2016 年度重庆市出版专项基金资助栏目

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20170436

集值优化问题广义近似解的线性标量化*

吴海琴, 刘学文, 罗 萍

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】对广义近似(弱)有效解的性质作进一步研究。【方法】利用线性标量化方法研究了集值优化问题广义近似(弱)有效解的刻画。【结果】建立了广义次似凸条件下的择一性定理,给出了广义弱近似解的一个标量化定理,并进一步研究了广义近似解(弱)有效解的一些性质。【结论】将集值函数 F 是凸的推广到次似凸的情形,并进一步完善了广义近似解的一些性质。

关键词:集值优化问题;广义近似解;标量化

中图分类号:O221.6 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2017)04-0013-04

近些年来,近似解是向量优化问题中的研究热点,主要原因是利用数值算法通常只能得到向量优化的近似解。同时,在非紧的条件下,向量优化问题的(弱)有效解和真有效解可能不存在,而近似(弱)有效解在较弱的条件下存在。因此,近似解的研究有非常重要的应用价值和意义。1979 年,Kutaladze[1]首次提出了向量优化问题的 ε-有效解的概念并研究了其相关性质。1984 年,Loridan[2]引入了一般向量优化问题的近似有效解和拟近似有效解的概念,利用标量化方法和 Ekeland 变分原理建立了这些近似解的最优条件。1986 年,White[3]提出了基于数值优化问题的近似解和向量优化问题的有效解的思想,对向量优化问题提出了 6 种新的近似解的概念,并首次利用标量化问题的近似解刻画向量优化问题的近似解。2006 年,Gutierrez 等人[4]利用 co-radiant 集定义了向量优化问题近似(弱)有效解的概念,研究了其相关性质和标量化特征。2011 年,Gao 等人[5]基于 Benson 真有效解思想,利用 co-radiant 集提出了向量优化问题的一类近似真有效解(称为(C,ε)-真有效解),给出了基本性质。

随着集值优化的发展,许多学者对集值优化问题近似解产生了浓厚的兴趣。1998 年,陈光亚等人[6]引进了集值优化问题的近似有效解;2000 年,戎卫东等人[7]讨论了集值映射向量优化问题 ε-有效解的,在广义锥次似凸的假设下,建立了该 ε-有效解的标量化问题。

综上所述,学者们主要研究的是向量优化问题和集值优化问题的有效解、弱有效解、近似有效解和弱近似有效解[5-13]。本文受文献[5,8-9]启发,利用线性标量化方法研究集值优化问题广义近似(弱)有效解的刻画,给出了广义弱近似解的一个等价性质,并进一步研究了广义近似解(弱)有效解的一些性质。

1 预备知识

设(X,d)是平凡的完备度量空间;Y 是局部凸的 Hausdorff 空间,记 Y^* 为 Y 的共轭空间;设 A 是 Y 中的非空子集,$\mathrm{cl}A$,$\mathrm{int}A$ 分别表示 A 的拓扑闭包和拓扑内部。由 A 生成的锥包定义为 $\mathrm{cone}A=\bigcup_{\lambda\geqslant 0}\lambda A=\{\lambda\boldsymbol{x}:\lambda\geqslant 0,\boldsymbol{x}\in A\}$;若 $A\cap -A=\{0\}$,则称 A 是点的;称集合 K 为锥当且仅当 $\mathrm{cone}K=K$;记 K^+,K^{+i} 为 K 的所有正泛函和严格正泛函,即 $K^+=\{l\in Y^*:\langle l,u\rangle\geqslant 0,\forall u\in K\}$,$K^{+i}=\{l\in Y^*:\langle l,u\rangle>0,\forall u\in K\}$。

考虑下面带约束的集值问题:

$$(\mathrm{VPC})\ \min_{x\in S}F(\boldsymbol{x}),$$

其中,$F:S\to 2^Y$,$\varnothing\neq S\subset X$,$(F(\boldsymbol{x})-\overline{\boldsymbol{y}}+\varepsilon\varphi(d(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}}))e)\cap -K\setminus\{0\}=\varnothing$。

