2016 年度重庆市出版专项基金资助栏目

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20170302

带有维修活动和交货期窗口的单机排序问题*

张 蕾，赵传立

(沈阳师范大学 数学与系统科学学院，沈阳 110034)

摘要:【目的】带有维修活动和交货期窗口的单机排序问题在现实生活中有着广泛的应用。每个工件都有属于自己的交货期窗口，工件在交货期窗口外完工，就会产生相应的提前、延误惩罚。因此，确定交货期窗口位置具有重要意义。【方法】考虑了 2 种维修活动：依赖于时间、资源的维修活动；依赖于位置、资源的维修活动。针对不同的维修位置，将问题转化为指派问题。【结果】给出了计算复杂性是 $O(n^4)$ 的多项式时间算法。【结论】证明了该问题是多项式时间可解的。

关键词:排序；单机；退化维修；交货期窗口；多项式时间

中图分类号:O223 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2017)03-0012-08

近年来，关于具有维修活动的排序问题的研究越来越多，因为机器在生产过程中存在损耗，而维修活动可以提高机器的生产效率。Cheng 等人[1]和 Yang 等人[2]分别研究了具有退化维修和交货期窗口的单机排序问题，通过对 2 种不同模型的分析，给出了计算复杂性为 $O(n^2\log n)$ 的多项式时间算法。Rustogi 等人[3]研究了多次维修活动的排序问题，提出了维修活动后机器不会完全恢复到原来的状态，此问题更加接近现实生活的生产加工。Rustogi 等人[4]进一步讨论了具有维修活动的单机排序问题，提出了工件的加工时间是依赖于时间和位置的排序模型。Luo 等人[5]提出了维修活动必须发生在给定的截止日期之前，以及维修时间是关于开始维修时间单调递增的函数，对多个目标函数分别给出了多项式时间算法。

在带有交货期窗口的模型中，若工件在交货期窗口前完工，则产生提前完工费用；若工件在交货期窗口后完工，则产生延误完工费用；若工件在交货期窗口内完工，则不产生费用。Liman 等人[6]提出了最基本的交货期窗口问题，给出了计算复杂性为 $O(n\log n)$ 的多项式时间算法。Zhao 等人[7]在交货期窗口的基础上，研究了具有退化效应和维修活动的单机排序问题，证明了问题的计算复杂性为 $O(n^4)$。Mosheiov 等人[8]提出了带有维修活动和交货期窗口的单机排序问题，给出了计算复杂性为 $O(n^4)$ 的多项式时间算法。Wang 等人[9]提出了具有学习效应、资源和交货期窗口的单机排序问题，并在多项式时间内解决了该问题，计算复杂性为 $O(n^3)$。随着对单窗口问题的深入研究，多窗口问题也开始受到关注。Yang 等人[10]提出了多个交货期窗口和可控加工时间的排序问题，并且给出了计算复杂性为 $O(n^3)$ 的多项式时间算法。Yin 等人[11]研究了带有多个交货期窗口，加工时间分别为线性函数和凸函数 2 种类型的单机排序问题，通过对不同情况的分析，给出了计算复杂性为 $O(n^3)$ 的多项式时间算法。

Mor 等人[12]提出了带有维修活动和多个交货期窗口的单机排序问题，其中考虑了 2 种类型的维修活动：依赖于时间的维修活动；依赖于位置的维修活动。通过对 3 种不同位置的维修活动进行分析，分别给出了计算复杂性为 $O(n\log n)$ 和 $O(n^4)$ 的多项式时间算法。Zhu 等人[13]研究了在退化可控的维修活动下带有交货期窗口的单机排序问题，给出了维修活动依赖于开始维修时间和资源的模型，并且通过对不同目标函数的分析，分别给出了多项式时间算法。本文在以上 2 种模型的基础上进行推广，讨论了带有多个交货期窗口和 2 种不同类型的维修活动的单机排序问题，通过分析，证明了该问题是多项式时间可解的。

* **收稿日期**:2016-04-15 **修回日期**:2017-03-25 **网络出版时间**:2017-05-02 17:25

资助项目:辽宁省教育厅科学研究基金(No.L2014433)

第一作者简介:张蕾，女，研究方向为最优化方法及其应用，E-mail:1095934063@qq.com；**通信作者**:赵传立，教授，E-mail:zhaochuanli@synu.edu.cn

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170502.1725.046.html

1 问题描述

设有 n 个工件$\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$在一台机器上加工，所有工件零时刻到达，机器在同一时间只可加工一个工件。工件 J_j 的基本加工时间为 p_j，$j=1,\cdots,n$。为了增加机器的工作效率，可以对机器进行一次维修，维修前工件 J_j 的加工时间为 p_j，维修后工件 J_j 的加工时间为 $\theta_j p_j$，θ_j 为工件 J_j 的维修率，且 $0<\theta_j\leqslant 1$。

对于维修活动，基本维修时间为 t_0，考虑 2 种类型的维修活动：1）依赖于时间、资源的维修活动。维修时间为 $t(s_{\mathrm{rm}},u)=t_0+\sigma s_{\mathrm{rm}}-\tau(u)$，$s_{\mathrm{rm}}$ 是开始维修的时间，$u\in[0,u_{\max}]$是赋予维修活动的资源，$\tau(u)$是关于资源消耗的函数，$\tau(u)$是连续且单调递增的，$0\leqslant\tau(u)\leqslant\tau(u_{\max})\leqslant\bar{\tau}<t_0$，$\sigma$ 是维修参数。2）依赖于位置、资源的维修活动。若维修活动是在第 m 个工件完工后立即开始，维修时间为 $t(m,u)=t_0\varphi(m)-\tau(u)$，$\varphi(m)$是关于维修位置 m 的一个函数，且 $1=\varphi(0)\leqslant\varphi(1)\leqslant\varphi(2)\leqslant\cdots\leqslant\varphi(n)$。

