2016 年度重庆市出版专项基金资助栏目

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20170430

拟 α-预不变凸函数*

李 婷[1],彭再云[2],李科科[3],唐 平[4]

(1. 山西大学商务学院 基础教学部,太原 030031;2. 重庆交通大学 数学与统计学院,重庆 400074;
3. 重庆师范大学 数学科学学院,重庆 401331;4. 重庆文理学院 数学与财经学院,重庆 402160)

摘要:【目的】主要研究了拟 α-预不变凸性及其在优化问题中的应用。【方法】借助假设条件 A 和 C 进行讨论,并举例进行验证。【结果】首先,在适当的假设下分别讨论了拟 α-预不变凸性、严格拟 α-预不变凸性和半严格拟 α-预不变凸性成立的充要条件,然后给出拟 α-预不变凸函数在约束非线性规划中的一个重要应用,并给出实例检验了结论的正确性。【结论】这些结果在一定程度上丰富了对拟 α-预不变凸函数的研究成果。

关键词:拟 α-预不变凸函数;严格拟 α-预不变凸函数;半严格拟 α-预不变凸函数;非线性规划

中图分类号:O224 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2017)04-0008-05

凸性及广义凸性是数学规划研究领域中的一项重要研究内容,在最优化理论的研究中起着重要作用。近些年来,人们不断地对凸函数进行推广,得到了一系列的广义凸函数,并研究了这些广义凸函数的性质及其在数学规划中的应用[1-11]。1988 年,Weir 等人[1-2]引入了不变凸集和预不变凸函数,并研究了预不变凸函数的性质及其在最优化中的应用。2001 年,Yang 等人[3]又提出了两类广义凸函数—严格预不变凸函数和半严格预不变凸函数。2006 年,Noor 等人[4]给出了两类新的广义凸函数—α-预不变凸函数和拟 α-预不变凸函数。2013 年,Tang[5]定义了严格拟 α-预不变凸函数和半严格拟 α-预不变凸函数,并对它们的性质及相互关系进行了研究。文献[6]给出凸函数的一个等价刻画,文献[7]将文献[6]得到的结论加以推广,得到了预不变凸函数的一个等价描述。文献[11]在文献[9]中条件 A 和条件 C 下将文献[7]的结果推广到 α-预不变凸函数的情形,并获得 α-预不变凸函数、严格 α-预不变凸函数和半严格 α-预不变凸函数各自的等价条件。

本文将文献[11]的结果进一步推广到拟 α-预不变凸函数的情形。

1 预备知识

设 H 是实 Hilbert 空间,K 是 H 的一个非空子集,$F:K\to H$ 和 $\alpha:K\times K\to\mathbf{R}$ 是两个实值函数,$\eta:K\times K\to H$ 是向量值函数。

定义 1[4] 若 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\lambda\in[0,1]$,存在向量值映射 $\eta:K\times K\to H$,使得 $\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in K$,则称集合 K 为关于 α 和 η 的 α-不变凸集。

定义 2[4] 设集合 K 为关于 α 和 η 的 α-不变凸集,若 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\lambda\in[0,1]$,有 $F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqslant(1-\lambda)F(\boldsymbol{y})+\lambda F(\boldsymbol{x})$,则称 F 是 K 上关于 α 和 η 的 α-预不变凸函数。

定义 3[4] 设集合 K 为关于 α 和 η 的 α-不变凸集,若 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\forall\lambda\in[0,1]$,有 $F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqslant\max\{F(\boldsymbol{x}),F(\boldsymbol{y})\}$,则称 F 是 K 上关于 α 和 η 的拟 α-预不变凸函数。

定义 4[5] 设集合 K 为关于 α 和 η 的 α-不变凸集,若 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y},\forall\lambda\in[0,1]$,有