* 收稿日期:2016-10-01 修回日期:2017-05-25 网络出版时间:2017-05-16 11:25

资助项目:国家自然科学基金(No.11301574;No.11271391)

第一作者简介:吴海琴,女,研究方向为最优化理论,E-mail:Haiqinwumath@163.com;通信作者:罗萍,副教授,E-mail:462774096@qq.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170516.1125.032.html

若无特别说明,总假设 K 是 Y 中的非空点凸锥。定义由 K 诱导出 Y 的偏序,即 $\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{y}\Leftrightarrow\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\in K$。

设 $G\subset Y$ 是一个非空子集,满足 $0\notin \mathrm{cl}G$,$G\cap -K=\varnothing$。设 $\varphi:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ 为一非降的实值函数,满足 $\varphi(0)=0$,$\varphi(t)>0$,记$\wp=(G,\varphi)$。对于任意给定的 $\boldsymbol{x}_0\in X$,定义集值映射 $\psi:X\to 2^Y$,$\psi_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x})=\varphi(d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0))G$。其中 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)$表示 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}_0$ 之间的距离。

定义 1[9] 设 $\varepsilon\geqslant 0$,则:1) 若存在 $\overline{\boldsymbol{y}}\in F(\overline{\boldsymbol{x}})$,使得 $\forall \boldsymbol{x}\in S$,$e\in G$,则称 $\overline{\boldsymbol{x}}\in S$ 是(VPC)关于$\wp$的广义近似有效解。记(VPC)关于$\wp$的全体广义近似解集为 $A_E(F,K,\wp,\varepsilon)$。AE 是全体广义近似解集,是一个集合。

2) 若存在 $\overline{\boldsymbol{y}}\in F(\overline{\boldsymbol{x}})$,使得$(F(\boldsymbol{x})-\overline{\boldsymbol{y}}+\varepsilon\varphi)d(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}}))e)\cap -\mathrm{int}K=\varnothing$,$\forall \boldsymbol{x}\in S$,$e\in G$,则称 $\overline{\boldsymbol{x}}\in S$ 是(VPC)关于$\wp$的广义近似弱有效解。记(VPC)关于$\wp$的全体广义近似弱有效解集为 $W_{AE}(F,K,\wp,\varepsilon)$。

引理 1[9] 设 X 是 Banach 空间,$G\subset K$ 是凸集,F 是凸的,且 φ 是正齐次次可加的,则以下结论有且仅有一个成立。

1) 存在 $\overline{\boldsymbol{x}}\in \boldsymbol{X}$,使得$(F(\boldsymbol{x})-\overline{\boldsymbol{y}}+\varepsilon\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}_0}(\overline{\boldsymbol{x}}))\cap -\mathrm{int}K\neq\varnothing$;

2) 存在 $l\in K^+\backslash\{0\}$,使得 $l(\boldsymbol{y}_0)\leqslant l(\boldsymbol{y})+\varepsilon\varphi(d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0))l(e)$,$\forall \boldsymbol{x}\in X$,$\boldsymbol{y}\in F(\boldsymbol{x})$,$e\in G$。

引理 2[7] 若 $\boldsymbol{y}^*\in K^+\backslash\{0\}$,且 $\boldsymbol{y}_0\in\mathrm{int}K$,则$\langle\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{y}^*\rangle>0$。

引理 3[5] 设 $\overline{\boldsymbol{x}}\in S$,$G\subset D$,$\ell=(G,\varphi)$,且 $\varepsilon\geqslant 0$,则 $A_E(f,D,\ell,0)\subset\bigcap_{\varepsilon>0}A_E(f,D,\ell,\varepsilon)$。

引理 4[9] 设 $\overline{\boldsymbol{x}}\in S$,$G\subset K$,$\wp=(G,\varphi)$,则:

1) $\bigcap_{\varepsilon>0}W_{A_E}(F,K,\wp,\varepsilon)\supset W_{A_E}(F,K,\wp,0)$;