对于一个给定的排序 π，C_j 定义为工件 J_j 的完工时间，每个工件都有自己的交货期窗口$[d_j^1,d_j^2]$，$d_j^1\leqslant d_j^2$，$j=1,\cdots,n$。工件 J_j 的提前、延误完工时间分别定义为：$E_j=\max\{0,d_j^1-C_j\}$，$T_j=\max\{0,C_j-d_j^2\}$，$j=1,\cdots,n$。工件 J_j 的交货期窗口开始和结束时间分别为 $d_j^1=p_j+q^1$，$d_j^2=p_j+q^2$。因此，工件 J_j 的交货期窗口为$[p_j+q^1,p_j+q^2]$。定义 D_j 为工件 J_j 的交货期窗口长度，$D_j=q^2-q^1=D$，$j=1,\cdots,n$。由此可以看出所有工件的交货期窗口长度都是相同的。需要确定工件的加工顺序、最优的维修位置和资源分配，以及极小化下面的总费用函数 $Z=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_j^1+\delta D_j)+g(u)$，其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 是相应目标函数的单位费用。$g(u)$是在给维修活动增加资源时带来的资源消耗费用，$g(u)$是连续单调递增函数，且 $g(0)=0$。对于固定的 L，只存在唯一的 u 使得 $g(u)-L\tau(u)$最小，定义为 $u^*=\operatorname{argmin}\{g(u)-L\tau(u)\}$，且 u^* 可以在常数时间内求出。

用三参数表示法将 2 个问题分别表示成：

$$1\,|\,\mathrm{tdcrm},(p_j,\theta_j p_j)\,|\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_j^1+\delta D_j)+g(u)1\,|\,\mathrm{pdcrm},(p_j,\theta_j p_j)\,|\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_j^1+\delta D_j)+g(u)。$$

2 依赖时间、资源的退化维修活动

下面讨论问题 $1\,|\,\mathrm{tdcrm},(p_j,\theta_j p_j)\,|\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_j^1+\delta D_j)+g(u)$。在此模型中，维修时间为 $t(s_{\mathrm{rm}},u)=t_0+\sigma s_{\mathrm{rm}}-\tau(u)$，目标函数为

$$Z=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_j^1+\delta D_j)+g(u)=\alpha\sum_{j=1}^{n}E_j+\beta\sum_{j=1}^{n}T_j+\gamma\sum_{j=1}^{n}d_j^1+n\delta(q^2-q^1)+g(u)。$$

Mosheiov 等人[14]、Mor 等人[12] 和 Wu 等人[15] 对多个交货期窗口的单机排序问题给出了一些性质。容易验证，本文讨论的问题依然具有这些性质。

性质 1　如果 $C_j\leqslant d_j^1$，则 $C_{j-1}\leqslant d_{j-1}^1$，$j=1,\cdots,n$；如果 $C_j\geqslant d_j^2$，则 $C_{j+1}\geqslant d_{j+1}^2$，$j=1,\cdots,n$。

性质 2　在最优排序 $\pi^*=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$中，有 $q^1=p_{[1]}+p_{[2]}+\cdots+p_{[k]}=\sum_{j=1}^{k}p_{[j]}$，$q^2=p_{[1]}+p_{[2]}+\cdots+p_{[l]}=\sum_{j=1}^{l}p_{[j]}$，$d_{[j]}^1=p_{[j]}+\sum_{j=1}^{k}p_{[j]}$，$d_{[j]}^2=p_{[j]}+\sum_{j=1}^{l}p_{[j]}$，其中 $k=\left\lfloor\frac{n(\delta-\gamma)}{\alpha}\right\rfloor$，$l=\left\lfloor\frac{n(\beta-\delta)}{\beta}\right\rfloor$。

性质 3　最优排序存在于以下几种情况：1）维修活动并未发生；2）维修活动发生在开始时间；3）维修活动发生在第 m 个位置，其中 $l\leqslant m<n$。

引理 1[16]　两个数量相等的序列，元素分别为 x_i 和 y_i，将两个序列按照相反（相同）的顺序进行排列可使得 $\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$ 最小（大）。

根据以上性质及引理，分 3 种情况讨论问题 $1\,|\,\mathrm{tdcrm},(p_j,\theta_j p_j)\,|\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_j^1+\delta D_j)+g(u)$，假设排序为 $\pi=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$。

1）维修并未发生。分别计算每部分的费用 $E_{[j]}=\max\{0,d_{[j]}^1-C_{[j]}\}$。

当 $j=1,\cdots,k$ 时,$E_{[j]}=d^1_{[j]}-C_{[j]}$;当 $j=k+1,\cdots,n$ 时,$E_{[j]}=0$,则有

$$\alpha\sum_{j=1}^{n}E_{[j]}=\alpha\sum_{j=1}^{k}(d^1_{[j]}-C_{[j]})=\alpha[(p_{[1]}+q^1)-p_{[1]}+(p_{[2]}+q^1)-p_{[1]}-p_{[2]}+(p_{[3]}+q^1)-p_{[1]}-p_{[2]}-p_{[3]}+\cdots+(p_{[k]}+q^1)-p_{[1]}-p_{[2]}-\cdots-p_{[k-1]}-p_{[k]}]=\alpha[q^1+(q^1-p_{[1]})+(q^1-p_{[1]}-p_{[2]})+(q^1-p_{[1]}-p_{[2]}-p_{[3]})+\cdots+(q^1-p_{[1]}-p_{[2]}-\cdots-p_{[k-1]})]=\alpha\sum_{j=1}^{k}jp_{[j]}。$$

