

# 基于小波已实现波动的动态风险价值研究\*

伍习丽<sup>1</sup>, 彭选华<sup>2</sup>

(1. 重庆三峡学院 数学与统计学院 非线性科学与系统结构重点实验室, 重庆 404100;

2. 西南政法大学 经济学院, 重庆 401120)

**摘要:**【目的】对股票市场的 VaR 动态风险价值进行研究。【方法】采用小波多分辨技术将高频已实现波动率分解为近似信号和细节信号,建立 MRA-RV-ARFIMA GARCH-VaR 类模型,分别在 1~2 d、2~4 d、4~8 d 和 8~16 d 的尺度下进行动态风险价值度量。【结果】实证表明该模型能很好地捕捉到市场的信息,对风险预测效果较好。【结论】经过多分辨分解后的信号能有效地捕捉到不同时间尺度上的波动信息,近似信号能很好的反应波动的变化趋势,资产波动对短期交易反应敏感,不同时间尺度拟合的 VaR 比低频 GARCH 类模型效果更好。

**关键词:**小波多分辨分析;已实现波动率 RV;风险价值 VaR;ARMA;GARCH

**中图分类号:**O29; F830.91

**文献标志码:**A

**文章编号:**1672-6693(2017)03-0073-06

股票市场是一个复杂的系统,经济、政策、投资者心理等都是影响股票收益率的因素,不能单纯地用有效市场理论对其进行解释<sup>[1]</sup>。根据数学统计原理找到合适的预测模型对促进股票市场的良性发展有着非常重要的意义。目前学术界对股票收益率的研究主要集中于低频领域的 ARMA 模型、GARCH 模型和 SV 模型,以及高频领域的 ACD 持续期模型和 RV 已实现模型等。低频模型对收益率的性质及预测都得出了很多重要的结论,包括收益率序列具有长期相关性、尖峰厚尾性、时变性和波动率聚集性等<sup>[2]</sup>。高频模型考虑到数据的真实性和复杂性,能更有效地处理收益率序列的日历效应和突变跳跃性等<sup>[3]</sup>。传统的低频模型使用日间数据,会损失太多有用信息,而高频模型因数据量太大会产生大量市场微观噪声。因此,将高频数据按照不同特性分解成不同频率的信号,再分别处理会更加合理。法国科学家 Morlet 和 Grossman 提出的小波分析(Wavelet Analysis)已成为一种强有力的数据分析工具,被广泛用于信号处理<sup>[4]</sup>。小波分析的原理是将原始信号分解到不同的频率上,量化研究原信号的局部近似和细节特征,分解后的信号在频率成分上比原始信号单一,便于处理,由此建立的拟合模型会更加准确。本文将小波多分辨分析引入到高频已实现波动率和 VaR 的分析中,建立 MRA-RV-ARFIMA -GARCH-VaR 类模型,在不同的时间尺度下进行动态风险价值估计。

## 1 理论模型

### 1.1 已实现波动率

已实现波动率是专门为高频数据提出的波动率估计方法。Merton<sup>[5]</sup>认为当样本频率足够大的时候,通过加总高频变量的平方和,在一定期限内,独立同分布的随机变量的方差可以被精确的估计。Anderson 和 Bollerslev<sup>[6]</sup>根据该思想及二次变差理论首次提出了已实现波动率(Realized volatility, RV)的概念。

**定义 1** 假设金融资产的日内对数价格收益满足:

$$r_{t,j} = P_{t,j} - P_{t,j-1}, (t=1, \dots, T, j=1, \dots, M)$$

其中,  $P_{t,j}$  为资产在第  $t$  日第  $j$  个日内对数价格,  $M$  为在时段  $[t-1, t]$  内的等间隔抽样次数。则已实现波动率可定义为如下形式:

\* 收稿日期:2016-03-31 修回日期:2016-01-07 网络出版时间:2017-05-02 17:24

资助项目:重庆市教委科技计划项目(No.KJ130107);重庆市自然科学基金项目(No.cstc2012jjA00023);重庆三峡学院青年项目(No.14QN22)

