DOI:10.11721/cqnuj20170305

N(2,2,0)代数的(λ,μ)-反模糊子代数*

王 丰 效
(喀什大学 数学与统计学院,新疆 喀什 844000)

摘要:【目的】模糊子代数是模糊代数的一个重要研究内容。为了解 N(2,2,0)代数的模糊结构,在 N(2,2,0)代数中引入了(λ, μ)反模糊子代数概念。【方法】利用模糊集的相关理论和性质,讨论了 N(2,2,0)代数的(λ, μ)反模糊子代数的若干性质。【结果】证明了 N(2,2,0)代数的(λ, μ)反模糊子代数的并,同态像以及反直积也是(λ, μ)反模糊子代数。【结论】相关的研究结果丰富了 N(2,2,0)代数的模糊理论。

关键词:N(2,2,0)代数;(λ, μ)反模糊子代数;反直积;同态

中图分类号:O159　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2017)03-0054-04

利用代数学方法来研究非经典逻辑已受到越来越多的学者关注。文献[1]从代数学的角度对蕴涵代数的模糊蕴涵算子进行了必要的抽象,得到了一类 N(2,2,0)代数结构。文献[2]又引入了 N(2,2,0)代数的子代数概念。围绕 N(2,2,0)代数结构,诸多学者从不同的角度得到了 N(2,2,0)代数子代数的性质[3-8]。1965 年, Zadeh 提出了模糊集的概念和理论[9]。1971 年, Rosenfeld 给出了模糊子群的概念[10],使得模糊代数的研究成为一个新的研究领域。随后模糊集的相关理论被广泛应用于各类代数系统和代数结构,并取得了大量的研究成果。文献[11]讨论了布尔代数的(λ, μ) 模糊子代数及相关的性质,文献[12-13]讨论了布尔代数的(λ, μ)反模糊子代数及相关的性质。本研究将(λ, μ)模糊集应用于 N(2,2,0)代数,给出了 N(2,2,0)代数的(λ, μ)反模糊子代数的概念,并讨论了相关性质,为 N(2,2,0)代数的深入研究奠定了基础。

为讨论问题方便,下面先给出一些相关的概念。

定义 1[1]　假设 S 是含有 0 元素的一个集合。在 S 中定义两个二元运算 $*$ 和 Δ, 若对 $\forall x,y,z\in S$,都有:1) $x*(y\Delta z)=z*(x*y)$;2) $(x\Delta y)*z=y*(x*z)$;3) $0*x=x$。则称$(S,*,\Delta,0)$是一个 N(2,2,0)代数,简称 S 是一个 N(2,2,0)代数。

为了以下讨论方便,约定 S 表示 N(2,2,0)代数$(S,*,\Delta,0)$。

定义 2[2]　设 Q 是 S 的子集,若对 $\forall x,y,z\in S$,都有:1) $0\in Q$;2) 由 $\forall x,y\in S$,可推出 $x*y\in Q$, $y\Delta x\in Q$。则称 Q 是 S 上的一个子代数。

引理 1　Q 是 S 上的一个子代数当且仅当 $0\in Q$ 且 $\forall x,y\in S$, $x*y\in Q$。

1 N(2,2,0)代数的(λ, μ)反模糊子代数

定义 3　设 A 是 S 上的模糊子集,若 $\forall x,y\in S$, $0\leqslant\lambda<\mu\leqslant 1$,都有:1) $A(0)\wedge\mu\leqslant A(x)\vee\lambda$;2) $A(x*y)\wedge\mu\leqslant A(x)\vee A(y)\vee\lambda$;3) $A(x\Delta y)\wedge\mu\leqslant A(x)\vee A(y)\vee\lambda$。则称 A 是 S 的(λ, μ)反模糊子代数。

注意到 N(2,2,0)代数满足 $x*y=y\Delta x$, 从而定义 3 中的 2)和 3)等价。故 S 上的模糊集A 是 (λ, μ)反模糊子代数的充要条件是 1)和 2)成立, 或 1)和 3)成立。

定义 4　设 A 是 S 上的模糊集, $A_t=\{x\mid A(x)\leqslant t,x\in S\}$,称 A_t 为 A 的 t 水平的下截集。类似地,称 $\widetilde{A}_t=\{x\mid A(x)<t,x\in S\}$为 A 的 t 强水平的下截集。

