Nu_0;\end{cases}\tag{8}$$

$$\begin{cases}q_t^k+\gamma\Delta^2q^k-\Delta q^k-q^k+Q_N(u^{k-1})^3=0,\\ q^k(x,t)=q^k(x+2\pi e_i,t),i=1,2,\\ q^k(x,0)=Q_N^ku_0。\end{cases}\tag{9}$$

其中 $u^k=p+q^k$，$Q_N^k=Q_N-Q_{2^{k+1}N}$，系统(8)，(9)的解的存在唯一性问题类似于 EFK 方程。

进一步给出解序列的估计。

定理 1　对任意 $u\in\dot{L}_p^2(\Omega)$，若满足 $q=Q_Nu$，$N\in\mathbf{N}$，则有 $\|\nabla q\|^2\geqslant2(N+1)^2\|q\|^2$，$\|\Delta q\|^2\geqslant4(N+1)^4\|q\|^2$，$\|\nabla\Delta q\|^2\geqslant8(N+1)^6\|q\|^2$，$\|\Delta^2q\|^2\geqslant16(N+1)^8\|q\|^2$。

证明　对任意 $u\in\dot{L}_p^2(\Omega)$，有

$$u=\sum_{k,k_1,k_2=1}^{\infty}(u_k^1\cos k_1x_1\cos k_2x_2+u_k^2\cos k_1x_1\sin k_2x_2+u_k^3\sin k_1x_1\cos k_2x_2+u_k^4\sin k_1x_1\sin k_2x_2),$$

其中 u_k^1,u_k^2,u_k^3,u_k^4 为常系数。

因为 $q=Q_Nu$，$N\in\mathbf{N}$，所以有

$$q=\sum_{k,k_1,k_2=N+1}^{\infty}(u_k^1\cos k_1x_1\cos k_2x_2+u_k^2\cos k_1x_1\sin k_2x_2+u_k^3\sin k_1x_1\cos k_2x_2+u_k^4\sin k_1x_1\sin k_2x_2),$$

$$\|q\|^2=\sum_{k=N+1}^{\infty}(|u_k^1|^2+|u_k^2|^2+|u_k^3|^2+|u_k^4|^2),$$

因此有

$$\nabla q=\left(\frac{\partial q}{\partial x_1},\frac{\partial q}{\partial x_2}\right)=$$

$$\Big(\sum_{k,k_1,k_2=N+1}^{\infty}(-k_1u_k^1\sin k_1x_1\cos k_2x_2-k_1u_k^2\sin k_1x_1\sin k_2x_2+k_1u_k^3\cos k_1x_1\cos k_2x_2+k_1u_k^4\cos k_1x_1\sin k_2x_2),$$

$$\sum_{k,k_1,k_2=N+1}^{\infty}(-k_2u_k^1\cos k_1x_1\sin k_2x_2+k_2u_k^2\cos k_1x_1\cos k_2x_2-k_2u_k^3\sin k_1x_1\sin k_2x_2+k_2u_k^4\sin k_1x_1\cos k_2x_2)\Big),$$

$$\|\nabla q\|^2=\left\|\frac{\partial q}{\partial x_1}\right\|^2+\left\|\frac{\partial q}{\partial x_2}\right\|^2=\sum_{k,k_1,k_2=N+1}^{\infty}(k_1^2+k_2^2)(|u_k^1|^2+|u_k^2|^2+|u_k^3|^2+|u_k^4|^2)\geqslant$$

$$2(N+1)^2\sum_{k=N+1}^{\infty}(|u_k^1|^2+|u_k^2|^2+|u_k^3|^2+|u_k^4|^2)=2(N+1)^2\|q\|^2,$$

$$\Delta q=\frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2}=$$

$$\sum_{k,k_1,k_2=1}^{\infty}(-k_1^2-k_2^2)(u_k^1\cos k_1x_1\cos k_2x_2+u_k^2\cos k_1x_1\sin k_2x_2+u_k^3\sin k_1x_1\cos k_2x_2+u_k^4\sin k_1x_1\sin k_2x_2),$$

$$\|\Delta q\|^2=\sum_{k,k_1,k_2=N+1}^{\infty}(k_1^2+k_2^2)^2(|u_k^1|^2+|u_k^2|^2+|u_k^3|^2+|u_k^4|^2)\geqslant$$

$$(2(N+1)^2)^2\sum_{k=N+1}^{\infty}(|u_k^1|^2+|u_k^2|^2+|u_k^3|^2+|u_k^4|^2)=4(N+1)^4\|q\|^2,$$

$$\nabla\Delta q=\left(\frac{\partial^3 q}{\partial x_1^3}+\frac{\partial^3 q}{\partial x_1\partial x_2^2},\frac{\partial^3 q}{\partial x_1^2\partial x_2}+\frac{\partial^3 q}{\partial x_2^3}\right)=$$

$$\Bigg(\sum_{k,k_1,k_2=1}^{\infty}(k_1^3+k_1k_2^2)(u_k^1\sin k_1x_1\cos k_2x_2+u_k^2\sin k_1x_1\sin k_2x_2-u_k^3\cos k_1x_1\cos k_2x_2-u_k^4\cos k_1x_1\sin k_2x_2),$$