第一作者简介:伍习丽,女,研究方向为小波计量、金融系统动力学与风险投资理论等,E-mail:346235447@qq.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170502.1724.030.html>

$$RV_t = \sum_{j=1}^M r_{t,j}^2,$$

基于二次变差理论,  $RV$  可收敛于积分波动率(Integrated volatility,  $IV$ ), 积分波动率反映了真实价格的波动过程, 被广泛应用于期权定价等金融领域。

设  $(\Omega, F, P)$  为完备概率空间, 信息集  $(F_t) \in F$  为单调递增的  $\sigma$ -子代数序列,  $F_t$  满足完备性和右连续的。可以将任意二阶可积的对数价格过程  $p(t)$  分解成均值过程  $A(t)$  和局部鞅过程  $M(t)$ :  $p(t) - p(0) = A(t) + M(t)$ , 其中,  $p(t)$  在  $t$  时刻包含在  $F_t$  中,  $A(t)$  为局部可积的有界变差过程,  $A(0) = 0, M(0) = 0$ 。无套利金融资产的收益率过程  $r(t, \Delta) = p(t) - p(t - \Delta)$  总存在二阶变差过程:  $\{[r, r]_t\} \equiv r(t)^2 - 2 \int_0^t r(t^-) dr(t)$ , 其中,  $r(t^-) \equiv \lim_{s \rightarrow t, s \leq t} r(s)$ 。

**定理 1** 如果对数收益过程  $r(t + \Delta, \Delta) = p(t + \Delta) - p(t)$  满足以下 Ito 过程:

$$r(t + \Delta, \Delta) = \int_0^\Delta \mu_{t+s} ds + \int_0^\Delta \sigma_{t+s} dB(s),$$

其中,  $t \in [0, T], B(s)$  是布朗运动。

**证明** 将所有的  $t$  到  $t+1$  时刻分成  $n$  个时间段, 且令

$$0 = \tau_{T_n, 0} \leq \tau_{T_n, 1} = \frac{1}{n} \leq \dots \leq \tau_{T_n, n} = 1 \leq \tau_{T_n, n+1} = 1 + \frac{1}{n} \leq \dots \leq \tau_{T_n, T_n} = T,$$

$$\lim_{T_n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{j=0}^{(t+\Delta)_n} [r(t + \Delta \wedge \tau_{T_n, j+1}) - r(t + \Delta \wedge \tau_{T_n, j})]^2 \right\} \rightarrow [r, r]_{t+\Delta},$$

$$\lim_{T_n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{j=0}^{t_n} [r(t \wedge \tau_{T_n, j+1}) - r(t \wedge \tau_{T_n, j})]^2 \right\} \rightarrow [r, r]_t,$$

$$\text{所以有 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{j=1}^{n\Delta} r\left(t + \frac{j}{n}, \frac{1}{n}\right)^2 \right\} \rightarrow [r, r]_{t+\Delta} - [r, r]_t.$$

由二次变差的定义有:

$$[r, r]_{t+\Delta} - [r, r]_t = \left[ \int_0^{t+\Delta} \sigma_s dB(s), \int_0^{t+\Delta} \sigma_s dB(s) \right] - \left[ \int_0^t \sigma_s dB(s), \int_0^t \sigma_s dB(s) \right].$$

由二次变差理论可知:

$$[r, r]_{t+\Delta} - [r, r]_t = \left[ \left( \int_0^{t+\Delta} \sigma_s dB(s) \right)^2 - 2 \int_0^{t+\Delta} \int_0^u \sigma_s dB(s) \sigma_u dB(u) \right] - \left[ \left( \int_0^t \sigma_s dB(s) \right)^2 - 2 \int_0^t \int_0^u \sigma_s dB(s) \sigma_u dB(u) \right].$$

$$\text{根据 Ito 定理有: } [r, r]_{t+\Delta} - [r, r]_t = \int_0^{t+\Delta} \sigma_s^2 ds - \int_0^t \sigma_s^2 ds = \int_0^\Delta \sigma_{t+s}^2 ds.$$

