DOI:10.11721/cqnuj20170110

自入射代数平凡扩张的复杂度*

万前红[1], 郑立景[2]
(1. 湖南商学院 数学与统计学院, 长沙 410205; 2. 南华大学 数理学院, 湖南 衡阳 421001)

摘要:【目的】设 Λ 是一个连通的有限表示型的有限维自入射代数,$T(\Lambda)$是其平凡扩张代数。本研究主要目的是找出 Λ 的复杂度与 T 的复杂度之间的关系。【方法】首先当 Λ 是满足 Fg 假设的自入射代数时,Λ 的表示维数大于等于 Λ 的复杂度加 1,且有限表示型的表示维数等于 2,所以 Λ 的复杂度小于等于 1;又因为自入射代数 Λ 上的模的有无限投射维数,所以 Λ 的复杂度大于等于 1,因而得到 Λ 的复杂度为 1。其次,通过构造 $T(\Lambda)$上单模的投射分解,具体计算 $T(\Lambda)$上单模的投射分解中每一项 $P^t(M)$的维数,得到对几乎所有的 t,存在 $\lambda>0$,使得 $\dim P^t(M)\leqslant\lambda t$,利用复杂度定义即有 $T(\Lambda)$的复杂度为 2。【结果】因而得到 $T(\Lambda)$的复杂度为 Λ 的复杂度加 1。【结论】该结果丰富了无限表示型自入射代数与其平凡扩张代数的复杂度之间存在加 1 关系的结果。选取非 Koszul 代数的例子说明本结论成立。

关键词:平凡扩张;自入射代数;复杂度;投射分解

中图分类号:O154.2 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2017)01-0069-04

1977 年,Alperin 在研究群代数的 Auslander-Reiten 箭图的结构时引入了模的复杂度的定义[1],它描述了模的极小投射分解中每项的增长速度。模的复杂度是一个重要的代数不变量。1982 年,Webb 证明群环 RG 的 Auslander-Reiten 箭图上的连通分支上的任意两个模具有相同的复杂度[2]。2000 年,Guo 和 Wu 引入了 Loewy 矩阵,Level 维数向量,将代数表示论中 Coxeter 矩阵的方法推广应用于 Koszul 自入射代数的研究,给出了 Koszul 自入射代数复杂度有限当且仅当其谱半径为 1[3]。代数的复杂度与表示型之间存在紧密的联系:如 2006 年,Solberg 讨论了有限表示型与复杂度之间的关系[4];2009 年,在文献[5]中,Guo 等人给出了根三次方为 0 的对称 Koszul 代数的分类,他们得到代数闭域上根三次方为 0 的自入射代数是有限表示型的当且仅当其复杂度为 1,是 tame 表示型的当且仅当其复杂度为 2,是 wild 表示型的当且仅当其复杂度无限。

模的支撑簇是一个强有力的不变量,对于群代数或者是余交换的 Hopf 代数,它由群的上同调环的极大理想谱来定义。在文献[6]中,Erdmann 等人引入有限生成 Fg 假设,对于一般的有限维代数,若该代数满足有限生成假设,则模的支撑簇的定义可由群的上同调环的极大理想的谱转为考虑 Hochschild 上同调环的子代数,因而大量的关于有限群的支撑簇的理论的结论能够一般化到有限维代数。因此考虑一个代数是否满足 Fg 假设逐渐变为一个研究热点:如任意外代数满足 Fg 假设[7],代数闭域上有限表示型的有限维自入射代数满足 Fg 假设[8]等。

近些年,复杂度与其他概念的联系得到了越来越多的研究。在文献[7]中,Bergh 研究了复杂度和表示维数的关系,得到在代数满足 Fg 假设的条件下,其表示维数不小于其复杂度加 1。在文献[2]中,Webb 确定了有限群的群代数的稳定 Auslander-Reiten 箭图的形状,在文献[6]中,Erdmann 等人一般化了 Webb 的结果,得到在满足有限生成假设的条件下,有限生成模的支撑簇的维数等于该模的复杂度。

在文献[9]中,Guo 等人得到 Koszul 自入射代数 Λ 的平凡扩张代数 $T(\Lambda)$的复杂度为 Λ 的复杂度加 1。由文献[10]的定理 1.5 知,文献[9]中所考虑的代数若其根平方不为 0,则其是无限表示型的。很自然地,提出下面的问题:是否有限表示型的自入射代数的复杂度与其平凡扩张代数的的复杂度也存在文献[9]中的关系?本研究正是考虑这个问题,且得到有限表示型的自入射代数平凡扩张代数 $T(\Lambda)$的复杂度确实为代数 Λ 的复杂度加 1。