下面的定理 1 给出了 N(2,2,0)代数的(λ, μ)反模糊子代数与子代数的关系。

* 收稿日期:2015-11-18　　修回日期:2016-09-22　　网络出版时间:2017-05-02　17:25
资助项目:广东省科技计划项目(No.2014A020209087);喀什大学高层次人才项目(No.GCC15ZK-007)
第一作者简介:王丰效,男,教授,研究方向为模糊代数、应用统计,E-mail:fxw-hz@126.com
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170502.1725.040.html

定理 1　若 A 是 S 的(λ,μ)反模糊子代数，如果$\forall t\in[\lambda,\mu)$，$A_t=\{x\mid A(x)\leqslant t,x\in S\}$非空，则 A_t 是 S 的子代数。

证明　$\forall t\in[\lambda,\mu)$，由于 $A_t=\{x\mid A(x)\leqslant t,x\in S\}$非空，所以存在 $x_0\in A_t$，使得 $A(x_0)\leqslant t$。又因为 A 是 S 的(λ,μ)反模糊子代数，从而$\forall x\in S$ 有 $A(0)\wedge\mu\leqslant A(x)\vee\lambda$，因此 $A(0)\wedge\mu\leqslant A(x_0)\vee\lambda\leqslant t\vee\lambda=t$，又由于 $\lambda\leqslant t<\mu$，所以 $A(0)\leqslant t$，即 $0\in A_t$。另外，如果 $x\in A_t$，$y\in A_t$，则 $A(x)\leqslant t$，$A(y)\leqslant t$，且 $A(x*y)\wedge\mu\leqslant A(x)\vee A(y)\vee\lambda\leqslant t\vee t\vee\lambda=t$。这表明 $A(x*y)\leqslant t$，即 $x*y\in A_t$。故 A_t 是 S 的子代数。　　证毕

定理 2　若 A 是 S 的模糊子集，如果$\forall t\in[\lambda,\mu)$，$A_t=\{x\mid A(x)\leqslant t,x\in S\}$非空，且 A_t 是 S 的子代数，则 A 是 S 的(λ,μ)反模糊子代数。

证明　假定存在 $x_0\in S$ 使得 $A(0)\wedge\mu>A(x_0)\vee\lambda$。取 $t=A(x_0)\vee\lambda$，则 $A(x_0)\leqslant t$，并且 $A(0)>t$，$\lambda\leqslant t<\mu$。因为 $A_t=\{x\mid A(x)\leqslant t,x\in S\}$非空，且 A_t 是 S 的子代数，从而 $0\in A_t$，即 $A(0)\leqslant t$ 与 $A(0)>t$ 矛盾，所以对任意 $x\in S$ 有 $A(0)\wedge\mu\leqslant A(x)\vee\lambda$。

假定存在 $x_0,y_0\in S$ 使得 $A(x_0*y_0)\wedge\mu>A(x_0)\vee A(y_0)\vee\lambda$ 成立，取 $t=A(x_0)\vee A(y_0)\vee\lambda$，则有 $A(x_0)\leqslant t$，$A(y_0)\leqslant t$，$A(x_0*y_0)\wedge\mu>t$，即 $A(x_0*y_0)>t$。因 $x_0,y_0\in A_t$，且 A_t 是 S 的子代数，从而 $x_0*y_0\in A_t$。这与 $A(x_0*y_0)>t$ 矛盾。故对于任意 $x,y\in S$ 有 $A(x*y)\wedge\mu\leqslant A(x)\vee A(y)\vee\lambda$。

综上，由定义 3 可知 A 是 S 的(λ,μ)反模糊子代数。　　证毕

定理 3　A 是 S 的模糊子集，如果$\forall t\in[\lambda,\mu)$，$\widetilde{A}_t=\{x\mid A(x)<t,x\in S\}$非空，则 A 是 S 的(λ,μ)反模糊子代数的充要条件是 $\widetilde{A}_t$ 是 S 的子代数。