即可证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n\Delta} r\left(t + \frac{j}{n}, \frac{1}{n}\right)^2 \longrightarrow \int_0^\Delta \sigma_{t+s}^2 ds$ , 其中,  $t \wedge \tau = \min(t, \tau)$ ,  $\int_0^\Delta \sigma_{t+s}^2 ds$  为积分波动率。当  $\Delta = 1$

$$\text{时, } IV_t = \int_0^1 \sigma_{t+s-1}^2 ds.$$

证毕

## 1.2 小波多分辨率分析

**定义 2** 设  $V_j, j \in \mathbf{Z}$  为  $L^2(R)$  中的函数子空间序列, 且  $V_j$  由函数  $\Phi(x)$  生成。若集合  $\{V_j\}$  满足以下性质, 称  $\{V_j\}$  为  $L^2(R)$  的多分辨率分析(Multiresolution analysis, MRA)<sup>[1]</sup>:

- 1)  $V_j \subset V_{j-1}$  (嵌套性);
- 2)  $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j \subset \{0\}, \overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(R)$  (逼近性);
- 3)  $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$  (伸缩性);
- 4) 对任意  $k \in \mathbf{Z}$ , 有  $\Phi_j(2^{j/2}x) \in V_j \Rightarrow \Phi_j(2^{j/2}x - k) \in V_j$  (平移不变性);
- 5) 存在  $\Phi(x) \in V_0$  使得  $\Phi_{j,k}(x) = \{\Phi(2^{j/2}x - k) | k \in \mathbf{Z}\}$  构成  $V_j$  的标准正交基, 并称  $\Phi(x)$  为尺度函数。

若  $V_j, j \in \mathbf{Z}$  为一个多分辨分析,则相应的尺度函数为:

$$\Phi(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} p_x \Phi(2x - k), p_x = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) \bar{\Phi}(2x - k) dx.$$

设  $W_j$  是由  $\{\psi(2^j x - k), k \in \mathbf{Z}\}$  张成的空间,其中,  $\psi(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} (-1)^k \bar{p}_{1-k} \Phi(2x - k)$ 。则  $W_j \subset V_{j+1}$  是  $V_{j+1}$  中关于  $V_j$  的正交补空间,即  $V_{j+1} = W_j \oplus V_j$ ,而且  $\{\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), k \in \mathbf{Z}\}$  是  $W_j$  的一个标准正交基。

因此,  $\{\psi_{j-1,k}, k \in \mathbf{Z}\}$  是空间  $W_{j-1}$  的标准正交基,  $W_{j-1}$  是  $V_j$  中关于  $V_{j-1}$  的正交补空间,即  $V_j = W_{j-1} \oplus V_{j-1}$ ,  $V_j$  是  $W_{j-1}$  和  $V_{j-1}$  的张量积空间。按此正交分解依次进行下去,可得:  $V_j = W_{j-1} \oplus V_{j-1} = W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus V_{j-2} = \dots = W_{j-1} \oplus \dots \oplus W_{j-m} \oplus V_{j-m}$ ,其中,  $m \in \mathbf{Z}$  为分解层数。

若待处理的原信号为  $f$ ,在空间  $V_j$  上逼近,则有

$$f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle f, \Phi_{j,k} \rangle \Phi_{j,k} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle \psi_{j-1,k} + \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle f, \Phi_{j-1,k} \rangle \Phi_{j-1,k},$$

其中,  $\langle f, \Phi_{j-1,k} \rangle = c_{j-1,k}$  表示信号的近似部分的系数,  $\langle f, \psi_{j-1,k} \rangle = d_{j-1,k}$  表示信号细节部分的系数。

令  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle f, \Phi_{j-1,k} \rangle \Phi_{j-1,k} = f_{j-1}$ ,  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle \psi_{j-1,k} = g_{j-1}$ , 则  $f = f_{j-1} + g_{j-1}$ ,  $f_{j-1} \in V_{j-1}$ ,  $g_{j-1} \in W_{j-1}$ 。

重复此正交过程,可得:  $f = f_{j-m} + g_{j-1} + g_{j-2} + \dots + g_{j-m}$ ,其中,  $m \in \mathbf{Z}$  为分解层数。由此,原信号被分解为互不相关的时间序列。