$$\sum_{k,k_1,k_2=1}^{\infty}(k_1^2k_2+k_2^3)(u_k^1\cos k_1x_1\sin k_2x_2-u_k^2\cos k_1x_1\cos k_2x_2+u_k^3\sin k_1x_1\sin k_2x_2-u_k^4\sin k_1x_1\cos k_2x_2)\Bigg),$$

$$\|\nabla\Delta q\|^2=\left\|\frac{\partial^3 q}{\partial x_1^3}+\frac{\partial^3 q}{\partial x_1\partial x_2^2}\right\|^2+\left\|\frac{\partial^3 q}{\partial x_1^2\partial x_2}+\frac{\partial^3 q}{\partial x_2^3}\right\|^2=\sum_{k,k_1,k_2=N+1}^{\infty}(k_1^3+k_1k_2^2)^2(|u_k^1|^2+|u_k^2|^2+|u_k^3|^2+$$

$$|u_k^4|^2)+\sum_{k,k_1,k_2=N+1}^{\infty}(k_1^2k_2+k_2^3)^2(|u_k^1|^2+|u_k^2|^2+|u_k^3|^2+|u_k^4|^2)\geqslant(2(N+1)^3)^2\sum_{k=N+1}^{\infty}(|u_k^1|^2+|u_k^2|^2+$$

$$|u_k^3|^2+|u_k^4|^2)+(2(N+1)^3)^2\sum_{k=N+1}^{\infty}(|u_k^1|^2+|u_k^2|^2+|u_k^3|^2+|u_k^4|^2)\geqslant 8(N+1)^6\|q\|^2,$$

$$\Delta^2 q=\frac{\partial^4 q}{\partial x_1^4}+\frac{\partial^4 q}{\partial x_2^2\partial x_1^2}+\frac{\partial^4 q}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4 q}{\partial x_2^4}=\sum_{k,k_1,k_2=1}^{\infty}(k_1^4+k_2^4+2k_1^2k_2^2)(u_k^1\cos k_1x_1\cos k_2x_2+$$

$$u_k^2\cos k_1x_1\sin k_2x_2+u_k^3\sin k_1x_1\cos k_2x_2+u_k^4\sin k_1x_1\sin k_2x_2),$$

$$\|\Delta^2 q\|^2=\sum_{k,k_1,k_2=N+1}^{\infty}(k_1^4+k_2^4+2k_1^2k_2^2)^2(|u_k^1|^2+|u_k^2|^2+|u_k^3|^2+|u_k^4|^2)\geqslant$$

$$16(N+1)^8\sum_{k=N+1}^{\infty}(|u_k^1|^2+|u_k^2|^2+|u_k^3|^2+|u_k^4|^2)=16(N+1)^8\|q\|^2。$$

证毕

2 二维 EFK 方程的渐近吸引子

下面将证明渐近解序列 $u^k(x,t)$ 对真解 $u(x,t)$ 的逼近性。首先证明，对 $u_0\in$ 　上述所得渐近解序列不会远离吸收集　。

定理 2　设 $u(x,t)$ 是对应于初值 $u_0\in$ 　的系统(2)～(5)式的解，$q^k(k=0,1,2,\cdots)$ 按(8)，(9)式给出，则存在 $N_0\in\mathbf{N}$ 和 t_1^*(　)，使得当 $N\geqslant N_0$ 时，

$$\|u^k\|\leqslant 2\rho_0,\ \|\Delta u^k\|\leqslant 2\rho_1,t\geqslant t_1^*,k=0,1,2,\cdots \tag{10}$$

成立。

证明　由吸收集的正不变性，$u_0\in$ 　，则 $u(t)\in$ 　，$t\geqslant 0$，从而有

$$\|p\|\leqslant\rho_0,\ \|\Delta p\|\leqslant\rho_1, \tag{11}$$

为了证明(10)式，现只需证明

$$\|q^k\|\leqslant\rho_0,\ \|\Delta q^k\|\leqslant\rho_1,k=0,1,2,\cdots。 \tag{12}$$

下面用数学归纳法证明(12)式成立，当 $k=0$ 时，用 q^0 与(8)式作内积，由 Argmon 不等式可知

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|q^0\|^2+\gamma\|\Delta q^0\|^2+\|\nabla q^0\|^2-\|q^0\|^2=-(Q_Np^3,q^0)\leqslant$$

$$|(Q_Np^3,q^0)|\leqslant|p|_{L^\infty}^3\|q^0\|_{L^1}\leqslant(C_1\|p\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|p\|_{H^2}^{\frac{1}{2}})^3\|q^0\|_{L^1}\leqslant C_1^3\|p\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|p\|_{H^2}^{\frac{3}{2}}\|q^0\|\leqslant C_1^3\rho_0^{\frac{3}{2}}\rho_1^{\frac{3}{2}}\|q^0\|,$$