当 $j=1,\cdots,l$ 时,$T_{[j]}=0$;当 $j=l+1,\cdots,n$ 时,$T_{[j]}=C_{[j]}-d^2_{[j]}$,则有

$$\beta\sum_{j=1}^{n}T_{[j]}=\beta\sum_{j=l+1}^{n}(C_{[j]}-d^2_{[j]})=\beta[(p_{[l+1]}+q^2)-(p_{[l+1]}+q^2)+(p_{[l+1]}+p_{[l+2]}+q^2)-(p_{[l+2]}+q^2)+\cdots+(p_{[l+1]}+p_{[l+2]}+p_{[l+3]}+\cdots+p_{[n-1]}+p_{[n]}+q^2)-(p_{[n]}+q^2)]=\beta[0+p_{[l+1]}+(p_{[l+1]}+p_{[l+2]})+\cdots+(p_{[l+1]}+p_{[l+2]}+\cdots+p_{[n-1]})]=\beta\sum_{j=l+1}^{n}(n-j)p_{[j]}。$$

$$\gamma\sum_{j=1}^{n}d^1_{[j]}=\gamma\sum_{j=1}^{n}(p_{[j]}+q^1)=\gamma\sum_{j=1}^{n}p_{[j]}+n\gamma\sum_{j=1}^{k}p_{[j]}=\gamma(n+1)\sum_{j=1}^{k}p_{[j]}+\gamma\sum_{j=k+1}^{n}p_{[j]},n\delta(q^2-q^1)=n\delta\sum_{j=k+1}^{l}p_{[j]},$$

$$Z=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d^1_j+\delta D_j)+g(u)=$$

$$\alpha\sum_{j=1}^{k}E_{[j]}+\beta\sum_{j=l+1}^{n}T_{[j]}+\gamma\sum_{j=1}^{n}d^1_{[j]}+n\delta(q^2-q^1)+g(u)=$$

$$\sum_{j=1}^{k}[\alpha j+\gamma(n+1)]p_{[j]}+\sum_{j=k+1}^{l}(n\delta+\gamma)p_{[j]}+\sum_{j=l+1}^{n}[\beta(n-j)+\gamma]p_{[j]}+g(0)=\sum_{j=1}^{n}W_jp_{[j]}。$$

其中,W_j 为赋予位置 j 的权 $W_j=\begin{cases}\alpha j+\gamma(n+1),j=1,\cdots,k\\ n\delta+\gamma,j=k+1,\cdots,l\\ \beta(n-j)+\gamma,j=l+1,\cdots,n\end{cases}$。

2)维修发生在开始时间。维修时间为 $t(m,u)=t_0+\sigma\cdot 0-\tau(u)=t_0-\tau(u)$,其中 $s_{\mathrm{rm}}=0$。

同理,分别计算每部分的费用得:

$$\alpha\sum_{j=1}^{n}E_{[j]}=\alpha\sum_{j=1}^{k}(d^1_{[j]}-C_{[j]})=\alpha[(\theta_{[1]}p_{[1]}+q^1)-\theta_{[1]}p_{[1]}+(\theta_{[2]}p_{[2]}+q^1)-\theta_{[1]}p_{[1]}-\theta_{[2]}p_{[2]}+(\theta_{[3]}p_{[3]}+q^1)-\theta_{[1]}p_{[1]}-\theta_{[2]}p_{[2]}-\theta_{[3]}p_{[3]}+\cdots+(\theta_{[k]}p_{[k]}+q^1)-\theta_{[1]}p_{[1]}-\theta_{[2]}p_{[2]}-\cdots-\theta_{[k]}p_{[k]}]=\alpha[q^1+(q^1-\theta_{[1]}p_{[1]})+(q^1-\theta_{[1]}p_{[1]}-\theta_{[2]}p_{[2]})+(q^1-\theta_{[1]}p_{[1]}-\theta_{[2]}p_{[2]}-\theta_{[3]}p_{[3]})+\cdots+(q^1-\theta_{[1]}p_{[1]}-\theta_{[2]}p_{[2]}-\cdots-\theta_{[k-1]}p_{[k-1]})]=\alpha\sum_{j=1}^{k}j\theta_{[j]}p_{[j]},$$

$$\beta\sum_{j=l+1}^{n}T_{[j]}=\beta\sum_{j=l+1}^{n}(C_{[j]}-d^2_{[j]})=\beta[(\theta_{[l+1]}p_{[l+1]}+q^2)-(\theta_{[l+1]}p_{[l+1]}+q^2)+(\theta_{[l+1]}p_{[l+1]}+\theta_{[l+2]}p_{[l+2]}+q^2)-(\theta_{[l+2]}p_{[l+2]}+q^2)+\cdots+(\theta_{[l+1]}p_{[l+1]}+\theta_{[l+2]}p_{[l+2]}+\theta_{[l+3]}p_{[l+3]}+\cdots+\theta_{[n-1]}p_{[n-1]}+\theta_{[n]}p_{[n]}+q^2)-(\theta_{[n]}p_{[n]}+q^2)]=\beta[\theta_{[l+1]}p_{[l+1]}+(\theta_{[l+1]}p_{[l+1]}+\theta_{[l+2]}p_{[l+2]})+\cdots+(\theta_{[l+1]}p_{[l+1]}+\theta_{[l+2]}p_{[l+2]}+\cdots+\theta_{[n-1]}p_{[n-1]})]=\beta\sum_{j=l+1}^{n}(n-j)\theta_{[j]}p_{[j]},$$