### 1.3 MRA-RV-ARFIMA-GARCH-VaR 类模型

Jorion<sup>[7]</sup>定义风险价值(Value at Risk, VaR)是在正常波动情况的市场中,金融资产或资产组合在置信水平  $\alpha$  下,未来持续期为  $H$  时的最大可能损失。定义式为:

$$\text{Prob}[r_t < \text{VaR}_t(H)] = 1 - F_t(\text{VaR}) = 1 - \alpha,$$

其中,  $r_t$  是资产在  $t$  时刻的收益率,  $F_t(x)$  是资产收益服从的分布函数。只要知道收益的分布函数,即可得到 MAR-RV-ARFIMA-GARCH-VaR 模型为:

$$\begin{cases} \text{VaR}_{l,t} = \mu_0 + z_{l,\alpha} \sqrt{RV_{l,t}}, \\ RV_t = \sum_{j=1}^M r_{t,j}^2, \\ RV_t = A_{J,t} + \sum_{j=1}^J D_{j,t}, \\ (1-L)^d RV_{l,t} = \varphi_0 + \sum_{i=1}^p \varphi_i RV_{l,t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}, \\ \varepsilon_t = \sqrt{h_t} e_t, \\ h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \eta_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \lambda_j h_{t-j}. \end{cases}$$

其中,  $\mu_0$  为金融资产的日对数收益率的均值,  $z_{l,\alpha}$  为  $l$  尺度下收益分布在置信水平为  $\alpha$  的单侧分位数,  $RV_{l,t}$  为  $l$  尺度下的已实现波动率。

## 2 实证分析

### 2.1 序列的统计特征分析

本文选取 2015 年上证综指 1 min 收盘数据作为样本,分别计算出日内 1 min 对数收益率,日间对数收益率和已实现波动率。结果显示,日内 1 min 对数收益率为一个白噪声序列,序列包含的市场微观噪声太大,图 1 显示出日内 1 min 对数收益率呈现出以 240 为周期长度的收益率点值,可认为日内收益率在收盘前基本趋于 0,在收盘时才有显著的收益率。

日间对数收益率和已实现波动率的单位根和自相关图检验结果显示两个序列均为平稳的非白噪声序列,对应的描述性检验结果如表 1。

### 2.2 小波分解及小波系数拟合

经反复验证,对已实现波动率采用 DB4 函数的 4 层分解时误差最小,  $SE = 8.1052 \times 10^{-13}$ 。对应的小波分解系数如图 3 所示。

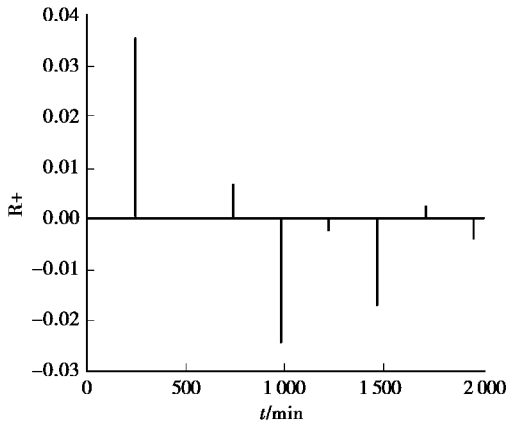


图 1 日内 1 min 对数收益率

Fig. 1 Logarithm yield for 1 minute data

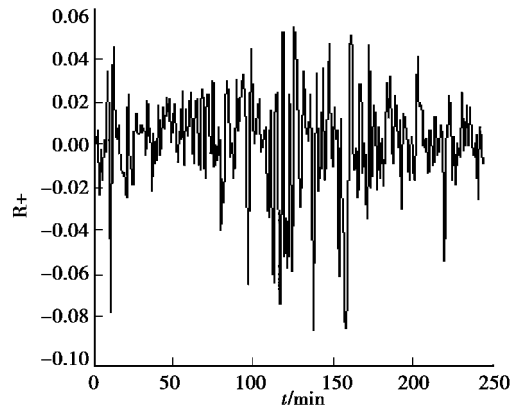


图 2 日间对数收益率

Fig. 2 Daily logarithm yield

表 1 上证综指日间收益率序列和已实现波动率的描述性统计检验

Tab. 1 The descriptive statistical tests of daily yield sequence and realized volatility for Shanghai composite index

	均值	标准差	偏度	峰度	正态检验值(概率)
$r$	0.000 225	0.024 675	-0.936 962	5.007 846	76.373 28(0)
$RV_t$	0.000 406	0.024 680	-0.937 252	5.008 406	77.046 96(0)