下面讨论 S 的(λ,μ)反模糊子代数的并的相关性质。

定义 5　设 A 和 B 是 S 的模糊集，对$\forall x\in S$，称$(A\cup B)(x)=A(x)\vee B(x)$为 A 和 B 的并。

定理 4　若 A 和 B 都是 S 的(λ,μ)反模糊子代数，则 $A\cup B$ 也是 S 的(λ,μ)反模糊子代数。

证明　因为 A 和 B 都是 S 的(λ,μ)反模糊子代数，所以$\forall x,y\in S$，$0\leqslant\lambda<\mu\leqslant 1$，都有

$$A(0)\wedge\mu\leqslant A(x)\vee\lambda,A(x*y)\wedge\mu\leqslant A(x)\vee A(y)\vee\lambda;$$

$$B(0)\wedge\mu\leqslant B(x)\vee\lambda,B(x*y)\wedge\mu\leqslant B(x)\vee B(y)\vee\lambda。$$

于是

$$(A\cup B)(x)\vee\lambda=A(x)\vee B(x)\vee\lambda=(A(x)\vee\lambda)\vee(B(x)\vee\lambda)\geq(A(0)\wedge\mu)\vee(B(0)\wedge\mu)=(A(0)\vee B(0))\wedge\mu=A\cup B(0)\wedge\mu,$$

$$(A\cup B)(x*y)\wedge\mu=A(x*y)\vee B(x*y)\wedge\mu=(A(x*y)\wedge\mu)\vee(B(x*y)\wedge\mu)\leqslant(A(x)\vee A(y)\vee\lambda)\vee(B(x)\vee B(y)\vee\lambda)=(A(x)\vee B(x))\vee(A(y)\vee B(y))\vee\lambda=(A\cup B)(x)\vee(A\cup B)(y)\vee\lambda。$$

即 $A\cup B$ 是 S 的(λ,μ)反模糊子代数。　　证毕

推论 1　若 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$是 S 的(λ,μ)反模糊子代数，则 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 也是 S 的(λ,μ)反模糊子代数。

2 N(2,2,0)代数的(λ,μ)反模糊子代数

定理 5　假设 S_1，S_2 是两个 N(2,2,0)代数，$f:S_1\to S_2$ 为同态映射且 $f(0)=0$。A 是 S_1 的(λ,μ)反模糊子代数，则 $f(A)$是 S_2 的(λ,μ)反模糊子代数。其中 $f(A)(y)=\inf\{A(x)\mid f(x)=y\}$。

证明　$\forall y_1,y_2\in S_2$，由于 $f:S_1\to S_2$ 为同态映射，从而存在 $x_1,x_2\in S_1$ 使得 $f(x_1)=y_1$，$f(x_2)=y_2$。于是对于 $0\leqslant\lambda<\mu\leqslant 1$ 有：

$$f(A)(y_1*y_2)\wedge\mu=\inf\{A(x)\mid f(x)=y_1*y_2\}\wedge\mu=\inf\{A(x_1*x_2)\mid f(x_1*x_2)=y_1*y_2\}\wedge\mu=\inf\{A(x_1*x_2)\wedge\mu\mid f(x_1)*f(x_2)=y_1*y_2\}\leqslant\inf\{A(x_1)\vee A(x_2)\vee\lambda\mid f(x_1)*f(x_2)=y_1*y_2\}\leqslant\inf\{A(x_1)\vee\lambda\mid f(x_1)=y_1\}\vee\inf\{A(x_2)\vee\lambda\mid f(x_2)=y_2\}=\inf\{A(x_1)\mid f(x_1)=y_1\}\vee\inf\{A(x_2)\mid f(x_2)=y_2\}\vee\lambda=f(A)(y_1)\vee f(A)(y_2)\vee\lambda。$$

另外,对于任意的 $y\in S_2$

$$f(A)(y)\vee\lambda=\inf\{A(x)\mid f(x)=y\}\vee\lambda=\inf\{A(x)\vee\lambda\mid f(x)=y\}\geqslant$$
$$\inf\{A(0)\wedge\mu\mid f(x)=0\}=\inf\{A(0)\mid f(x)=0\}\wedge\mu=f(A)(0)\wedge\mu。$$

故 $f(A)$ 是 S_2 的 (λ,μ) 反模糊子代数。 证毕

定理 6 假设 S_1,S_2 是两个 N(2,2,0) 代数,$f:S_1\to S_2$ 为同态映射且 $f(0)=0$。B 是 S_2 的 (λ,μ) 反模糊子代数,则 $f^{-1}(B)$ 是 S_1 的 (λ,μ) 反模糊子代数。其中 $f^{-1}(B)(x)=B(f(x)),x\in S_1$。