从而有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\parallel q^0\parallel^2+(4\gamma(N+1)^4+2(N+1)^2-1)\parallel q^0\parallel^2\leqslant C_1^3\rho_0^{\frac{3}{2}}\rho_1^{\frac{3}{2}}\parallel q^0\parallel,$$

令 $E(N)=4\gamma N^4+2N^2-1$,有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\parallel q^0\parallel^2+E(N+1)\parallel q^0\parallel^2\leqslant\frac{E(N+1)}{2}\parallel q^0\parallel^2+\frac{C_1^6\rho_0^3\rho_1^3}{2E(N+1)},$$

即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\parallel q^0\parallel^2+E(N+1)\parallel q^0\parallel^2\leqslant\frac{C_1^6\rho_0^3\rho_1^3}{E(N+1)}$,根据Gronwall不等式可得

$$\parallel q^0\parallel^2\leqslant \mathrm{e}^{\int_0^t-E(N+1)\mathrm{d}s}\left[\parallel q^0(0)\parallel^2+\int_0^t\frac{C_1^6\rho_0^3\rho_1^3}{E(N+1)}\mathrm{e}^{-\int_0^s-E(N+1)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s\right]=$$

$$\frac{C_1^6\rho_0^3\rho_1^3}{E^2(N+1)}+\left(\parallel q^0(0)\parallel^2-\frac{C_1^6\rho_0^3\rho_1^3}{E^2(N+1)}\right)\mathrm{e}^{-E(N+1)t}\leqslant\frac{C_1^6\rho_0^3\rho_1^3}{E^2(N+1)}+\rho_0^2\mathrm{e}^{-E(N+1)t},$$

令$\frac{C_1^6\rho_0^3\rho_1^3}{E^2(N+1)}\geqslant\rho_0^2\mathrm{e}^{-E(N+1)t}$,则有 $t\geqslant-\frac{1}{E(N+1)}\ln\frac{C_1^6\rho_0\rho_1^3}{E^2(N+1)}$,所以存在 $t_{11}^*(\ \ )=\frac{1}{E(N+1)}\left|\ln\frac{E^2(N+1)}{C_1^6\rho_0\rho_1^3}\right|$,

使得$\parallel q^0\parallel^2\leqslant\frac{2C_1^6\rho_0^3\rho_1^3}{E^2(N+1)}$,$t\geqslant t_{11}^*(\ \ )$,即$\parallel q^0\parallel\leqslant\frac{\sqrt{2}C_1^3\rho_0^{\frac{3}{2}}\rho_1^{\frac{3}{2}}}{E(N+1)}$,$t\geqslant t_{11}^*(\ \ )$。

记 $N_1=\min\left\{N>0:\frac{\sqrt{2}C_1^3\rho_0^{\frac{1}{2}}\rho_1^{\frac{3}{2}}}{E(N+1)}<1\right\}$,则当 $t\geqslant t_{11}^*(\ \ )$,且 $N\geqslant N_1>0$ 时,有$\parallel q^0\parallel\leqslant\rho_0$。

用 Δ^2q^0 与(8)式作内积有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\parallel\Delta q^0\parallel^2+\gamma\parallel\Delta^2q^0\parallel^2+\parallel\nabla\Delta q^0\parallel^2-\parallel\Delta q^0\parallel^2=-(Q_Np^3,\Delta^2q^0)\leqslant|(Q_Np^3,\Delta^2q^0)|\leqslant$$

$$|p|_{L^\infty}^3\parallel\Delta^2q^0\parallel_{L^1}\leqslant C_1^3\parallel p\parallel^{\frac{3}{2}}\parallel p\parallel_{H^2}^{\frac{3}{2}}\parallel\Delta^2q^0\parallel\leqslant C_1^3\rho_0^{\frac{3}{2}}\rho_1^{\frac{3}{2}}\parallel\Delta^2q^0\parallel\leqslant\frac{\gamma}{2}\parallel\Delta^2q^0\parallel^2+\frac{C_1^6}{2\gamma}\rho_0^3\rho_1^3,$$

即有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\parallel\Delta q^0\parallel^2+\frac{\gamma}{2}\parallel\Delta^2q^0\parallel^2+\parallel\nabla\Delta q^0\parallel^2-\parallel\Delta q^0\parallel^2\leqslant\frac{C_1^6}{2\gamma}\rho_0^3\rho_1^3,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\parallel\Delta q^0\parallel^2+\gamma\parallel\Delta^2q^0\parallel^2+2\parallel\nabla\Delta q^0\parallel^2-2\parallel\Delta q^0\parallel^2\leqslant\frac{C_1^6}{\gamma}\rho_0^3\rho_1^3,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\parallel\Delta q^0\parallel^2+4\gamma(N+1)^4\parallel\Delta q^0\parallel^2+4(N+1)^2\parallel\Delta q^0\parallel^2-2\parallel\Delta q^0\parallel^2\leqslant\frac{C_1^6}{\gamma}\rho_0^3\rho_1^3,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\parallel\Delta q^0\parallel^2+[4\gamma(N+1)^4+4(N+1)^2-2]\parallel\Delta q^0\parallel^2\leqslant\frac{C_1^6}{\gamma}\rho_0^3\rho_1^3,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\parallel\Delta q^0\parallel^2+[4\gamma(N+1)^4+2(N+1)^2-1]\parallel\Delta q^0\parallel^2\leqslant\frac{C_1^6}{\gamma}\rho_0^3\rho_1^3,$$