本研究结构如下:第 1 节介绍一些基本知识;第 2 节通过考虑有限表示型自入射代数 Λ 平凡扩张代数 $T(\Lambda)$

* **收稿日期:**2016-03-09 **修回日期:**2016-06-17 **网络出版时间:**2017-01-12 11:34
资助项目:湖南省自然科学基金青年项目(No. 2016JJ6049;No. 2016JJ624)
第一作者简介:万前红,女,讲师,博士,研究方向为代数表示论,E-mail:77927023@qq.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20170112.1134.026.html

的单模的投射分解,得到代数 $T(\Lambda)$的复杂度为代数 Λ 的复杂度加 1。

1 预备知识

设 k 是一个域,Λ 是域 k 上的有限维代数。用 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 表示有限生成的左 Λ-模范畴(若不作特别说明,本研究中所考虑的模均指左模)。

设 $D=\mathrm{Hom}_k(-,k)$是标准对偶函子,则 $D\Lambda$ 有一个典型的 Λ-双模结构,即对任意 $\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda$,$f\in D\Lambda$,$(\lambda_1\cdot f)(\lambda_2)=f(\lambda_2\lambda_1)$;$(f\cdot\lambda_1)(\lambda_2)=f(\lambda_1\lambda_2)$。

Λ 的平凡扩张代数 $T(\Lambda)=\Lambda\triangleright D\Lambda$ 定义为向量空间 $\Lambda\oplus D\Lambda$,对任意的 $a,b\in\Lambda$,$x,y\in D\Lambda$,其乘法定义为 $(a,x)(b,y)=(ab,ay+xb)$。

对任意 $M\in\mathrm{mod}\,\Lambda$,若 M 有投射分解:

$$\cdots\longrightarrow P^t(M)\xrightarrow{f_t}\cdots P^2(M)\xrightarrow{f_2}P^1(M)\xrightarrow{f_1}P^0(M)\xrightarrow{f_0}M\longrightarrow 0 \tag{1}$$

且 $\mathrm{Im}f_t\subseteq rP^{t-1}(M)$(其中 r 表示模的根),则称此投射分解为极小投射分解。若模 M 有如上的投射分解,模 M 的复杂度 $c_\Lambda(M)$定义为 $c_\Lambda(M)=\inf\{d\in\mathbf{Z}\mid\exists\lambda>0$且 $\dim P^t(M)\leqslant\lambda t^{d-1}$对几乎所有的 t 均成立$\}$。代数 Λ 的复杂度定义为 $c_\Lambda=\sup\{c_\Lambda(M)\mid M\in\mathrm{mod}\,\Lambda\}$。若 $c_\Lambda<\infty$,则称代数 Λ 为有限复杂度代数,否则称为无限复杂度的代数。

用 $addM$ 表示模 M 的任意有限直和的直和项所构成的范畴。Λ-模 M 称为生(余)成子,若任意的有限生成投射(内射) Λ-模都属于 $addM$。1971 年,Auslander 引入有限维代数表示维数的概念,用 $gl\cdot\dim\Lambda$ 表示代数 Λ 的整体维数,如果 Λ 是一个半单代数,则 Λ 的表示维数定义为 1,否则 Λ 的表示维数定义为

$$\mathrm{rep}\dim\Lambda=\min\{gl\cdot\dim End_\Lambda(M)\mid M\text{是生成和余生成子}\},$$

其中 $End_\Lambda(M)$表示模 M 在 Λ 上的自同态环[11]。他证明了一个代数是有限表示型的当且仅当其表示维数小于等于 2[11]。

设 Λ 是有限维代数,记 $HH^*(\Lambda)$为 Λ 的 Hochschild 上同调环,$E(\Lambda)$为 Λ 的 Yoneda 代数。称 Λ 满足 Fg 假设,若 $HH^*(\Lambda)$是 Noether 代数,且 $E(\Lambda)$是有限生成的 $HH^*(\Lambda)$-模。Fg 假设的进一步信息参见文献[4]。当 Λ 满足 Fg 假设时,$\mathrm{rep}\dim\Lambda\geqslant c_\Lambda+1$ (文献[7]的定理 2.2)。

若 M 是一个 Λ-模且有(1)式的投射分解,由复杂度定义,很容易得到下面的引理。

引理 1 设 Λ 是一个有限维代数,M 是一个 Λ-模,则:

1) $c_\Lambda(M)=0$ 当且仅当模 M 有有限投射维数;

2) $c_\Lambda(M)=1$ 当且仅当对几乎所有 t,$\dim P^t(M)$有界;

3) $c_\Lambda(M)=2$ 当且仅当对几乎所有的 t,存在 $\lambda>0$,使得 $\dim P^t(M)\leqslant\lambda t$。

对复杂度,在文献[5]中,有下面有用的结论。

引理 2 设 Λ 是一个有限维代数,$0\to A\to B\to C\to 0$ 是 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 中的任意一个短正合列,则 $c_\Lambda(B)\leqslant\max\{c_\Lambda(A),c_\Lambda(C)\}$ (文献[5]的引理 1.1)。

推论 1 $c_\Lambda=\max\{c_\Lambda(S)\mid S\text{为单}\Lambda\text{-模}\}$ (文献[5]的推论 1.4)。

由引理 2 及模的直和与直和项投射分解的关系,很容易得到下面的引理 3。

引理 3 设模 $M=M_1\oplus M_2$,则 $c_\Lambda(M)=\max\{c_\Lambda(M_1),c_\Lambda(M_2)\}$。

一般地,有推论 2。

推论 2 设模 M 有直和分解 $M=\oplus_{i=1}^n M_i$,则 $c_\Lambda(M)=\max\{c_\Lambda(M_i)\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$。

记 Λ_0 为所有单 Λ-模的直和,有下面的推论 3。

推论 3 $c_\Lambda=c_\Lambda(\Lambda_0)$。

Artin 代数 Λ 称为自入射代数,若 Λ 作为 Λ-模既投射且内射。由文献[8],有限表示型的自入射代数 Λ 满足 Fg 假设。由此有下面的命题 1。

命题 1 设 Λ 是有限表示型的非半单自入射代数,则 Λ 的复杂度 $c_\Lambda=1$。

证明 一方面,由文献[7]的定理 2.2,当 Λ 是满足 Fg 假设的自入射代数时,$\mathrm{rep}\dim\Lambda\geqslant c_\Lambda+1$;另一方面,

因为 Λ 是有限表示型的非半单代数，所以 rep dim $\Lambda=2$，所以 $c_{\Lambda}\leqslant 1$。由引理 1 中的条件 1)，得 $c_{\Lambda}=1$。　　证毕

此命题证明亦可参见文献[12]。

2 主要结果

设 Λ 是一个连通的有限维自入射代数，函子 $F=D\Lambda\otimes_{\Lambda}-:\mathrm{mod}\,\Lambda\to\mathrm{mod}\,\Lambda$。在文献[13]中，有下面的引理 4。

引理 4　设 Λ 是一个连通的有限维自入射代数，若 Λ_0 作为 Λ-模有极小投射分解

$$\cdots\longrightarrow P_i\xrightarrow{\rho_i}\cdots\to P_1\xrightarrow{\rho_1}P_0\xrightarrow{\rho_0}\Lambda_0\longrightarrow 0,\tag{2}$$

则 Λ_0 作为 $T(\Lambda)$-模有极小投射分解

$$\cdots\longrightarrow T(\Lambda)\otimes_{\Lambda}(\oplus_{j=0}^{i}F^{j}P_{i-j})\xrightarrow{\psi_i=s_{i-1}^{-1}h_is_i}\cdots\longrightarrow T(\Lambda)\otimes_{\Lambda}(P_1\oplus FP_0)\xrightarrow{\psi_1=s_0^{-1}h_1s_1}$$

$$T(\Lambda)\otimes_{\Lambda}P_0\xrightarrow{\psi_0=h_0s_0}\Lambda_0\longrightarrow 0,\tag{3}$$

其中对 $i\geqslant 2$，$h_i:\oplus_{j=0}^{i}F^{j}P_{i-j}\oplus F(\oplus_{j=0}^{i}F^{j}P_{i-j})\to\oplus_{j=0}^{i-1}F^{j}P_{i-j-1}\oplus F(\oplus_{j=0}^{i-1}F^{j}P_{i-j-1})$ 为

$$\begin{pmatrix}\rho_i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & \varphi_{i-1} & \varphi_{i-1}t_i\end{pmatrix},\rho_i:P_i\to P_{i-1},\ t_i:F(\oplus_{j=0}^{i}F^{j}P_{i-j})\to F(\oplus_{j=0}^{i-1}F^{j}P_{i-j-1}),$$