证明 $\forall x_1,y_1\in S_1$,由于 $f:S_1\to S_2$ 为同态映射,且 B 是 S_2 的 (λ,μ) 反模糊子代数,因此,

$$f^{-1}(B)(x_1*y_1)\wedge\mu=B(f(x_1*y_1))\wedge\mu=B(f(x_1)*f(y_1))\wedge\mu\leqslant$$
$$B(f(x_1))\vee B(f(y_1))\vee\lambda=f^{-1}(B(x_1))\vee f^{-1}(B(y_1))\vee\lambda。$$

又对于 $x\in S_1$,由 B 是 S_2 的 (λ,μ) 反模糊子代数可得

$$f^{-1}(B)(0)\wedge\mu=B(f(0))\wedge\mu\leqslant B(f(x))\vee\lambda=f^{-1}(B)(x)\vee\lambda。$$

综上可知,$f^{-1}(B)$ 是 S_1 的 (λ,μ) 反模糊子代数。 证毕

定义 6 若 A 和 B 分别是非空集合 S_1 和 S_2 的模糊子集,对任意的 $(x,y)\in S_1\times S_2$,定义映射 $A\otimes B:S_1\times S_2\to[0,1]$ 为:$(A\otimes B)(x,y)=A(x)\vee B(y)$,则 $A\otimes B$ 是 $S_1\times S_2$ 的模糊子集,并称 $A\otimes B$ 为模糊集 A 和 B 的反直积。

定理 7 假设 A,B 分别是 N(2,2,0) 代数 S_1,S_2 的 (λ,μ) 反模糊子代数,则 $A\otimes B$ 是 N(2,2,0) 代数 $S_1\times S_2$ 的 (λ,μ) 反模糊子代数。这里规定 $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in S_1\times S_2,(x_1,y_1)*(x_2,y_2)=(x_1*x_2,y_1*y_2)$,$(x_1,y_1)\Delta(x_2,y_2)=(x_1\Delta x_2,y_1\Delta y_2)$。

证明 对任意 $(x,y)\in S_1\times S_2$,由于 A,B 分别是 S_1,S_2 的 (λ,μ) 反模糊子代数,从而可得:

$$(A\otimes B)(0,0)\wedge\mu=(A(0)\vee B(0))\wedge\mu=(A(0)\wedge\mu)\vee(B(0)\wedge\mu)\leqslant$$
$$(A(x)\vee\lambda)\vee(B(y)\vee\lambda)=(A(x)\vee B(y))\vee\lambda=(A\otimes B)(x,y)\vee\lambda。$$

对 $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in S_1\times S_2$,由于 A 和 B 分别是 N(2,2,0) 代数 S_1,S_2 的模糊子代数,因而有:

$$A(x_1*x_2)\wedge\mu\leqslant A(x_1)\vee A(x_2)\vee\lambda,B(y_1*y_2)\wedge\mu\leqslant B(y_1)\vee B(y_2)\vee\lambda,$$
$$(A\otimes B)((x_1,y_1)*(x_2,y_2))\wedge\mu=(A\otimes B)(x_1*x_2,y_1*y_2)\wedge\mu=$$
$$(A(x_1*x_2)\vee B(y_1*y_2))\wedge\mu=(A(x_1*x_2)\wedge\mu)\vee(B(y_1*y_2)\wedge\mu)\leqslant$$
$$(A(x_1)\vee A(x_2)\vee\lambda)\vee(B(y_1)\vee B(y_2)\vee\lambda)=(A\otimes B)(x_1,y_1)\vee(A\times B)(x_2,y_2)\vee\lambda。$$

因此,$A\otimes B$ 是 $S_1\times S_2$ 的模糊子代数。 证毕

参考文献:

[1] 邓方安,徐扬.关于 N(2,2,0) 代数[J].西南交通大学学报,1996,31(4):457-463.

DENG F A,XU Y.On N(2,2,0) algebras[J].Journal of Southwest Jiaotong University,1996,31(4):457-463.