从而$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\parallel\Delta q^0\parallel^2+E(N+1)\parallel\Delta q^0\parallel^2\leqslant\frac{C_1^6}{\gamma}\rho_0^3\rho_1^3$,根据Gronwall不等式可得

$$\parallel\Delta q^0\parallel^2\leqslant \mathrm{e}^{\int_0^t-E(N+1)\mathrm{d}s}\left[\parallel\Delta q^0(0)\parallel^2+\int_0^t\frac{C_1^6\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma}\mathrm{e}^{\int_0^sE(N+1)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s\right]=$$

$$\frac{C_1^6\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma E(N+1)}+\left(\parallel\Delta q^0(0)\parallel^2-\frac{C_1^6\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma E(N+1)}\right)\mathrm{e}^{-E(N+1)t}\leqslant\frac{C_1^6\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma E(N+1)}+\rho_1^2\mathrm{e}^{-E(N+1)t}$$

令$\frac{C_1^6\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma E(N+1)}\geqslant\rho_1^2\mathrm{e}^{-E(N+1)t}$,则有 $t\geqslant-\frac{1}{E(N+1)}\ln\frac{C_1^6\rho_0^3\rho_1}{\gamma E(N+1)}$,所以存在

$$t_{12}^*(\ \ )=\frac{1}{E(N+1)}\left|\ln\frac{\gamma E(N+1)}{C_1^6\rho_0^3\rho_1}\right|,$$

使得$\parallel\Delta q^0\parallel^2\leqslant\frac{2C_1^6\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma E(N+1)}$,$t\geqslant t_{12}^*(\ \ )$,即$\parallel\Delta q^0\parallel\leqslant\frac{\sqrt{2}C_1^3\rho_0^{\frac{3}{2}}\rho_1^{\frac{3}{2}}}{[\gamma E(N+1)]^{\frac{1}{2}}}$。

记 $N_2=\min\left\{N>0:\frac{\sqrt{2}C_1^3\rho_0^{\frac{3}{2}}\rho_1^{\frac{1}{2}}}{[\gamma E(N+1)]^{\frac{1}{2}}}<1\right\}$,则当 $t\geqslant t_{12}^*(\ \ )$,且 $N\geqslant N_2>0$ 时,有$\parallel\Delta q^0\parallel\leqslant\rho_1$,因此当 $k=0$ 时

(12)式成立。

现假设(12)式对 $k-1$ 成立，即 $\|q^{k-1}\|\leqslant\rho_0$，$\|\Delta q^{k-1}\|\leqslant\rho_1$。用 q^k 与(9)式作内积有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|q^k\|^2+\gamma\|\Delta q^k\|^2+\|\nabla q^k\|^2-\|q^k\|^2=-(Q_N(u^{k-1})^3,q^k)\leqslant$$

$$|(Q_N(u^{k-1})^3,q^k)|\leqslant|u^{k-1}|_{L^\infty}^3\|q^k\|_{L^1}\leqslant(C_2\|u^{k-1}\|^{\frac{1}{2}}\|u^{k-1}\|_{H^2}^{\frac{1}{2}})^3\|q^k\|\leqslant8C_2^3\rho_0^{\frac{3}{2}}\rho_1^{\frac{3}{2}}\|q^k\|。$$

所以有 $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|q^k\|^2+E(N+1)\|q^k\|^2\leqslant\frac{E(N+1)}{2}\|q^k\|^2+\frac{32C_2^6\rho_0^3\rho_1^3}{E(N+1)}$，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|q^k\|^2+E(N+1)\|q^k\|^2\leqslant\frac{64C_2^6\rho_0^3\rho_1^3}{E(N+1)},$$

由 Gronwall 不等式可得

$$\|q^k\|^2\leqslant\mathrm{e}^{\int_0^t-E(N+1)\mathrm{d}s}\left[\|q^k(0)\|^2+\int_0^t\frac{64C_2^6\rho_0^3\rho_1^3}{E(N+1)}\mathrm{e}^{\int_0^sE(N+1)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s\right]=$$

$$\frac{64C_2^6\rho_0^3\rho_1^3}{E^2(N+1)}+\left(\|q^k(0)\|^2-\frac{64C_2^6\rho_0^3\rho_1^3}{E^2(N+1)}\right)\mathrm{e}^{-E(N+1)t}\leqslant\frac{64C_2^6\rho_0^3\rho_1^3}{E^2(N+1)}+\rho_0^2\mathrm{e}^{-E(N+1)t}。$$

令 $\frac{64C_2^6\rho_0^3\rho_1^3}{E^2(N+1)}\geqslant\rho_0^2\mathrm{e}^{-E(N+1)t}$，则有 $t\geqslant-\frac{1}{E(N+1)}\ln\frac{64C_2^6\rho_0\rho_1^3}{E^2(N+1)}$，所以存在 $t_{13}^*(\ )=\frac{1}{E(N+1)}\left|\ln\frac{E^2(N+1)}{64C_2^6\rho_0\rho_1^3}\right|$，