$$\gamma\sum_{j=1}^{n}d^1_{[j]}=\gamma\sum_{j=1}^{n}(\theta_{[j]}p_{[j]}+q^1)=\gamma\sum_{j=1}^{n}\theta_{[j]}p_{[j]}+n\gamma\sum_{j=1}^{k}\theta_{[j]}p_{[j]}+\gamma n(t_0-\tau(u))=$$

$$\gamma(n+1)\sum_{j=1}^{k}\theta_{[j]}p_{[j]}+\gamma\sum_{j=k+1}^{n}\theta_{[j]}p_{[j]}+\gamma n(t_0-\tau(u)),$$

$$n\delta(q^2-q^1)=n\delta\sum_{j=k+1}^{l}\theta_{[j]}p_{[j]},$$

$$Z=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d^1_j+\delta D_j)+g(u)=\alpha\sum_{j=1}^{k}E_{[j]}+\beta\sum_{j=l+1}^{n}T_{[j]}+\gamma\sum_{j=1}^{n}d^1_{[j]}+$$

$$n\delta(q^2-q^1)+g(u)=\sum_{j=1}^{k}[\alpha j+\gamma(n+1)]\theta_{[j]}p_{[j]}+\sum_{j=k+1}^{l}(n\delta+\gamma)\theta_{[j]}p_{[j]}+$$

$$\sum_{j=l+1}^{n}[\beta(n-j)+\gamma]\theta_{[j]}p_{[j]}+\gamma n(t_0-\tau(u))+g(u)=\sum_{j=1}^{n}W_j\theta_{[j]}p_{[j]}+G(u)。$$

其中 $W_j=\begin{cases}\alpha j+\gamma(n+1),j=1,\cdots,k\\ n\delta+\gamma,j=k+1,\cdots,l\\ \beta(n-j)+\gamma,j=l+1,\cdots,n\end{cases}$,$G(u)=\gamma n(t_0-\tau(u))+g(u)$。

3) 维修活动发生在第 m 个位置,其中 $l\leqslant m<n$。

$$\alpha\sum_{j=1}^{n}E_{[j]}=\alpha\sum_{j=1}^{k}(d_{[j]}^1-C_{[j]})=\alpha[(p_{[1]}+q^1)-p_{[1]}+(p_{[2]}+q^1)-p_{[1]}-p_{[2]}+(p_{[3]}+q^1)-p_{[1]}-p_{[2]}-p_{[3]}+\cdots+(p_{[k]}+q^1)-p_{[1]}-p_{[2]}-\cdots-p_{[k-1]}-p_{[k]}]=\alpha[q^1+(q^1-p_{[1]})+(q^1-p_{[1]}-p_{[2]})+(q^1-p_{[1]}-p_{[2]}-p_{[3]})+\cdots+(q^1-p_{[1]}-p_{[2]}-\cdots-p_{[k-1]})]=\alpha\sum_{j=1}^{k}jp_{[j]},$$

$$\beta\sum_{j=l+1}^{n}T_{[j]}=\beta\sum_{j=l+1}^{n}(C_{[j]}-d_{[j]}^2)=\beta[(p_{[l+1]}+q^2)-(p_{[l+1]}+q^2)+(p_{[l+1]}+p_{[l+2]}+q^2)-(p_{[l+2]}+q^2)+\cdots+(p_{[l+1]}+p_{[l+2]}+\cdots+p_{[m]}+q^2)-(p_{[m]}+q^2)+(p_{[l+1]}+p_{[l+2]}+\cdots+p_{[m]}+\theta_{[m+1]}p_{[m+1]}+t_0+\sigma s_{rm}-\tau(u)+q^2)-(\theta_{[m+1]}p_{[m+1]}+q^2)+\cdots+(p_{[l+1]}+p_{[l+2]}+p_{[l+3]}+\cdots+p_{[m]}+\theta_{[m+1]}p_{[m+1]}+\cdots+\theta_{[n]}p_{[n]}+t_0+\sigma s_{rm}-\tau(u)+q^2)-(\theta_{[n]}p_{[n]}+q^2)]=$$

$$\beta\left[\sum_{j=l+1}^{m}(n-j)p_{[j]}+\left(t_0+\sigma\sum_{j=1}^{m}p_{[j]}-\tau(u)\right)(n-m)+\sum_{j=m+1}^{n}(n-j)\theta_{[j]}p_{[j]}\right],$$

$$\gamma\sum_{j=1}^{n}d_{[j]}^1=\gamma\left(\sum_{j=1}^{m}p_{[j]}+\sum_{j=m+1}^{n}\theta_{[j]}p_{[j]}+n\sum_{j=1}^{k}p_{[j]}\right)=\gamma(n+1)\sum_{j=1}^{k}p_{[j]}+\gamma\sum_{j=k+1}^{m}p_{[j]}+\gamma\sum_{j=m+1}^{n}\theta_{[j]}p_{[j]},n\delta(q^2-q^1)=n\delta\sum_{j=k+1}^{l}p_{[j]},$$

$$Z=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_j^1+\delta D_j)+g(u)=\alpha\sum_{j=1}^{k}E_{[j]}+\beta\sum_{j=l+1}^{n}T_{[j]}+\gamma\sum_{j=1}^{n}d_{[j]}^1+n\delta(q^2-q^1)+g(u)=$$

$$\sum_{j=1}^{k}[\alpha j+\gamma(n+1)+\beta\cdot\sigma(n-m)]p_{[j]}+\sum_{j=k+1}^{l}(n\delta+\gamma+\beta\cdot\sigma(n-m))p_{[j]}+\sum_{j=l+1}^{m}[\beta(n-j)+\gamma+\beta\cdot\sigma(n-m)]p_{[j]}+\sum_{j=m+1}^{n}[\beta(n-j)+\gamma]\theta_{[j]}p_{[j]}+\beta(t_0-\tau(u))(n-m)+g(u)=\sum_{j=1}^{m}W_jp_{[j]}+\sum_{j=m+1}^{n}W_j\theta_{[j]}p_{[j]}+G(u)。$$