* 收稿日期:2016-09-08 修回日期:2017-05-25 网络出版时间:2017-05-16 11:25

资助项目:国家自然科学基金(No.11301571);重庆市基础与前沿研究(No.cstc2017jcyjAX0382;No.cstc2013jcyjA40031);重庆市民生项目(No. cstc2015shmszx30004);国家博士后基金(No.2015M580774;No.2016T90837);重庆市高校创新团队项目(No. CXTDX201601022);山西省教育科学"十三五"规划课题(No.GH-16173);山西大学商务学院科研项目(No.2016027);山西财经大学青年科研基金(No.QN-2017002)

第一作者简介:李婷,女,讲师,研究方向为最优化理论与应用,E-mail:liting99999@126.com;通信作者:彭再云,教授,E-mail:pengzaiyun@126.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170516.1125.044.html

$$F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))<\max\{F(\boldsymbol{x}),F(\boldsymbol{y})\},$$

则称 F 是 K 上关于 α 和 η 的严格拟 α-预不变凸函数。

定义 5[5]　设集合 K 为关于 α 和 η 的 α-不变凸集，若 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$F(\boldsymbol{x})\neq F(\boldsymbol{y})$，$\forall\lambda\in[0,1]$，有

$$F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))<\max\{F(\boldsymbol{x}),F(\boldsymbol{y})\},$$

则称 F 是 K 上关于 α 和 η 的半严格拟 α-预不变凸函数。

定义 6[8]　设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是非空凸集，$\lambda\in[0,1]$，F 是定义在 K 上的函数，如果对于 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，有：

$$F(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})\leqslant\max\{F(\boldsymbol{x}),F(\boldsymbol{y})\},\tag{1}$$

则称 F 是 K 上的拟凸函数；

如果当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ 时(1)式中严格不等式成立，即 $F(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})<\max\{F(\boldsymbol{x}),F(\boldsymbol{y})\}$，则称 F 是 K 上的严格拟凸函数；

如果当 $F(\boldsymbol{x})\neq F(\boldsymbol{y})$ 时(1)式中严格不等式成立，即 $F(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})<\max\{F(\boldsymbol{x}),F(\boldsymbol{y})\}$，则称 F 是 K 上的半严格拟凸函数。

根据定义 2 和定义 3 易知 α-预不变凸函数一定是拟 α-预不变凸函数，但是反之不一定成立。

例 1　设 $K=[-1,0)$，$F(x)=\log_2(1-x)$，$\alpha(x,y)=1$，$\eta(x,y)=-\dfrac{y}{2}$。

显然，对 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall\,x,y\in K$，有 $y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y)=y-\lambda\cdot\dfrac{y}{2}=\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)y\in K$，即 K 为关于 α 和 η 的 α-不变凸集。$F(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))=F\left(y-\lambda\cdot\dfrac{y}{2}\right)=\log_2\left(1-y+\dfrac{\lambda}{2}y\right)$，且 $F(x)=\log_2(1-x)$，$F(y)=\log_2(1-y)$，计算可得 $F(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant\max\{F(x),F(y)\}$。

因此，F 是 K 上关于 α 和 η 的拟 α-预不变凸函数。

然而，取 $x=-\dfrac{1}{5}$，$y=-\dfrac{2}{3}$，$\lambda=\dfrac{1}{2}$，有：

$$F(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))=F\left(-\frac{1}{2}\right)=\log_2\frac{3}{2}>\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)=\log_2\sqrt{2}。$$

故 F 不是 K 上关于 α 和 η 的 α-预不变凸函数。

为了讨论拟 α-预不变凸函数的性质，需要利用如下的条件及引理：

条件 A[9]　称 F 满足条件 A，如果 $F(\boldsymbol{y}+\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqslant F(\boldsymbol{x})$，$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$。

条件 C[9]　称 η 满足条件 C，如果对 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\forall\lambda\in[0,1]$，$\eta$ 和 α 满足：

$$\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=-\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=(1-\lambda)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})。$$

引理 1[10]　设集合 K 为关于 α 和 η 的 α-不变凸集，对 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\forall\lambda\in[0,1]$，$\eta$ 和 α 满足：

$$\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=-\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\alpha(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})),$$

则对 $\forall\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$，且 $\lambda_2<\lambda_1$，有：

1) $\eta(\boldsymbol{y}+\lambda_1\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\lambda_2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=(\lambda_1-\lambda_2)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$；