且 $t_i|_{FP_i}=F\rho_i$，$t_i|_{F(\oplus_{j=1}^{i}F^{j}P_{i-j})}=0$，$\varphi_{i-1}$是下面短正合列中的态射

$$0\to F(\oplus_{j=0}^{i-1}F^{j}P_{i-j-1})\xrightarrow{\begin{pmatrix}-t_{i-1}\\ \varphi_{i-1}\end{pmatrix}}\oplus_{j=1}^{i-1}F^{j}P_{i-j-1}\oplus F(\oplus_{j=0}^{i-1}F^{j}P_{i-j-1})\xrightarrow{(1\quad t_{i-1})}\oplus_{j=1}^{i-1}F^{j}P_{i-j-1}\to 0。$$

$$h_1=\begin{pmatrix}\rho_1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & t_1\end{pmatrix},t_1|_{FP_1}=F\rho_1,t_1|_{F^2P_0}=0,h_0=(\rho_0\quad 0)。$$

因为有限表示型的自入射代数 Λ 的 Ω 函子(合冲（$syzygy$)函子)是周期的，因此存在正整数 n，使得 Λ_0 作为 Λ-模有极小投射分解

$$\cdots\longrightarrow P_n\xrightarrow{\rho_n}\cdots\to P_1\xrightarrow{\rho_1}P_0\xrightarrow{\rho_0}P_n\xrightarrow{\rho_n}\cdots\to P_1\xrightarrow{\rho_1}P_0\xrightarrow{\rho_0}\Lambda_0\longrightarrow 0,$$

从而当 Λ 是有限表示型的自入射代数时，Λ_0 作为 $T(\Lambda)$-模的极小投射分解(即引理 4 的(3)式)中第 $i+1$ 项 $T(\Lambda)\otimes_{\Lambda}(\oplus_{j=0}^{i}F^{j}P_{i-j})$中的模 $P_{i-j}\in\{P_0,\cdots,P_n\}$。因为 $c_{\Lambda}=1$，所以 $P_s(0\leqslant s\leqslant n)$的不可分解直和项的个数有限，因而 P_{i-j}有有限个不可分解投射模作为直和项。因为函子 F 保直和且将投射模变到投射模，所以对任意 j，$F^{j}P_{i-j}$仍是投射模且与 P_{i-j}有相同的不可分解直和项的个数，所以 $\dim F^{j}P_{i-j}$有限。进一步地，$\dim T(\Lambda)\otimes_{\Lambda}(\oplus_{j=0}^{i}F^{j}P_{i-j})$有限，记为 $\lambda/2$。由此，有下面的引理 5。

引理 5　$\dim(T(\Lambda)\otimes_{\Lambda}(\oplus_{j=0}^{i}F^{j}P_{i-j}))\leqslant\lambda i$。

由引理 4，结合引理 1，有下面定理 1。

定理 1　设 Λ 是有限表示型非半单的自入射代数，$T(\Lambda)$是其平凡扩张代数，则 $c_{T(\Lambda)}=2$。

例 1　设 Λ 是由图 1 模去生成元集 $\rho=\{\beta_1\beta_2,\gamma_2\gamma_1,\beta_2\gamma_2-\gamma_1\beta_1\}$生成的理想给出的有限维分次自入射代数。它是根 3 方为 0 的有限表示型的几乎 Koszul 自入射代数，其复杂度为 1[5]。由文献[9]可知，其平凡扩张代数是由图 2 的路代数模去生成元集

$$\{\beta_1\beta_2,\gamma_2\gamma_1,\beta_2\gamma_2-\gamma_1\beta_1\}\cup\{\alpha_i^2\mid i=1,2,3\}\cup\{\alpha_1\beta_1-\beta_1\alpha_2,\alpha_2\beta_2-\beta_2\alpha_3,\alpha_2\gamma_1-\gamma_1\alpha_1,\alpha_3\gamma_2-\gamma_2\alpha_2\}$$

生成的理想给出的有限维分次自入射代数，其复杂度为 2(文献[14]中的定理 2.3)。

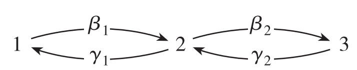

图 1　代数 Λ 的箭图

Fig. 1　Quiver of Λ

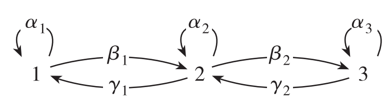

图 2　代数 $T(\Lambda)$的箭图

Fig. 2　Quiver of $T(\Lambda)$

因此得到：当 Λ 是有限表示型非半单的自入射代数时，其平凡扩张代数 $T(\Lambda)$的复杂度与其复杂度之间存在加 1 的关系，因而丰富了文献[9]中关于无限表示型自入射代数与其平凡扩张代数的复杂度之间加 1 关系的结果。

参考文献：

[1] ALPERIN J L. Periodicity in groups[J]. Illinois Journal of Mathmatics, 1997, 21(4): 776-783.