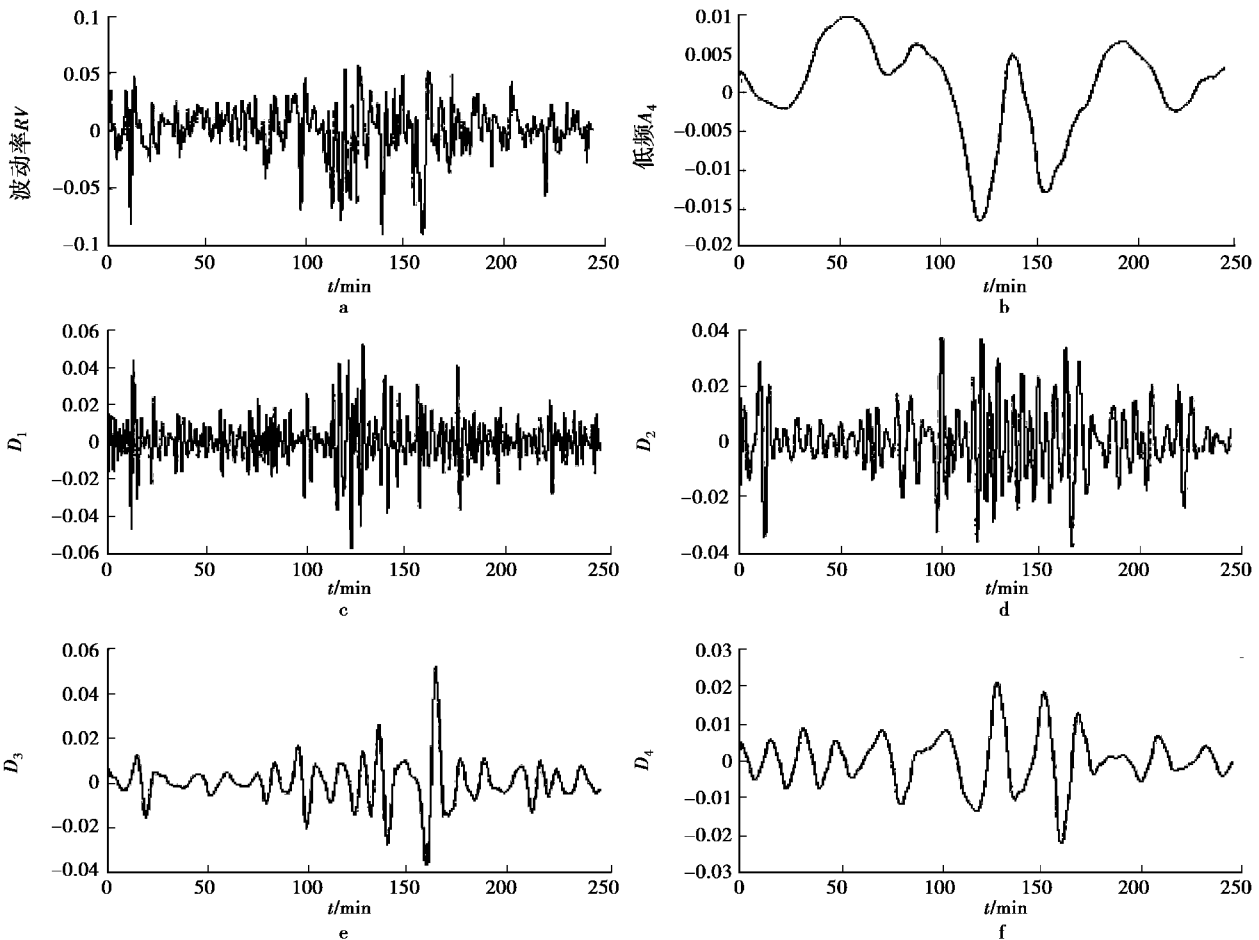


图 3 已实现波动率的  $DB_4$  分解系数

Fig. 3  $DB_4$  decomposition coefficient of realized volatility

分解后近似部分  $A_4$  的能量谱为  $f = 14.86\%$ , 细节部分  $D_1 \sim D_4$  的能量谱分别为:  $f_1 = 39.89\%$ ,  $f_2 = 30.1\%$ ,  $f_3 = 15.68\%$ ,  $f_4 = 8.16\%$ 。波动率序列的信息主要集中在 1 层和 2 层的细节序列中, 各层分解序列对应于期限为 1~2 d、2~4 d、4~8 d 和 8~16 d 的投资反应<sup>[8]</sup>, 也验证了收益率对短期新信息的反应更敏锐。