使得 $\|q^k\|^2\leqslant\frac{128C_2^6\rho_0^3\rho_1^3}{E^2(N+1)}$，$t\geqslant t_{13}^*(\ )$，即 $\|q^k\|\leqslant\frac{8\sqrt{2}C_2^3\rho_0^{\frac{3}{2}}\rho_1^{\frac{3}{2}}}{E(N+1)}$，$t\geqslant t_{13}^*(\ )$。

记 $N_1^*=\min\left\{N>0:\frac{8\sqrt{2}C_2^3\rho_0^{\frac{1}{2}}\rho_1^{\frac{3}{2}}}{E(N+1)}<1\right\}$，则当 $t\geqslant t_{13}^*(\ )$，且 $N\geqslant N_1^*>0$ 时，有

$$\|q^k\|\leqslant\rho_0。\tag{13}$$

用 Δ^2q^k 与(9)式作内积有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta q^k\|^2+\gamma\|\Delta^2q^k\|^2+\|\nabla\Delta q^k\|^2-\|\Delta q^k\|^2=-(Q_N(u^{k-1})^3,\Delta^2q^k)\leqslant$$

$$|(Q_N(u^{k-1})^3,\Delta^2q^k)|\leqslant|u^{k-1}|_{L^\infty}^3\|\Delta^2q^k\|_{L^1}\leqslant(C_2\|u^{k-1}\|^{\frac{1}{2}}\|u^{k-1}\|_{H^2}^{\frac{1}{2}}\|)^3\|\Delta^2q^k\|\leqslant8C_2^3\rho_0^{\frac{3}{2}}\rho_1^{\frac{3}{2}}\|\Delta^2q^k\|。$$

所以有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta q^k\|^2+\gamma\|\Delta^2q^k\|^2+\|\nabla\Delta q^k\|^2-\|\Delta q^k\|^2\leqslant\frac{\gamma}{2}\|\Delta^2q^k\|^2+\frac{32C_2^6\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta q^k\|^2+\frac{\gamma}{2}\|\Delta^2q^k\|^2+\|\nabla\Delta q^k\|^2-\|\Delta q^k\|^2\leqslant\frac{32C_2^6\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta q^k\|^2+\gamma\|\Delta^2q^k\|^2+2\|\nabla\Delta q^k\|^2-2\|\Delta q^k\|^2\leqslant\frac{64C_2^6\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta q^k\|^2+(4\gamma(N+1)^4+4(N+1)^2-2)\|\Delta q^k\|^2\leqslant\frac{64C_2^6\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta q^k\|^2+(4\gamma(N+1)^4+2(N+1)^2-1)\|\Delta q^k\|^2\leqslant\frac{64C_2^6\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma},$$

从而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta q^k\|^2+E(N+1)\|\Delta q^k\|^2\leqslant\frac{64C_2^6\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma}$，由 Gronwall 不等式可得

$$\|\Delta q^k\|^2\leqslant\mathrm{e}^{\int_0^t-E(N+1)\mathrm{d}s}\left[\|\Delta q^k(0)\|^2+\int_0^t\frac{64C_2^6\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma}\mathrm{e}^{\int_0^sE(N+1)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s\right]=$$

$$\frac{64C_2^6\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma E(N+1)}+\left(\|\Delta q^k(0)\|^2-\frac{64C_2^6\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma E(N+1)}\right)\mathrm{e}^{-E(N+1)t}\leqslant\frac{64C_2^6\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma E(N+1)}+\rho_1^2\mathrm{e}^{-E(N+1)t}。$$

令 $\frac{64C_2^6\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma E(N+1)}\geqslant\rho_1^2\mathrm{e}^{-E(N+1)t}$，则有 $t\geqslant-\frac{1}{E(N+1)}\ln\frac{64C_2^6\rho_0^3\rho_1}{\gamma E(N+1)}$，所以存在

$$t_{14}^*(\ )=\frac{1}{E(N+1)}\left|\ln\frac{\gamma E(N+1)}{64C_2^6\rho_0^3\rho_1}\right|,$$

使得$\|\Delta q^k\|^2\leqslant\dfrac{128C_2^6\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma E(N+1)},t\geqslant t_{14}^*(\ )$,即$\|\Delta q^k\|\leqslant\dfrac{8\sqrt{2}C_2^3\rho_0^{\frac{3}{2}}\rho_1^{\frac{3}{2}}}{[\gamma E(N+1)]^{\frac{1}{2}}},t\geqslant t_{14}^*(\ )$。