2) $A_E(F,K,\wp,0)\subset\bigcap_{\varepsilon>0}A_E(F,K,\wp,\varepsilon)$。

2 广义近似解的线性标量化

现在考虑(VCP)问题的标量极小问题:$(\mathrm{P}_u)\ \min\limits_{x\in S}\langle F(\boldsymbol{x}),u\rangle$,$u\in K^+\backslash\{0\}$。

定义 2[10] 设 $K\subset Y$ 是一个凸锥,映射 $F:S\to 2^Y$,称 F 在 S 是关于 K 的次似凸函数,若 $F(S)+\mathrm{int}K$ 是凸集。

引理 5[8] 若 $F:S\to 2^Y$ 在 S 上是 K-次似凸的,当且仅当 $F(S)+\mathrm{int}K$ 是凸的。

注 1 文献[9]在 F 凸的情况下给了择一性定理,本文将结果推广到次似凸,给出了下面的结果。

定义 3 设 X 是 Banach 空间,$G\subset K$ 是凸集,F 在 S 上是 K-次似凸的,且 φ 是正齐次次可加的。任取 $\boldsymbol{x}_0\in S$,则 $F+\varphi_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x})$是凸集值映射。

注 2 类似于文献[9]中命题3的证明,可以证明 $F+\varphi_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x})$是凸集值映射。

定理 1 设 X 是 Banach 空间,$G\subset K$ 是凸集,F 在 S 上是 K-次似凸的,且 $\mathrm{int}K\neq\varnothing$,$\varphi$ 是正齐次次可加的,则以下结论有且仅有一个成立:

1) 存在 $\boldsymbol{x}\in S$,使得$(F(\boldsymbol{x})-\overline{\boldsymbol{y}}+\varepsilon\psi_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x}))\cap -\mathrm{int}K\neq\varnothing$;

2) 存在 $l\in K^+\backslash\{0\}$,使$\langle l,\boldsymbol{y}_0\rangle\leqslant\langle l,\boldsymbol{y}\rangle+\varepsilon\varphi(d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0))\langle l,e\rangle$,$\forall\boldsymbol{x}\in S$,$\boldsymbol{y}\in F(\boldsymbol{x})$,$e\in G$。

证明 易知若 1)成立,则 2)不成立,下证 1)不成立,2)成立。即对 $\boldsymbol{x}_0\in S$,$(F(\boldsymbol{x})-\overline{\boldsymbol{y}}+\varepsilon\psi_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x}))\cap -\mathrm{int}K=\varnothing$。由 K 是凸锥知,$\mathrm{int}K$ 也是凸锥,从而$(F(\boldsymbol{x})-\overline{\boldsymbol{y}}+\varepsilon\psi_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x})+\mathrm{int}K)\cap -\mathrm{int}K=\varnothing$。

又由引理5和定义3可知 $F(\boldsymbol{x})+\varepsilon\psi_{\boldsymbol{x}_0}+\mathrm{int}K$ 是凸集。由凸集分离定理知,存在 $l\in K^+\backslash\{0\}$,使得

$$\langle l,\boldsymbol{y}\rangle-\langle l,\overline{\boldsymbol{y}}\rangle+\varepsilon\varphi(d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0))\langle l,e\rangle+\langle l,k\rangle\geqslant\langle l,-q\rangle,\ \forall\boldsymbol{x}\in S,\boldsymbol{y}\in F(\boldsymbol{x}),k,q\in\mathrm{int}K。\tag{1}$$

下证 $l\in K^+\backslash\{0\}$。若不然,则存在 $k\in\mathrm{int}K$,使得$\langle l,k\rangle<0$。由 $\mathrm{int}K$ 是凸锥知,对上述 $\boldsymbol{y}$,q,e,对$\forall\lambda>0$,有

$$\langle l,\boldsymbol{y}\rangle-\langle l,\overline{\boldsymbol{y}}\rangle+\varepsilon\varphi(d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0))\langle l,e\rangle+\langle l,\lambda k\rangle\geqslant\langle l,-q\rangle,\ \forall\boldsymbol{x}\in S,\boldsymbol{y}\in F(\boldsymbol{x}),k,q\in\mathrm{int}K。\tag{2}$$