2) $\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\alpha(\boldsymbol{y}+\lambda_1\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),y+\lambda_2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$。

2 主要结果

这一部分将在适当的条件下得到拟 α-预不变凸性、严格拟 α-预不变凸性和半严格拟 α-预不变凸性各自成立的充要条件，并在不等式约束下，获得拟 α-预不变凸规划问题解的最优性结果。

定理 1　设 K 为关于 α 和 η 的 α-不变凸集，F 满足条件 A，η 满足条件 C，α 满足条件 $\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\alpha(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$，则 F 在 K 上关于同一 α 和 η 是拟 α-预不变凸函数当且仅当 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\lambda\in[0,1]$，$g(\lambda)=F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ 是 $[0,1]$ 上的拟凸函数。

证明　充分性。若 $g(\lambda)=F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ 是 $[0,1]$ 上的拟凸函数，则对 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\lambda\in[0,1]$，有：

$$F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=g(\lambda)=g(\lambda\cdot1+(1-\lambda)\cdot0)\leqslant\max\{g(0),g(1)\}=$$
$$\max\{F(\boldsymbol{y}),F(\boldsymbol{y}+\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\}。$$

由 F 满足条件 A 可知 $\max\{F(\boldsymbol{y}),F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\}\leqslant\max\{F(\boldsymbol{y}),F(\boldsymbol{x})\}$。从而有：

$$F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqslant\max\{F(\boldsymbol{x}),F(\boldsymbol{y})\}。$$

故 F 在 K 上关于同一 α 和 η 是拟 α-预不变凸函数。

必要性。设 F 关于同一 α 和 η 是拟 α-预不变凸函数,则对 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\lambda\in[0,1]$,有:

$$F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqslant\max\{F(\boldsymbol{x}),F(\boldsymbol{y})\};$$

对 $\forall\,\lambda_1,\lambda_2,\beta\in[0,1]$,

a) 若 $\lambda_1=\lambda_2$,则 $g(\beta\lambda_1+(1-\beta)\lambda_2)=g(\lambda_1)=g(\lambda_2)=\max\{g(\lambda_1),g(\lambda_2)\}$

b) 若 $\lambda_1\neq\lambda_2$,不失一般性,假设 $\lambda_2<\lambda_1$,由引理 1 及拟 α-预不变凸函数的定义,有

$$\begin{aligned}&g(\beta\lambda_1+(1-\beta)\lambda_2)=F(\boldsymbol{y}+(\beta\lambda_1+(1-\beta)\lambda_2)\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\\&F(\boldsymbol{y}+\lambda_2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\beta(\lambda_1-\lambda_2)\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\\&F(\boldsymbol{y}+\lambda_2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\beta\alpha(\boldsymbol{y}+\lambda_1\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\\&\lambda_2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\cdot\eta(\boldsymbol{y}+\lambda_1\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\lambda_2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})))\leqslant\\&\max\{F(\boldsymbol{y}+\lambda_1\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})),F(\boldsymbol{y}+\lambda_2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\}=\max\{g(\lambda_1),g(\lambda_2)\}。\end{aligned}$$

因此,$g(\lambda)$是$[0,1]$上的拟凸函数。 证毕

定理 2 设 K 为关于 α 和 η 的 α-不变凸集,F 满足条件 A,η 满足条件 C,α 满足条件

$$\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\alpha(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})),$$

且 $x\neq y$ 时,有 $\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq0,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq0$。则 F 在 K 上关于同一 α 和 η 是严格拟 α-预不变凸函数的充要条件是 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\lambda\in[0,1]$,$g(\lambda)=F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$是$[0,1]$上的严格拟凸函数。

证明 充分性。若 $g(\lambda)=F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$是$[0,1]$上的严格拟凸函数,则对 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y},\lambda\in[0,1]$,有:

$$\begin{aligned}&F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=g(\lambda)=g(\lambda\cdot1+(1-\lambda)\cdot0)<\\&\max\{g(0),g(1)\}=\max\{F(\boldsymbol{y}),F(\boldsymbol{y}+\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\}。\end{aligned}$$