其中 $W_j=\begin{cases}\alpha j+\gamma(n+1)+\beta\cdot\sigma(n-m),j=1,\cdots,k\\ n\delta+\gamma+\beta\cdot\sigma(n-m),j=k+1,\cdots,l\\ \beta(n-j)+\gamma+\beta\cdot\sigma(n-m),j=l+1,\cdots,m\\ \beta(n-j)+\gamma,j=m+1,\cdots,n\end{cases}$,$G(u)=\beta(t_0-\tau(u))(n-m)+g(u)$。

情况 1) 可根据引理 1 将工件的加工时间 $p_{[j]}$ 与赋予位置的权 W_j 按照相反的顺序进行排列,得到的目标函数即为最小值。此时,计算复杂性为 $O(n\log n)$。情况 2) 可分为两部分进行考虑。第一部分 $\sum_{j=1}^{n}W_j\theta_{[j]}p_{[j]}$,根据引理 1 将工件的加工时间 $\theta_{[j]}p_{[j]}$ 与赋予位置的权 W_j 按照相反的顺序进行排列。第二部分 $G(u)$ 按照 $u^*=\arg\min\{\gamma n(t_0-\tau(u))+g(u)\}$ 计算出 u^*,从而获得 $G(u)$ 的最小值。经过两部分计算得到的目标函数即为最小值。此时,计算复杂性为 $O(n\log n)$。情况 3) 也可分为两部分进行考虑,将此问题的第一部分转化为指派问题 $Z^1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}v_{ij}\chi_{ij}$。可得 $v_{ij}=\begin{cases}[\alpha i+\gamma(n+1)+\beta\cdot\sigma(n-m)]p_j,j=1,\cdots,k\\ [n\delta+\gamma+\beta\cdot\sigma(n-m)]p_j,j=k+1,\cdots,l\\ [\beta(n-i)+\gamma+\beta\cdot\sigma(n-m)]p_j,j=l+1,\cdots,m\\ [\beta(n-i)+\gamma]\theta_jp_j,j=m+1,\cdots,n\end{cases}$,

$$\min Z^1=\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}v_{ij}\chi_{ij}$$

$$\text{s.t. }\sum_{i=1}^{n}\chi_{ij}=1,j=1,\cdots,n;\sum_{j=1}^{n}\chi_{ij}=1,i=1,\cdots,n;$$

$$\chi_{ij}\in\{0,1\},1\leqslant i,j\leqslant n。$$

定义变量 χ_{ij},如果工件 i 排在第 j 个位置上,则 $\chi_{ij}=1$;否则,$\chi_{ij}=0$。

对于第二部分 $G(u)$,按照 $u^*=\operatorname{argmin}\{\beta(t_0-\tau(u))(n-m)+g(u)\}$ 计算出 u^*,从而获得 $G(u)$ 的最小值。指派问题的计算复杂性为 $O(n^3)$,对于每一个可能维修的位置 $l+1,l+2,\cdots,n$,都要求解一个相应的指派问题,因此整个过程的计算复杂性为 $O(n^4)$。

基于以上讨论有定理 1。

定理 1 对于问题 $1|\mathrm{tdcrm},(p_j,\theta_jp_j)|\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_j^1+\delta D_j)+g(u)$,存在计算复杂性为 $O(n^4)$ 的多项式时间算法。

3 依赖位置、资源的退化维修活动

本节讨论问题 $1|\mathrm{pdcrm},(p_j,\theta_jp_j)|\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_j^1+\delta D_j)+g(u)$。在此模型中,维修时间为 $t(m,u)=t_0\varphi(m)-\tau(u)$,目标函数为

$$Z=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_j^1+\delta D_j)+g(u)=\alpha\sum_{j=1}^{n}E_j+\beta\sum_{j=1}^{n}T_j+\gamma\sum_{j=1}^{n}d_j^1+n\delta(q^2-q^1)+g(u)。$$

前面用到的性质与引理依然适用于本节研究的问题,与上一节类似,考虑以下 3 种情况。

1) 维修并未发生。

$$\alpha\sum_{j=1}^{n}E_{[j]}=\alpha\sum_{j=1}^{k}(d_{[j]}^1-C_{[j]})=\alpha[(p_{[1]}+q^1)-p_{[1]}+(p_{[2]}+q^1)-p_{[1]}-p_{[2]}+(p_{[3]}+q^1)-p_{[1]}-p_{[2]}-p_{[3]}+\cdots+(p_{[k]}+q^1)-p_{[1]}-p_{[2]}-\cdots-p_{[k-1]}-p_{[k]}]=\alpha[q^1+(q^1-p_{[1]})+(q^1-p_{[1]}-p_{[2]})+(q^1-p_{[1]}-p_{[2]}-p_{[3]})+\cdots+(q^1-p_{[1]}-p_{[2]}-\cdots-p_{[k-1]})]=\alpha\sum_{j=1}^{k}jp_{[j]},$$