为比较 MRA-RV-ARFIMA-GARCH-VaR 模型的拟合效果, 本文对日间对数收益进行 ARMA-GARCH 建模及 VaR 度量。经验证, 分解后的波动率序列的近似部分  $A_4$  和细节部分  $D_1 \sim D_4$  均为平稳的非白噪声序列, 可采用 ARFIMA-GARCH 类模型进行模拟<sup>[9]</sup>。近似部分  $A_4$  序列具有长期记忆性, 长记忆指数  $d = 0.3489$ , 细节部分的 4 层序列均只有短期相关性。经反复验证, 得到最优的拟合模型, 模型形式及参数估计结果如表 2。

表 2 日间收益率序列和小波已实现波动率的参数估计

Tab. 2 Parameters estimation of daily yield sequence and wavelet realized volatility

	ARMA 部分			GARCH 部分			$R^2$
$r$	$\varphi_1 = -0.46$ (0.222 527)	$\theta_1 = 0.61$ (0.196 53)		$\eta_1 = 0.082$ (0.029 006)	$\lambda_1 = 0.88$ (0.037 140)		4.32%
$A_4$	$\varphi_1 = 1.57$ (0.005 644)	$\varphi_2 = -0.54$ (0.007 388)	—	$\eta_1 = 2.14$ (1.120 034)	—		94.08%
$D_1$	$\theta_1 = 1.21$ (0.019241)	$\theta_2 = 0.31$ (0.008 813)	$\theta_3 = -0.54$ (0.020 10)	—	$\eta_1 = 0.31$ (0.044 622)	—	88.51%
$D_2$	$\varphi_2 = -0.84$ (0.044 384)	$\varphi_4 = -0.83$ (0.054 252)	$\varphi_6 = -0.64$ (0.045 500)	$\theta_2 = 0.99$ (0.013 382)	$\eta_1 = 0.16$ (0.090 112)	$\lambda_1 = -0.83$ (0.385 195)	87.08%
$D_3$	$\varphi_1 = 1.51$ (0.041 146)	$\varphi_2 = -0.77$ (0.031 39)	$\theta_1 = -0.99$ (0.005 353)	—	$\eta_1 = 1.48$ (0.389 615)	—	91.47%
$D_4$	$\varphi_1 = 1.87$ (0.019 886)	$\varphi_2 = -0.97$ (0.018 623)	—	—	$\eta_1 = 0.55$ (0.190 962)	—	98.44%

注: (·) 表示该参数的估计误差。

### 2.3 VaR 的估计及分析

收益序列的分布检验呈尖峰厚尾性, 选择广义误差模型(GED)对收益进行拟合, 分别建立多头和空头, 在 95%, 97.5% 和 99% 的置信水平下估计日间对数收益、近似信号和各层细节信号的 VaR。近似信号较好地反映了资产的最大可能损失变化趋势, 1~2 d、2~4 d 的短期投资的风险损失变化较大, 4~8 d、8~16 d 的中长期投资风险损失较为平缓, 这说明市场对投资者的跟风及频繁的买进卖出行为反应敏感, 造成大量微观噪声, 扰乱了市场的正常有效机制。