由 F 满足条件 A 可得 $\max\{F(\boldsymbol{y}),F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\leqslant\max\{F(\boldsymbol{y}),F(\boldsymbol{x})\}$。即:

$$F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))<\max\{F(\boldsymbol{x}),F(\boldsymbol{y})\}。$$

因此,F 在 K 上关于同一 α 和 η 是严格拟 α-预不变凸函数。

必要性。F 在 K 上关于同一 α 和 η 是严格拟 α-预不变凸函数,则对 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y},\lambda\in[0,1]$,有:

$$F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))<\max\{F(\boldsymbol{x}),F(\boldsymbol{y})\}。$$

对 $\forall\,\lambda_1,\lambda_2,\beta\in[0,1]$,且 $\lambda_1\neq\lambda_2$,不妨假设 $\lambda_2<\lambda_1$,由条件可知,当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ 时,有 $\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq0,\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq0$。因此,$\boldsymbol{y}+\lambda_1\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq\boldsymbol{y}+\lambda_2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$。由引理 1 及定义 4,有:

$$\begin{aligned}&g(\beta\lambda_1+(1-\beta)\lambda_2)=F(\boldsymbol{y}+(\beta\lambda_1+(1-\beta)\lambda_2)\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\\&F(\boldsymbol{y}+\lambda_2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\beta(\lambda_1-\lambda_2)\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\\&F(\boldsymbol{y}+\lambda_2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\beta\alpha(\boldsymbol{y}+\lambda_1\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\\&\lambda_2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\cdot\eta(\boldsymbol{y}+\lambda_1\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\lambda_2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})))<\\&\max\{F(\boldsymbol{y}+\lambda_1\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})),F(\boldsymbol{y}+\lambda_2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\}=\max\{g(\lambda_1),g(\lambda_2)\}。\end{aligned}$$

因此,$g(\lambda)$是$[0,1]$上的严格拟凸函数。 证毕

定理 3 设 K 为关于 α 和 η 的 α-不变凸集,F 满足条件 A,η 满足条件 C,α 满足条件 $\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$,则 F 在 K 上关于同一 α 和 η 是半严格拟 α-预不变凸函数等价于 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\lambda\in[0,1]$,$g(\lambda)=F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$是$[0,1]$上的半严格拟凸函数。

证明 若 $g(\lambda)=F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$是$[0,1]$上的半严格拟凸函数,则对 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\lambda\in[0,1]$,当 $g(0)\neq g(1)$时,有:

$$\begin{aligned}&F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=g(\lambda)=g(\lambda\cdot1+(1-\lambda)\cdot0)<\max\{g(0),g(1)\}=\\&\max\{F(\boldsymbol{y}),F(\boldsymbol{y}+\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\}。\end{aligned}$$

F 满足条件 A,故有 $\max\{F(\boldsymbol{y}),F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\}\leqslant\max\{F(\boldsymbol{x}),F(\boldsymbol{y})\}$。于是

$$F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))<\max\{F(\boldsymbol{x}),F(\boldsymbol{y})\}。$$

因此,F 在 K 上关于同一 α 和 η 是半严格拟 α-预不变凸函数。

反之,设 F 在 K 上关于同一 α 和 η 是半严格拟 α-预不变凸函数,则对 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\lambda\in[0,1]$,当 $F(\boldsymbol{x})\neq$

$F(\boldsymbol{y})$时，有 $F(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))<\max\{F(\boldsymbol{x}),F(\boldsymbol{y})\}$。