$$\beta\sum_{j=1}^{n}T_{[j]}=\beta\sum_{j=l+1}^{n}(C_{[j]}-d_{[j]}^2)=\beta[(p_{[l+1]}+q^2)-(p_{[l+1]}+q^2)+(p_{[l+1]}+p_{[l+2]}+q^2)-(p_{[l+2]}+q^2)+\cdots+(p_{[l+1]}+p_{[l+2]}+p_{[l+3]}+\cdots+p_{[n-1]}+p_{[n]}+q^2)-(p_{[n]}+q^2)]=\beta[0+p_{[l+1]}+(p_{[l+1]}+p_{[l+2]})+\cdots+(p_{[l+1]}+p_{[l+2]}+\cdots+p_{[n-1]})]=\beta\sum_{j=l+1}^{n}(n-j)p_{[j]},$$

$$\gamma\sum_{j=1}^{n}d_{[j]}^1=\gamma\sum_{j=1}^{n}(p_{[j]}+q^1)=\gamma\sum_{j=1}^{n}p_{[j]}+n\gamma\sum_{j=1}^{k}p_{[j]}=\gamma(n+1)\sum_{j=1}^{k}p_{[j]}+\gamma\sum_{j=k+1}^{n}p_{[j]},$$

$$n\delta(q^2-q^1)=n\delta\sum_{j=k+1}^{l}p_{[j]},$$

$$Z=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_j^1+\delta D_j)+g(u)=\alpha\sum_{j=1}^{k}E_{[j]}+\beta\sum_{j=l+1}^{n}T_{[j]}+\gamma\sum_{j=1}^{n}d_{[j]}^1+n\delta(q^2-q^1)+g(u)=\sum_{j=1}^{k}[\alpha j+\gamma(n+1)]p_{[j]}+\sum_{j=k+1}^{l}(n\delta+\gamma)p_{[j]}+\sum_{j=l+1}^{n}[\beta(n-j)+\gamma]p_{[j]}+g(0)=\sum_{j=1}^{n}W_jp_{[j]}。$$

其中,$W_j=\begin{cases}\alpha j+\gamma(n+1),j=1,\cdots,k\\ n\delta+\gamma,j=k+1,\cdots,l\\ \beta(n-j)+\gamma,j=l+1,\cdots,n\end{cases}$。

2) 维修发生在开始时间。维修时间为 $t(m,u)=t_0\varphi(0)-\tau(u)=t_0-\tau(u)$,其中 $\varphi(0)=1$。

$$\alpha\sum_{j=1}^{n}E_{[j]}=\alpha\sum_{j=1}^{k}(d_{[j]}^1-C_{[j]})=\alpha[(\theta_{[1]}p_{[1]}+q^1)-\theta_{[1]}p_{[1]}+(\theta_{[2]}p_{[2]}+q^1)-\theta_{[1]}p_{[1]}-\theta_{[2]}p_{[2]}+$$

$$(\theta_{[3]}p_{[3]}+q^1)-\theta_{[1]}p_{[1]}-\theta_{[2]}p_{[2]}-\theta_{[3]}p_{[3]}+\cdots+(\theta_{[k]}p_{[k]}+q^1)-\theta_{[1]}p_{[1]}-\theta_{[2]}p_{[2]}-\cdots-\theta_{[k]}p_{[k]}]=$$
$$\alpha[q^1+(q^1-\theta_{[1]}p_{[1]})+(q^1-\theta_{[1]}p_{[1]}-\theta_{[2]}p_{[2]})+(q^1-\theta_{[1]}p_{[1]}-\theta_{[2]}p_{[2]}-\theta_{[3]}p_{[3]})+\cdots+$$
$$(q^1-\theta_{[1]}p_{[1]}-\theta_{[2]}p_{[2]}-\cdots-\theta_{[k-1]}p_{[k-1]})]=\alpha\sum_{j=1}^{k}j\theta_{[j]}p_{[j]},$$

$$\beta\sum_{j=1}^{n}T_{[j]}=\beta\sum_{j=l+1}^{n}(C_{[j]}-d^2_{[j]})=\beta[(\theta_{[l+1]}p_{[l+1]}+q^2)-(\theta_{[l+1]}p_{[l+1]}+q^2)+(\theta_{[l+1]}p_{[l+1]}+\theta_{[l+2]}p_{[l+2]}+q^2)-$$
$$(\theta_{[l+2]}p_{[l+2]}+q^2)+\cdots+(\theta_{[l+1]}p_{[l+1]}+\theta_{[l+2]}p_{[l+2]}+\theta_{[l+3]}p_{[l+3]}+\cdots+\theta_{[n-1]}p_{[n-1]}+\theta_{[n]}p_{[n]}+q^2)-$$
$$(\theta_{[n]}p_{[n]}+q^2)]=\beta[\theta_{[l+1]}p_{[l+1]}+(\theta_{[l+1]}p_{[l+1]}+\theta_{[l+2]}p_{[l+2]})+\cdots+$$
$$(\theta_{[l+1]}p_{[l+1]}+\theta_{[l+2]}p_{[l+2]}+\cdots+\theta_{[n-1]}p_{[n-1]})]=\beta\sum_{j=l+1}^{n}(n-j)\theta_{[j]}p_{[j]},$$

$$\gamma\sum_{j=1}^{n}d^1_{[j]}=\gamma\sum_{j=1}^{n}(\theta_{[j]}p_{[j]}+q^1)=\gamma\sum_{j=1}^{n}\theta_{[j]}p_{[j]}+n\cdot\gamma\sum_{j=1}^{k}\theta_{[j]}p_{[j]}+\gamma\cdot n(t_0-\tau(u))=$$
$$\gamma(n+1)\sum_{j=1}^{k}\theta_{[j]}p_{[j]}+\gamma\sum_{j=k+1}^{n}\theta_{[j]}p_{[j]}+\gamma\cdot n(t_0-\tau(u)),$$