## 3 总结

本文建立了 MRA-RV-ARFIMA-GARCH-VaR 类模型, 分别在 1~2 d、2~4 d、4~8 d 和 8~16 d 的尺度下对收益波动率进行分析, 发现近似信号能很好的反应出收益变化的趋势, 细节信号在不同尺度下反应市场信息, 1~2 层细节信号包含了大部分原信号的信息, 波动频率较大, 说明整个市场受到短期频繁买进卖出的跟风行为影响很大, 由于投资者的异质性, 扰乱了市场的正常有效性, 监管机构可适当限制此种投机行为。在不同置信水平下对不同尺度的波动率度量 VaR 风险值能较好地捕捉到不同投资期限内投资者的风险价值。本文的创新点是将小波多分辨技术引入到高频已实现波动率的分析中。相比传统的低频模型, 该方法能更多地考虑到数据的真实性和复杂性, 利用了更多的日内有用信息; 相比单纯的高频模型, 该方法将原始信号分解到不同时间尺度上进行分析, 能更好地处理高频数据包含的大量微观噪声。下一步研究将重点关注小波分解后的细节变量中的市场微观因素, 包括投资者的异质效应和心理反应等, 将虚拟变量引入到分析过程中, 建立更合适的拟合模型。

## 参考文献:

- [1] 张世英,樊智,郭名媛.协整理论与波动模型—金融时间序列分析及其应用[M].北京:清华大学出版社,2014.  
ZHANG S Y, FAN Z, GUO M Y. Cointegration theory and volatility model-financial time series analysis and its application[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2014.
- [2] 王燕.应用时间序列分析[M].北京:中国人民大学出版社,2012.  
WANG Y. Application of time series analysis[M]. Beijing: China Renmin University Press, 2012.
- [3] RUEY S T.金融时间序列分析[M].王辉,潘家柱译.北京:人民邮电出版社,2005.  
RUEY S T. Financial time series analysis[M]. Wang H, Pan J Z translation. Beijing: Posts & Telecom Press, 2005.
- [4] 蒋翠侠,许启发,张世英.金融资产多分辨风险识别及投资组合策略[J].数理统计与管理,2007,26(4):685-692.  
JIANG C X, XU Q F, ZHANG S Y. Financial assets multi-resolution risk identification and portfolio strategies[J]. Mathematical Statistics and Management, 2007, 26(4): 685-692.
- [5] MARTENS M, DIJK D. Measuring Volatility with the Realized Range[J]. Journal of Econometrics, 2007, 138(1): 181-207.
- [6] ANDERSEN T. G. Exchange rate returns standardized by realized volatility are (nearly) Gaussian[J]. Multinational Finance Journal, 2000, 4: 159-179.
- [7] JORION P. Value at risk: The new benchmark for controlling market risk[M]. New York: McGraw-Hill Companies, Inc, 1997.
- [8] 彭选华,傅强.基于小波多尺度分析的 GARCH 建模方法的拓展[J].系统工程理论与实践,2011,31(11):2060-2069.  
PENG X H, FU Q. GARCH modeling method based on wavelet multi-scale analysis[J]. Systems Engineering Theory and Practice, 2011, 31(11): 2060-2069.
- [9] 傅强,伍习丽.基于 ARFIMA-WRBV-VaR 的中国股市风险研究[J].西南大学学报(自然科学版),2013,3(35):9-14.  
FU Q, WU X L. Risk of Chinese stock market research based on the ARFIMA-WRBV-VaR[J]. Journal of Southwest University(Natural Science Edition), 2013, 3(35): 9-14.

## Research for Dynamic Value at Risk Based on Wavelet Realized Volatility

WU Xili<sup>1</sup>, PENG Xuanhua<sup>2</sup>

- (1. Key Laboratory for Nonlinear Science and System Structure School of Mathematics and Statistics, Chongqing Three Gorges College, Chongqing 404100;  
2. School of Economics, Southwest University of Political Science & Law, Chongqing 401120, China)

**Abstract:** [Purposes] It does research for dynamic value at risk of stock market. [Methods] It uses the wavelet multi-resolution technique to decompose high frequency realized volatility into approximation and details signals, establish MRA-RV-ARFIMA-GARCH-VaR model to measure dynamic value at risk under 1-2day, 2-4day, 4-8day and 8-16day scales. [Findings] The empirical analysis shows that the model can primely catch the imformation of finacial market. It can also effectually forecast risk. [Conclusions] Multi-resolution decomposition of the signal can effectively capture the volatility information on different time scales. The approximate signal can be a very good fluctuation response for change trend. The asset volatility is sensitive to short-term trading reaction. VaR on different time scales is better than the low-frequency GARCH class models.

**Keywords:** wavelet multi-resolution analysis; realized volatility; VaR; ARMA; GARCH

(责任编辑 许 甲)