在(2)式中取 $\lambda\to+\infty$,即得$\langle l,-q\rangle=-\infty$,矛盾,故 $l\in K^+\backslash\{0\}$。在(1)式中 $k\to 0$,$q\to 0$,得:

$$\langle l,\overline{\boldsymbol{y}}\rangle\leqslant\langle l,\boldsymbol{y}\rangle+\varepsilon\varphi(d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0))\langle l,e\rangle,\ \forall\boldsymbol{x}\in S,\boldsymbol{y}\in F(\boldsymbol{x}),e\in G。$$

因此 2)成立。 证毕

定义 4 一个点 $\overline{\boldsymbol{x}}\in S$ 是问题(P_u)的一个$\langle\varepsilon,u\rangle$-广义近似最优解。若$\exists\,\overline{\boldsymbol{y}}\in F(\overline{\boldsymbol{x}})$使得

$$\langle\overline{\boldsymbol{y}},u\rangle\leqslant\langle\boldsymbol{y},u\rangle+\varepsilon\varphi(d(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}}))\langle u,e\rangle,\ \forall\boldsymbol{x}\in S,\ \forall\boldsymbol{y}\in F(\boldsymbol{x})。$$

注 3　在文献[5,8]用集值函数给出了(VP)问题的 ε-弱有效解的标量化定理。下面用相同的方法提出了关于(VPC)问题的广义近似弱有效解的标量化定理。

定理 2　设 $F:X\to 2^Y$ 在 S 上是 K-次似凸的，$G\subset K$ 是凸集，且 φ 是正齐次次可加的。则 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S$ 是(VCP)问题的广义近似弱有效解，当且仅当，若 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S$ 且存在 $u\in K^+\setminus\{0\}$，使得 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(P_u)的一个 $\langle\varepsilon,u\rangle$-广义近似最优解。

证明　设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(VCP)关于 $\wp$ 的广义近似弱有效解，则由定义 1 知 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S$，且 $\exists\,\bar{\boldsymbol{y}}\in F(\bar{\boldsymbol{x}})$ 使得

$$(\boldsymbol{y}-\bar{\boldsymbol{y}}+\varepsilon\varphi(d(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}))e)\cap -\mathrm{int}K=\varnothing,\ \forall\,\boldsymbol{x}\in S,e\in G,$$

即不存在 $\boldsymbol{x}_0\in S$，$\boldsymbol{y}_0\in F(\boldsymbol{x}_0)$，使得 $(\boldsymbol{y}_0-\bar{\boldsymbol{y}}+\varepsilon\varphi(d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0))e)\in -\mathrm{int}K$。也即，存在 $\boldsymbol{x}_0\in S$，使得

$$(F(\boldsymbol{x}_0)-\bar{\boldsymbol{y}}+\varepsilon\varphi(d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0))e)\cap -\mathrm{int}K\neq\varnothing$$

不成立。再由引理 2 可知，存在 $u\in K^+\setminus\{0\}$，使得 $\langle\bar{\boldsymbol{y}},u\rangle\leqslant\langle\hat{\boldsymbol{y}},u\rangle+\varepsilon\varphi(d(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}))\langle u,e\rangle$，$\forall\,\boldsymbol{x}\in S$，$\forall\,\hat{\boldsymbol{y}}\in F(\boldsymbol{x})$。因此，再由定义 2 知，$\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(P_u)问题的一个 $\langle\varepsilon,u\rangle$-广义近似最优解。