[2] 邓方安,徐扬,袁俭.N(2,2,0) 代数的理想与关联理想[J].喀什师范学院学报,1998,16(1):6-9.

DENG F A,XU Y,YUAN J.Ideal and relevant ideal of N(2,2,0) algebra[J].Journal of Hanzhong Teachers College,1998,16(1):6-9.

[3] 李旭东.N(2,2,0) 代数中平移变换的像与逆像[J].数学研究与评论,2005,25(1):148-153.

LI X D.Image and converse image of translation transform of N(2,2,0) algebra[J].Journal of Mathematical Research and Exposition,2005,25(1):148-153.

[4] 李旭东.N(2,2,0) 代数的两类同余分解[J].兰州大学学报(自然科学版),2005,4l(5):120-122.

LI X D.Two classes congruence decomposition on N(2,2,0) algebras[J].Journal of Lanzhou University(Natural Science),2005,4l(5):120-122.

[5] 李旭东,宋雪梅.N(2,2,0) 代数的另一个同余分解[J].西北师范大学学报(自然科学版),2010,46(6):23-29.

LI X D,SONG X M.Another congruence decomposition on N(2,2,0) algebras[J].Journal of Northwest Normal University(Natural Science),2010,46(6):23-29.

[6] 邓方安.N(2,2,0) 代数的 RC 半群[J].山东大学学报(理学版),2011,46(1):8-11.

DENG F A. RC-semigroups of N(2,2,0) algebra[J]. Journal of Shandong University(Natural Science),2011,46(1):

8-11.

[7] 陈露.关于 N(2,2,0)代数的中间幂等元[J].纯粹数学与应用数学,2011,27(4):433-436.
CHEN L.Medial idempotents of N(2,2,0) algebra[J].Pure and Applied Mathematics,2011,27(4):433-436.

[8] 邓方安,雍龙泉.N(2,2,0)代数的正则半群[J].数学进展,2012,41(6):665-671.
DENG F A,YONG L Q.Regular semigroups of N(2,2,0) algebra[J].Advances in Mathematics,2012,41(6):665-671.

[9] ZADEH L A.Fuzzy sets[J].Information and Control,1965(8):338-353.

[10] ROSENFELD A. Fuzzy groups[J].Journal of Mathematical Analysis and Applications,1971(35):512-517.

[11] 王丰效.布尔代数的(λ,μ)模糊子代数[J].高校应用数学学报(A 辑),2011,26(4):495-500.
WANG F X.On (λ,μ)-fuzzy subalgebras in Boolean algebras[J].Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities (Ser A),2011,26(4):495-500.

[12] 刘卫锋.布尔代数的(λ,μ)-反模糊子代数[J].华中师范大学学报(自然科学版),2014,48(1):21-24.
LIU W F.(λ,μ)-anti-fuzzy subalgebras of Boolean algebra[J].Journal of Huazhong Normal University (Natural Sciences),2014,48(1):21-24.

[13] 许宏伟,刘卫锋.布尔代数的 I-V 模糊子代数[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2014,31(4):82-86.
XU H W,LIU W F. I-V Fuzzy subalgebras of Boolean algebras[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2014,31(4):82-86.

(λ, μ) Anti-fuzzy Subalgebra of N(2,2,0) Algebra

WANG Fengxiao

(College of Mathematics and Statistics, Kashigar University, Kashi Xinjiang 844000, China)

Abstract: [**Purposes**]Fuzzy sub-algebra is an important field in the study of fuzzy algebra. In order to understand the properties of fuzzy structure of N(2,2,0)-algebra, the concept of (λ,μ) anti-fuzzy sub-algebra of N(2,2,0)-algebra is introduced. [**Methods**] Based on the theory and properties of fuzzy sets, the related properties of (λ,μ) anti-fuzzy sub-algebra in N(2,2,0)-algebra are discussed. [**Findings**]Furthermore, it is proved that the intersection and homomorphism images and anti-direct product in N(2,2,0)-algebra of (λ,μ) anti-fuzzy sub-algebra are also (λ,μ) anti-fuzzy sub-algebra. [**Conclusions**]The results enriched fuzzy theory in N(2,2,0)-algebra.

Keywords: N(2,2,0) algebra; (λ,μ) anti-fuzzy sub-algebra; anti-direct product; homomorphism

(责任编辑 游中胜)