记 $N_2^*=\min\left\{N>0:\dfrac{8\sqrt{2}C_2^3\rho_0^{\frac{3}{2}}\rho_1^{\frac{1}{2}}}{[\gamma E(N+1)]^{\frac{1}{2}}}<1\right\}$,则当 $t\geqslant t_{14}^*(\ )$,且 $N\geqslant N_2^*>0$ 时,有

$$\|\Delta q^k\|\leqslant\rho_1。\tag{14}$$

(13),(14)式说明(12)式对 k 也成立。注意到 N_1,N_2,N_1^*,N_2^* 均与 k 无关,$t_{1i}^*(i=1,2,3,4)$亦与 k 无关,取 $N_0=\max\{N_1,N_2,N_1^*,N_2^*\},t_1^*(\ )=\max\{t_{11}^*,t_{12}^*,t_{13}^*,t_{14}^*\}$,则定理得证。　证毕

现只需证 t 充分大时,q^k 收敛于 q。

定理3　设 $u(x,t)$是对应于初值 $u_0\in$　的系统(2)~(5)式的解,$q^k(k=0,1,2,\cdots)$按(8),(9)式给出,则存在 $N^*\in\mathbf{N}$ 和 $t_2^*(\ )>0$,使得当 $N\geqslant N^*$ 时 $\|q^k-q\|_{H^2}\to0,\ k\to\infty,t\geqslant t_2^*(\ )$,其中 $N^*=\min\left\{N>0:\dfrac{98C_3^2\rho_0^2\rho_1^2}{E^2(N+1)}<1\right\}$。

证明　令 $w^k=q^k-q$,由(7),(9)式有

$$w_t^k+\gamma\Delta^2w^k-\Delta w^k-w^k+Q_N[(u^{k-1})^3-u^3]=0,k=1,2,\cdots\tag{15}$$

因为

$$(u^{k-1})^3-u^3=(u^{k-1}-u)[(u^{k-1})^2+uu^{k-1}+u^2]=w^{k-1}[(u^{k-1})^2+uu^{k-1}+u^2],$$

由(15)式得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta w^k\|^2+\gamma\|\Delta^2w^k\|^2+\|\nabla\Delta w^k\|^2-\|\Delta w^k\|^2=-(Q_N[(u^{k-1})^3-u^3],\Delta^2w^k)\leqslant$$

$$|(Q_N[(u^{k-1})^3-u^3],\Delta^2w^k)|\leqslant\left|\int((u^{k-1})^3-u^3)\Delta^2w^k\mathrm{d}x\right|=$$

$$\left|\int((u^{k-1})^2+uu^{k-1}+u^2)w^{k-1}\Delta^2w^k\mathrm{d}x\right|\leqslant|(u^{k-1})^2+uu^{k-1}+u^2|_{L^\infty}\left|\int w^{k-1}\ \Delta^2w^k\mathrm{d}x\right|\leqslant$$

$$C_3\|(u^{k-1})^2+uu^{k-1}+u^2\|^{\frac{1}{2}}\|(u^{k-1})^2+uu^{k-1}+u^2\|_{H^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta w^{k-1}\|\|\Delta w^k\|\leqslant$$

$$C_3\cdot\sqrt{7}\rho_0\cdot\sqrt{7}\rho_1\|\Delta w^{k-1}\|\ \|\Delta w^k\|=7C_3\rho_0\rho_1\|\Delta w^{k-1}\|\ \|\Delta w^k\|,$$

所以有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta w^k\|^2+4\gamma(N+1)^4\|\Delta w^k\|^2+2(N+1)^2\|\Delta w^k\|^2-\|\Delta w^k\|^2\leqslant7C_3\rho_0\rho_1\|\Delta w^{k-1}\|\ \|\Delta w^k\|,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta w^k\|^2+E(N+1)\|\Delta w^k\|^2\leqslant7C_3\rho_0\rho_1\|\Delta w^{k-1}\|\ \|\Delta w^k\|\leqslant\frac{E(N+1)}{2}\|\Delta w^k\|^2+\frac{49C_3^2\rho_0^2\rho_1^2\|\Delta w^{k-1}\|^2}{2E(N+1)}。$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta w^k\|^2+E(N+1)\|\Delta w^k\|^2\leqslant\frac{49C_3^2\rho_0^2\rho_1^2}{E(N+1)}\|\Delta w^{k-1}\|^2,k=1,2,\cdots\tag{16}$$

又由(7),(8)式有

$$w_t^0+\gamma\Delta^2w^0-\Delta w^0-w^0+Q_N(p^3-u^3)=0。\tag{17}$$

用 Δ^2w^0 与(17)式作内积后易得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta w^0\|^2+\gamma\|\Delta^2w^0\|^2+\|\nabla\Delta w^0\|^2-\|\Delta w^0\|^2=-(Q_N(p^3-u^3),\Delta^2w^0)\leqslant$$

$$|(Q_N(p^3-u^3),\Delta^2w^0)|\leqslant|p^3-u^3|_{L^\infty}\|\Delta^2w^0\|\leqslant C_4\|p^3-u^3\|^{\frac{1}{2}}\|p^3-u^3\|_{H^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta^2w^0\|\leqslant$$

$$C_4\cdot\sqrt{2}\rho_0^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{2}\rho_1^{\frac{3}{2}}\|\Delta^2w^0\|=2C_4\rho_0^{\frac{3}{2}}\rho_1^{\frac{3}{2}}\|\Delta^2w^0\|\leqslant\frac{\gamma}{2}\|\Delta^2w^0\|^2+\frac{2C_4^2\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma},$$