对 $\forall \lambda_1,\lambda_2,\beta\in[0,1]$，若 $g(\lambda_1)\neq g(\lambda_2)$，则 $F(\boldsymbol{y}+\lambda_1\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\neq F(\boldsymbol{y}+\lambda_2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$，即 $\lambda_1\neq\lambda_2$。故不妨假设 $\lambda_2<\lambda_1$。由引理 1 及定义 5 可知：

$$\begin{gathered}g(\beta\lambda_1+(1-\beta)\lambda_2)=F(\boldsymbol{y}+(\beta\lambda_1+(1-\beta)\lambda_2)\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\\ F(\boldsymbol{y}+\lambda_2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\beta(\lambda_1-\lambda_2)\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\\ F(\boldsymbol{y}+\lambda_2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\beta\alpha(\boldsymbol{y}+\lambda_1\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\lambda_2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\cdot\\ \eta(\boldsymbol{y}+\lambda_1\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\lambda_2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})))<\\ \max\{F(\boldsymbol{y}+\lambda_1\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})),F(\boldsymbol{y}+\lambda_2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\}=\max\{g(\lambda_1),g(\lambda_2)\}。\end{gathered}$$

因此，$g(\lambda)$是$[0,1]$上的半严格拟凸函数。　　证毕

下面给出拟 α-预不变凸性在约束非线性规划中的应用。

考虑如下约束非线性规划问题(P)：

$$\begin{gathered}\min F(\boldsymbol{x}),\\ \text{s.t. } g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0, i\in J=\{1,\cdots,m\},\boldsymbol{x}\in K。\end{gathered}$$

其中，K 是 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集，$F,g_i:K\to\mathbf{R},i\in J$，可行集 $D=\{\boldsymbol{x}\in K\mid g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0,i\in J\}$。

定理 4　设 K 是关于 α 和 η 的 α-不变凸集，$F:K\to\mathbf{R}$ 和 $g_i:K\to\mathbf{R}(i\in J)$在 K 上关于同一 α 和 η 是拟 α-预不变凸函数，如果 $\bar{\boldsymbol{x}}\in D$ 是问题(P)的局部最优解，那么 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(P)的全局最优解。

证明　由 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(P)的局部最优解可知：

$$F(\bar{\boldsymbol{x}})\leqslant F(\boldsymbol{x}),\forall \boldsymbol{x}\in D\cap N_\varepsilon(\bar{\boldsymbol{x}})。\tag{2}$$

若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是问题(P)的全局最优解，则存在点 $\boldsymbol{x}^*\in D$，使得

$$F(\boldsymbol{x}^*)<F(\bar{\boldsymbol{x}})。\tag{3}$$

由 $g_i:K\to\mathbf{R}(i\in J)$在 K 上关于同一 α 和 η 是拟 α-预不变凸函数，则对 $\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}^*\in D,\forall i\in J,\lambda\in[0,1]$，有

$$g_i(\bar{\boldsymbol{x}}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x}^*,\bar{\boldsymbol{x}})\eta(\boldsymbol{x}^*,\bar{\boldsymbol{x}}))\leqslant\max\{g_i(\bar{\boldsymbol{x}}),g_i(\boldsymbol{x}^*)\}\leqslant 0,$$

即 $\bar{\boldsymbol{x}}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x}^*,\bar{\boldsymbol{x}})\eta(\boldsymbol{x}^*,\bar{\boldsymbol{x}})\in D$。

根据 F 在 K 上关于同一 α 和 η 是拟 α-预不变凸函数可知：

$$F(\bar{\boldsymbol{x}}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x}^*,\bar{\boldsymbol{x}})\eta(\boldsymbol{x}^*,\bar{\boldsymbol{x}}))\leqslant\max\{F(\bar{\boldsymbol{x}}),F(\boldsymbol{x}^*)\}。\tag{4}$$

结合(3)，(4)式可得：

$$F(\bar{\boldsymbol{x}}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x}^*,\bar{\boldsymbol{x}})\eta(\boldsymbol{x}^*,\bar{\boldsymbol{x}}))<F(\bar{\boldsymbol{x}})。\tag{5}$$

当 $\lambda>0$ 充分小时，有 $\bar{\boldsymbol{x}}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x}^*,\bar{\boldsymbol{x}})\eta(\boldsymbol{x}^*,\bar{\boldsymbol{x}}\in D)\cap N_\varepsilon(\bar{\boldsymbol{x}})$。故(5)式与(2)式矛盾。　　证毕