$$n\delta(q^2-q^1)=n\delta\sum_{j=k+1}^{l}\theta_{[j]}p_{[j]},$$

$$Z=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d^1_j+\delta D_j)+g(u)=\alpha\sum_{j=1}^{k}E_{[j]}+\beta\sum_{j=l+1}^{n}T_{[j]}+\gamma\sum_{j=1}^{n}d^1_{[j]}+n\delta(q^2-q^1)+g(u)=$$
$$\sum_{j=1}^{k}[\alpha j+\gamma(n+1)]\theta_{[j]}p_{[j]}+\sum_{j=k+1}^{l}(n\delta+\gamma)\theta_{[j]}p_{[j]}+\sum_{j=l+1}^{n}[\beta(n-j)+\gamma]\theta_{[j]}p_{[j]}+$$
$$\gamma n(t_0-\tau(u))+g(u)=\sum_{j=1}^{n}W_j\theta_{[j]}p_{[j]}+G(u)。$$

其中,$W_j=\begin{cases}\alpha j+\gamma(n+1),j=1,\cdots,k\\ n\delta+\gamma,j=k+1,\cdots,l\\ \beta(n-j)+\gamma,j=l+1,\cdots,n\end{cases}$,$G(u)=\gamma n(t_0-\tau(u))+g(u)$。

3）维修活动发生在第 m 个位置,其中 $l\leqslant m<n$。维修时间为 $t(m,u)=t_0\varphi(m)-\tau(u)$。

$$\alpha\sum_{j=1}^{n}E_{[j]}=\alpha\sum_{j=1}^{k}(d^1_{[j]}-C_{[j]})=\alpha[(p_{[1]}+q^1)-p_{[1]}+(p_{[2]}+q^1)-p_{[1]}-p_{[2]}+(p_{[3]}+q^1)-$$
$$p_{[1]}-p_{[2]}-p_{[3]}+\cdots+(p_{[k]}+q^1)-p_{[1]}-p_{[2]}-\cdots-p_{[k-1]}-p_{[k]}]=\alpha[q^1+(q^1-p_{[1]})+$$
$$(q^1-p_{[1]}-p_{[2]})+(q^1-p_{[1]}-p_{[2]}-p_{[3]})+\cdots+(q^1-p_{[1]}-p_{[2]}-\cdots-p_{[k-1]})]=\alpha\sum_{j=1}^{k}jp_{[j]}。$$

$$\beta\sum_{j=1}^{n}T_{[j]}=\beta\sum_{j=l+1}^{n}(C_{[j]}-d^2_{[j]})=\beta\left[\sum_{j=l+1}^{m}(n-j)p_{[j]}+(t_0\varphi(m)-\tau(u))(n-m)+\sum_{j=m+1}^{n}(n-j)\theta_{[j]}p_{[j]}\right],$$

$$\gamma\sum_{j=1}^{n}d^1_{[j]}=\gamma\left(\sum_{j=1}^{m}p_{[j]}+\sum_{j=m+1}^{n}\theta_{[j]}p_{[j]}+n\sum_{j=1}^{k}p_{[j]}\right)=\gamma(n+1)\sum_{j=1}^{k}p_{[j]}+\gamma\sum_{j=k+1}^{m}p_{[j]}+\gamma\sum_{j=m+1}^{n}\theta_{[j]}p_{[j]},$$

$$n\delta(q^2-q^1)=n\delta\sum_{j=k+1}^{l}p_{[j]},$$

$$Z=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d^1_j+\delta D_j)+g(u)=\alpha\sum_{j=1}^{k}E_{[j]}+\beta\sum_{j=l+1}^{n}T_{[j]}+\gamma\sum_{j=1}^{n}d^1_{[j]}+n\delta(q^2-q^1)+g(u)=$$
$$\sum_{j=1}^{k}[\alpha j+\gamma(n+1)]p_j+\sum_{j=k+1}^{l}(n\delta+\gamma)p_{[j]}+\sum_{j=l+1}^{m}[\gamma+\beta(n-j)]p_{[j]}+\sum_{j=m+1}^{n}[\beta(n-j)+\gamma]\theta_{[j]}p_{[j]}+$$
$$\beta(t_0\varphi(m)-\tau(u))(n-m)+g(u)=\sum_{j=1}^{m}W_jp_{[j]}+\sum_{j=m+1}^{n}W_j\theta_{[j]}p_{[j]}+G(u)。$$

其中,$W_j=\begin{cases}\alpha j+\gamma(n+1),j=1,\cdots,k\\ n\delta+\gamma,j=k+1,\cdots,l\\ \beta(n-j)+\gamma,j=l+1,\cdots,n\end{cases}$,$G(u)=\beta(t_0\varphi(m)-\tau(u))(n-m)+g(u)$。

情况1)和情况2)分别与上一节相同,因此,计算复杂度为$O(n\log n)$。情况3)依据前面的讨论,可将此问题的第一部分转化为指派问题$Z^1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}v_{ij}\chi_{ij}$,可得$v_{ij}=\begin{cases}[\alpha i+\gamma(n+1)]p_j, j=1,\cdots,k\\ [n\delta+\gamma]p_j, j=k+1,\cdots,l\\ [\beta(n-i)+\gamma]p_j, j=l+1,\cdots,m\\ [\beta(n-i)+\gamma]\theta_j p_j, j=m+1,\cdots,n\end{cases}$,

$$\min Z^1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}v_{ij}\chi_{ij}$$

$$\text{s.t. }\sum_{i=1}^{n}\chi_{ij}=1, j=1,\cdots,n;\sum_{j=1}^{n}\chi_{ij}=1, i=1,\cdots,n。$$