所以有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta w^0\|^2+\frac{\gamma}{2}\|\Delta^2w^0\|^2+\|\nabla\Delta w^0\|^2-\|\Delta w^0\|^2\leqslant\frac{2C_4^2\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta w^0\|^2+\gamma\|\Delta^2w^0\|^2+2\|\nabla\Delta w^0\|^2-2\|\Delta w^0\|^2\leqslant\frac{4C_4^2\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta w^0\|^2+4\gamma(N+1)^4\|\Delta w^0\|^2+4(N+1)^2\|\Delta w^0\|^2-2\|\Delta w^0\|^2\leqslant\frac{4C_4^2\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta w^0\|^2+4\gamma(N+1)^4\|\Delta w^0\|^2+2(N+1)^2\|\Delta w^0\|^2-\|\Delta w^0\|^2\leqslant\frac{4C_4^2\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma},$$

即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta w^0\|^2+E(N+1)\|\Delta w^0\|^2\leqslant\frac{4C_4^2\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma}$，根据 Gronwall 不等式可得

$$\|\Delta w^0\|^2\leqslant \mathrm{e}^{\int_0^t-E(N+1)\mathrm{d}s}\left[\|\Delta w^0(0)\|^2+\int_0^t\frac{4C_4^2\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma}\mathrm{e}^{\int_0^s E(N+1)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s\right]=$$

$$\frac{4C_4^2\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma E(N+1)}+\left(\|\Delta w^0(0)\|^2-\frac{4C_4^2\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma E(N+1)}\right)\mathrm{e}^{-E(N+1)t}\leqslant$$

$$\frac{4C_4^2\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma E(N+1)}+\left(4\rho_1^2-\frac{4C_4^2\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma E(N+1)}\right)\mathrm{e}^{-E(N+1)t}\leqslant\frac{4C_4^2\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma E(N+1)}+4\rho_1^2\mathrm{e}^{-E(N+1)t}。$$

令 $4\rho_1^2\mathrm{e}^{-E(N+1)t}\leqslant\frac{4C_4^2\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma E(N+1)}$，则有 $t\geqslant-\frac{1}{E(N+1)}\ln\frac{C_4^2\rho_0^3\rho_1}{\gamma E(N+1)}$，所以存在 $t_{20}^*(\quad)>0$，有 $\|\Delta w^0\|^2\leqslant\frac{8C_4^2\rho_0^3\rho_1^3}{\gamma E(N+1)}$。

在(16)式中令 $k=1$，即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta w^1\|^2+E(N+1)\|\Delta w^1\|^2\leqslant\frac{49C_3^2\rho_0^2\rho_1^2}{E(N+1)}\|\Delta w^0\|^2$，根据 Gronwall 不等式可得

$$\|\Delta w^1\|^2\leqslant \mathrm{e}^{\int_0^t-E(N+1)\mathrm{d}s}\left[\|\Delta w^1(0)\|^2+\int_0^t\frac{49C_3^2\rho_0^2\rho_1^2}{E(N+1)}\|\Delta w^0\|^2\mathrm{e}^{\int_0^s E(N+1)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s\right]=$$

$$\frac{49C_3^2\rho_0^2\rho_1^2}{E^2(N+1)}\|\Delta w^0\|^2+\left(\|\Delta w^1(0)\|^2-\frac{49C_3^2\rho_0^2\rho_1^2}{E^2(N+1)}\|\Delta w^0\|^2\right)\mathrm{e}^{-E(N+1)t}\leqslant$$

$$\frac{49C_3^2\rho_0^2\rho_1^2}{E^2(N+1)}\|\Delta w^0\|^2+\left(4\rho_1^2-\frac{49C_3^2\rho_0^2\rho_1^2}{E^2(N+1)}\|\Delta w^0\|^2\right)\mathrm{e}^{-E(N+1)t}\leqslant\frac{49C_3^2\rho_0^2\rho_1^2}{E^2(N+1)}\|\Delta w^0\|^2+4\rho_1^2\mathrm{e}^{-E(N+1)t}。$$

令 $4\rho_1^2\mathrm{e}^{-E(N+1)t}\leqslant\frac{49C_3^2\rho_0^2\rho_1^2}{E^2(N+1)}\|\Delta w^0\|^2$，则有 $t_{21}^*(\quad)>0$，使得 $\|\Delta w^1\|^2\leqslant\frac{98C_3^2\rho_0^2\rho_1^2}{E^2(N+1)}\|\Delta w^0\|^2$，在(16)式中使用归纳法得：存在 $t_{2k}^*(\quad)>0$，$k=1,2,\cdots$，有 $\|\Delta w^k\|^2\leqslant\left(\frac{98C_3^2\rho_0^2\rho_1^2}{E^2(N+1)}\right)^k\|\Delta w^0\|^2$，$t\geqslant t_{2k}^*(\quad)$，$k=1,2,\cdots$，若令 $N^*=\min\left\{N>0:\frac{98C_3^2\rho_0^2\rho_1^2}{E^2(N+1)}<1\right\}$，则定理得证。　　证毕