[2] WEBB P. The Auslander-Reiten quiver of a finite group [J]. Mathematische Zeitschrift, 1982, 179(1): 97-121.

[3] GUO J Y, WU Q X. Loewy matrix, Koszul cone and applications[J]. Communication in Algebra, 2000, 28(2): 925-941.

[4] SOLBERG. Support varieties for modules and complexes [C]// de la Pe a J A, Bautista R. Trends in representation theory of algebras and related topics, contemporary mathematics. American: American Mathematical Society, 2006: 239-270.

[5] GUO J Y, LI A H, WU Q X. Selfinjective Koszul algebras of finite complexity[J]. Acta Mathematica Sinica, 2009, 25 (12): 2179-2198.

[6] ERDMANN K, HOLLOWAY M, SNASHALL N, et al. Support varieties for selfinjective algebras[J]. K-theory, 2004, 33: 67-87.

[7] BERGH P A. Representation dimension and finitely generated cohomology[J]. Advances in Mathematics, 2008, 219 (1): 389-400.

[8] DUGAS A S. Periodic resolutions and self-injective algebras of finite type[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2010, 214: 990-1000.

[9] GUO J Y, YIN Y, ZHU C. Returning arrows for self-injective algebras and Artin-Schelter regular algebras[J]. Journal of Algebra, 2014, 397(1): 365-378.

[10] MARTINEZ-VILLA R. Application of Koszul algebras: the preprojective aglebra[C]//Carell J B, Ram Murty M. Represen-tation of algebras: CMS conference proceedings 18. American: American Mathematical Society, Providence, 1996: 487-504.

[11] AUSLANDER M. Representation dimension of artin algebras[C]// Reiten I, Smalo S, Solberg. Queen mary college mathematics notes (1971). American: American Mathematical Society, Providence, 1999: 505-574.

[12] HELLER A. Indecomposable representation and the loop space operation[J]. Proceedings of American Mathematic Society, 1961(12): 640-643.

[13] 万前红，郭晋云. 自入射代数平凡扩张的 Koszul 性[J]. 数学物理学报，2013，33A(2)：246-252.
WAN Q H, GUO J Y. The Koszulity of the trivial extension of selfinjective algebra[J]. Acta Mathematica Scientia, 2013, 33A(2): 246-252.

[14] 胡相熙. 一类几乎 Koszul 自入射代数平凡扩张的投射分解研究[D]. 长沙：湖南师范大学，2014.
HU X X. The projective resolution of the trivial extension of an almost Koszul algebra[D]. Changsha: Hunan Normal University, 2014.

On the Complexity of the Trivial Extension of Self-injective Algebra

WAN Qianhong, ZHENG Lijing

(1. School of Mathematics and Statistics, Hunan University of Commerce, Changsha 410205;
2. School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang Hunan 421001, China)

Abstract: [**Purposes**] Let Λ be a connected finite dimensional self-injective algebra of finite type, $T(\Lambda)$ be its trivial extension. In this paper, we want to find out the relationship of the complexity between Λ and its trivial extension $T(\Lambda)$. [**Methods**] Firstly if Λ is the self-injective algebra satisfying Fgassumption, then the representation dimension of Λ is one more than or equal to the complexity of Λ, and the representation dimension of algebra of finite representation type is 2, so the complexity of Λ is less than or equal to 1, on the other hand, if Λ is a self-injective algebra, then the Λ-mod is infinite projective dimension, then the complexity of Λ is more than or equal to 1, so the complexity of Λ is 1. Secondly by constructing the projective resolution of simple $T(\Lambda)$-mod and computing the dimension of every $P^t(M)$ in the projective resolution of simple $T(\Lambda)$-mod, there exists $\lambda>0$ such that dimdim$P^t(M)\leqslant\lambda t$ for almost all t, and by using the definition of the complexity, the complexity of $T(\Lambda)$ is 2. [**Findings**] the complexity of Λ is one more than that of $T(\Lambda)$. [**Conclusions**] Which enriches the same result about the algebra of infinite representation type? Lastly an example is given in which the algebra is not Koszul to illustrate our conclusion.

Keywords: trivial extension; self-injective algebra; complexity; projective resolution

（责任编辑 游中胜）