定义变量χ_{ij},如果工件i排在第j个位置上,则$\chi_{ij}=1$;否则,$\chi_{ij}=0$。

对于第二部分$G(u)$,依然按照$u^*=\mathrm{argmin}\{\beta(t_0\varphi(m)-\tau(u))(n-m)+g(u)\}$计算出$u^*$,从而获得$G(u)$的最小值。整个过程的计算复杂度与上一节的情况3相同,为$O(n^4)$。

基于前面的讨论有以下结论。

定理2 对于问题$1|\mathrm{pdcrm},(p_j,\theta_j p_j)|\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_j^1+\delta D_j)+g(u)$,存在计算复杂性为$O(n^4)$的多项式时间算法。

4 结论

本文讨论了依赖时间、资源的维修活动和依赖位置、资源的维修活动及交货期窗口的单机排序问题。需要确定最佳维修位置、工件加工顺序、资源分配和极小化提前完工费用、延误完工费用、交货期窗口开始时间费用、交货期窗口大小费用及相应的资源函数费用之和。分别从3种不同的维修位置进行了计算、分析,证明了这些问题在多项式时间内是可解的。进一步的研究可以考虑其他单机问题或平行机问题。

参考文献:

[1] CHENG T C E,YANG S J,YANG D L.Common due-window assignment and scheduling of linear time-dependent deteriorating jobs and a deteriorating maintenance activity[J].International Journal of Production Economics,2012,135(1):154-161.

[2] YANG S J,YANG D L,YANG Q Y,et al. Single-machine due window assignment and scheduling with job-dependent aging effects and deteriorating maintenance activities[J]. Computers & Operations Research,2010,37(8):1510-1514.

[3] RUSTOGI K,STRUSEVICH V A.Single-machine scheduling with general positional deterioration and rate-modifying maintenance[J].Omega,2012,40(6):791-804.

[4] RUSTOGI K,STRUSEVICH V A.Combining time and position dependent effects on a single machine subject to rate-modifying activities[J].Omega,2014,42(1):166-178.

[5] LUO W C,CHENG T C E,JI M.Single-machine scheduling with a variable maintenance activity[J].Computers & Industrial Engineering,2015,79:168-174.

[6] LIMAN S D,PANWALKER S S,THONGMEE S.Common due window size and location determination in a single machine scheduling problem[J].Journal of the Operational Research Society,1998,49(9):1007-1010.

[7] ZHAO C L,TANG H Y.A note to due-window assignment and single machine scheduling with deteriorating jobs and a rate-modifying activity[J].Computers & Operations Research,2012,39(6):1300-1303.

[8] MOSHEIOV G,SARIG A.Scheduling a maintenance activity and due-window assignment on a single machine[J].Computers & Operations Research,2009,36(9):2541-2762.

[9] WANG J B,WANG M Z.Single-machine due-window assignment and scheduling with learning effect and resource-dependent processing times[J].Asia Pacific Journal of Operational Research,2014,31(5):1450036.

[10] YANG D L,LAI C J,YANG S J.Scheduling problems with multiple due windows assignment and controllable processing times on a single machine[J].International Journal of Production Economics,2014,150:96-103.

[11] YIN Y Q,CHENG T C E,WU C C,et al.Single-machine due window assignment and scheduling with a common flow allowance and controllable job processing time[J].Journal of the Operational Research Society,2014,65(1):1-13.

[12] MOR B,MOSHEIOV G.Scheduling a deteriorating main-

tenance activity and due-window assignment[J]. Computers & Operations Research, 2015, 57: 33-40.

[13] ZHU H, LI M, ZHOU Z J. Machine scheduling with deteriorating and resource-dependent maintenance activity[J]. Computers & Industrial Engineering, 2015, 88: 479-486.

[14] MOSHEIOV G, ORON D. Job-dependent due-window assignment based on a common flow allowance[J]. Foundations of Computing and Decision Sciences, 2010, 35(3): 185-195.

[15] WU Y B, WAN L, WANG X Y. Study on due-window assignment scheduling based on common flow allowance[J]. International Journal of Production Economics, 2015, 165: 155-157.

[16] LITTLEWOOD G H, POLY J E, HARDY G. Inequalities[M]. London: Cambridge University Press, 1934.

Operations Research and Cybernetics

Single Machine Scheduling Maintenance Activity and Due-window Assignment

ZHANG Lei, ZHAO Chuanli

(School of Mathematics and System Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China)

Abstract: [**Purposes**]It considers single-machine scheduling a deteriorating maintenance activity and due-window assignment. This class of problems has a wide range of practical applications. Each job has its own due-window. If the job is completed outside the due-window, it would be penalized according to its earliness or tardiness value. Therefore, it is very important to determine the position of due-window. [**Methods**]There are two models. In the first model, the time of maintenance activity depends on its starting time and resource. In the second model, the time of maintenance activity depends on its position and resource. According to each position of maintenance activity, problems are converted into assignment problem. [**Findings**]For these problems, it provides polynomial time algorithms which can be solved in $O(n^4)$. [**Conclusions**]And it proves that the problem can be solved in polynomial time.

Keywords: scheduling; single machine; deteriorating maintenance; due-window; polynomial time

(责任编辑　黄　颖)