下面给出例子来验证定理 4 的正确性。

例 2　令 $K=(-\infty,+\infty),\alpha(x,y)=1,F(x)=\begin{cases}-|x|,|x|\leqslant 1\\ -1,|x|>1\end{cases},g_1(x)=\begin{cases}0,x\geqslant 0\\ -1,x<0\end{cases},g_2(x)=\begin{cases}1,x\geqslant 0\\ -1,x<0\end{cases},\eta(x,y)=\begin{cases}x-y,x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ x-y,x<0,y<0\\ 1-y,x<0,y>0\\ -1-y,x>0,y<0\end{cases}$。

显然，$K=(-\infty,+\infty)$是关于 η 和 α 的 α-不变凸集。容易验证 $F(x),g_1(x),g_2(x)$均是 K 上关于同一 η 和 α 的拟 α-预不变凸函数。满足定理 4 的假设。

通过计算可得问题(P)的可行域 $D=(-\infty,0)$。然后，可计算得到 $x=-1$ 是问题(P)的局部最优解，同时也是(P)的全局最优解。

参考文献：

[1] WEIR T，MOND B.Preinvex functions in multiple objective optimization[J].Journal of Mathematical Analysis and Applications，1988，136(1)：29-38.

[2] WEIR T，JEYAKUMAR V.A class of nonconvex functions and mathematical programming[J].Bulletin of the Australian Mathematical Society，1988，38(2)：177-189.

[3] YANG X M，LI D.Semistrictly preinvex functions[J].Journal of Mathematical Analysis and Applications，2001，258

(1): 287-308.

[4] NOOR M A, NOOR K I. Some characterizations of strongly preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2006, 316(2): 697-706.

[5] TANG W M. On strictly and semistrictly quasi α-preinvex functions[J]. Journal of Computational Analysis & Applications, 2013, 15(8): 1391-1402.

[6] AVRIEL M, DIEWERT W E, SCHAIBLE S, et al. Generalized concavity[M]. New York: Plenum Press, 1988.

[7] 赵克全.预不变凸函数的一个等价条件[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2010,27(3):6-8.
ZHAO K Q. An equivalent condition of preinvex function [J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2010, 27(3): 6-8.

[8] BAZARAA M S, SHETTY C M. Nonlinear programming: theory and algorithms[M]. New York: John Wiley and Sons, 1979.

[9] NOOR M A. On generalized preinvex functions and monotonicities[J]. Journal of Inequality Pure Applied Mathematics, 2004, 5(4): 1-9.

[10] LIU C P. Some characterizations and applications on strongly α-preinvex and strongly α-invex functions[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2008, 4(4): 727-738.

[11] 王海英,符祖峰,何芝.α-预不变凸函数的若干性质[J].西南大学学报(自然科学版),2015,37(3):99-105.
WANG H Y, FU Z F, HE Z. Some properties of α-preinvex functions [J]. Journal of Southwest University (Natural Science Edition), 2015, 37(3): 99-105.

Operations Research and Cybernetics

The Quasi α-Preinvex Functions

LI Ting[1], PENG Zaiyun[2], LI Keke[3], TANG Ping[4]

(1. Fundamental Teaching Department, College of Business, Shanxi University, Taiyuan 030031;
2. College of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074;
3. College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331;
4. College of Mathematics and Finance, Chongqing University of Arts and Sciences, Chongqing 402160, China)

Abstract: [**Purposes**]The quasi α-preinvexity and its applications in optimization problems are mainly studied here. [**Methods**]With assumptions A and C, and give examples for validation. [**Findings**]Firstly, the sufficient and necessary conditions for quasi α-preinvexity, strictly quasi α-preinvexity and semistrictly quasi α-preinvexity are discussed under the suitable assumptions. Then, an important application of the quasi α-preinvex functions in nonlinear programming with constraints is obtained, and an example is given to illustrate the obtained result. [**Conclusions**]The obtained results enrich the study of quasi α-preinvex functions.

Keywords: quasi α-preinvex functions; strictly quasi α-preinvex functions; semistrictly quasi α-preinvex functions; nonlinear programming

(责任编辑 黄 颖)