定理 2 和定理 3 证明了渐近解序列对真解的渐近逼近性，而渐近解序列的维数，即渐近吸引子的维数

$$N_k=\min\left\{N\in\mathbf{N}:\frac{8\sqrt{2}C_2^3\rho_0^{\frac{1}{2}}\rho_1^{\frac{3}{2}}}{E(N+1)}<1,\frac{8\sqrt{2}C_2^3\rho_0^{\frac{3}{2}}\rho_1^{\frac{1}{2}}}{[\gamma E(N+1)]^{\frac{1}{2}}}<1,\frac{98C_3^2\rho_0^2\rho_1^2}{E^2(N+1)}<1\right\}。$$

参考文献：

[1] 王冠香，刘曾荣. Kuramoto-Sivashinsky 方程的渐近吸引子[J]. 应用数学学报，2000，23(3)：329-336.
WANG G X，LIU Z R. The asymptotic attractor for Extended Fisher-Kolmogorov equation[J]. Acta Math Appl Sinica，2000，23(3)：329-336.

[2] 何素芳，朱朝生. 推广的 B-BBM 方程的渐近吸引子[J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2007，30(1)：49-52.
HE S F，ZHU C S. The asymptotic attractor for the generalied B-BBM equation[J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science)，2007，30(1)：49-52.

[3] 张晓明，姜金平，董超雨. Kdv-Burgers-Kuramoto 系统的渐近吸引子[J]. 纯粹数学与应用数学，2014，30(6)：595-603.
ZHANG X M，JIANG J P，DONG C Y. The asymptotic attractor of KdV-Burgers-Kuramoto equation[J]. Pure and Applied Mathematic，2014，30(6)：595-603.

[4] 张晓明，姜金平，董超雨. 非线性梁方程的渐近吸引子[J]. 数学的实践与认识，2015，45(2)：302-308.
ZHANG X M，JIANG J P，DONG C Y. The asymptotic attractor of a nonlinear Beam equation[J]. Mathematic in Practice and Theory，2015，45(2)：302-308.

[5] ZHAO L N，ZHANG X Y，XING T L. The asymptotic attractor of 2D Navier-Stokes equation[J]. Journal of Mathematical Study，2007，40(3)：251-257.

[6] 魏晋滢. Extended Fisher-Kolmogorov 方程解的存在性、正则性及渐近性[D]. 兰州：西北师范大学，2007.
WEI J Y. Existence，regularity and asymptotic behavior of

solution for Extended Fisher-Kolmogorov equation[D]. Lanzhou:Northwest Normal University,2007.

[7] PELETIER L A,TROY W C. Chaotic spatial patterns described by the EFK equation[J]. J Diff Eqs,1996,129:458-508.

[8] 罗宏,蒲志林. Extended Fisher-Kolmogorov 系统的渐近吸引子[J]. 纯粹数学与应用数学,2004,20(2):150-156.
LUO H,PU Z L. The asymptotic attractor of Extended Fisher-Kolmogorov system[J]. Pure and Applied Mathematic,2004,20(2):150-156.

[9] 罗宏,蒲志林. Extended Fisher-Kolmogorov 系统的整体吸引子及其分形维数估计[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2004,27(2):135-138.
LUO H,PU Z L. A global attractor of Extended Fisher-Kolmogorov system and estimate to fractal dimention[J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science), 2004,27(2):135-138.

[10] 马丽蓉. 二维 Extended Fisher-Kolmogorov 方程解的存在唯一性[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2010,27(5):42-45.
MA L R. Existence and uniqueness of solution for two dimensional Extended Fisher-Kolmogorov equation[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2010,27(5):42-45.

[11] 马丽蓉,徐天华,帅维成. 二维 Extended Fisher-Kolmogorov 方程的全局吸引子[J]. 西南大学学报(自然科学版),2012,34(8):108-111.
MA L R,XU T H,SHUAI W C. The global attractor of two dimensional Extended Fisher-Kolmogorov equation [J]. Journal of Southwest University (Natural Science), 2012,34(8):108-111.

[12] TEMAM R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics[M]. New York:Springer-verlag, 1997.

The Asymptotic Attractor and Dimensional Estimate of Two Dimensional Extended Fisher-Kolmogorov Equation

ZHOU Ping, XING Chao, LUO Hong

(College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China)

Abstract: [**Purposes**] In this paper, the asymptotic attractor of 2D Extended Fisher-Kolmogorov equation with periodic boundary conditions was studied, and the dimensional estimate of the asymptotic attractor was obtained. [**Methods**] It is discussed by using the orthogonal decomposition, the energy estimate method and so on. [**Findings**] A finite dimensional solution sequence was constructed, and proves that the solution sequence doesn't go away from the absorbing set. [**Conclusions**] Finally, it is shown that the solution sequence approaches to the real solution, so the existence of the asymptotic attractor is proved.

Keywords: 2D Extended Fisher-Kolmogorov equation; asymptotic attractor; dimensional estimate

(责任编辑 黄 颖)