相反地，设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S$ 不是(VCP)问题的广义近似弱有效解，则对每一个 $\boldsymbol{y}\in F(\bar{\boldsymbol{x}})$，存在 $\boldsymbol{x}^1\in S$，且 $\boldsymbol{y}_0\in F(\boldsymbol{x}^1)$ 使得 $(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0+\varepsilon\varphi(d(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}))e)\in -\mathrm{int}K$。因为 $u\in K^+\setminus\{0\}$，从而，由引理 3 可知 $\langle\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0+\varepsilon\varphi(d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^1)),u\rangle<0$，所以 $\langle\boldsymbol{y},u\rangle+\varepsilon\varphi(d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^1))\langle e,u\rangle<\langle\boldsymbol{y}_0,u\rangle$。由定义 2 知，$\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是(P_u)问题的一个 $\langle\varepsilon,u\rangle$-广义近似最优解。证毕

3 广义近似解的一些性质

本节在文献[5,9]的基础上，通过对广义近似解的研究，进一步完善了广义近似解的一些性质。

在文献[5]证明了：设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S$，$G\subset D$，$\wp=(G,\varphi)$，且 $\varepsilon\geqslant 0$，则 $A_E(f,D,\wp,0)\subset\bigcap_{\varepsilon>0}A_E(f,D,\ell,\varepsilon)$。事实上，上述结论的反面也成立。

定理 3　设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S$，$G\subset D$，$\ell=(G,\varphi)$，且 $\varepsilon\geqslant 0$。则 $A_E(f,D,\ell,0)=\bigcap_{\varepsilon>0}A_E(f,D,\ell,\varepsilon)$。

证明　由引理 4 知 $A_E(f,D,\ell,0)\subset\bigcap_{\varepsilon>0}A_E(f,D,\ell,\varepsilon)$。因此只需证明

$$\bigcap_{\varepsilon>0}A_E(f,D,\ell,\varepsilon)\subset A_E(f,D,\ell,0)。$$

对 $\forall\,\boldsymbol{x}\in\bigcap_{\varepsilon>0}A_E(f,D,\ell,\varepsilon)$，则 $\exists\,\bar{\boldsymbol{y}}\in F(\bar{\boldsymbol{x}})$，使得 $(F(\boldsymbol{x})-\bar{\boldsymbol{y}}+\varepsilon\varphi(d(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}))e)\cap -\mathrm{int}K=\varnothing$，即 $(F(\boldsymbol{x})-\bar{\boldsymbol{y}})\cap(-\mathrm{int}K-\varepsilon\varphi(d(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})))=\varnothing$。又因为 K 是一个凸锥，所以

$$(F(\boldsymbol{x})-\bar{\boldsymbol{y}})\cap\mathrm{int}K=\varnothing;\tag{3}$$

若 $\bar{\boldsymbol{x}}\notin A_E(f,D,\ell,0)$，则对上述 $\bar{\boldsymbol{y}}$，$\exists\,\boldsymbol{x}'\in S$，使得

$$(F(\boldsymbol{x})-\bar{\boldsymbol{y}})\cap\mathrm{int}K\neq\varnothing。\tag{4}$$

(4)式与(3)式矛盾，故 $\bar{\boldsymbol{x}}\in A_E(f,D,\ell,0)$。因此 $A_E(f,D,\ell,0)=\bigcap_{\varepsilon>0}A_E(f,D,\ell,\varepsilon)$。　证毕

在文献[9]中得到结论：设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S$，$G\subset K$，$\wp=(G,\varphi)$，则：1) $\bigcap_{\varepsilon>0}W_{A_E}(F,K,\wp,\varepsilon)\supset W_{A_E}(F,K,\wp,\varepsilon)$；2) $A_E(F,K,\wp,0)\subset\bigcap_{\varepsilon>0}A_E(F,K,\wp,\varepsilon)$。事实上，上述包含关系的反面也成立。

定理 4　设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S$，$G\subset K$，$\wp=(G,\varphi)$，且 $\varepsilon\geqslant 0$。则：1) $\bigcap_{\varepsilon>0}W_{A_E}(F,K,\wp,\varepsilon)=W_{A_E}(F,K,\wp,0)$；2) $A_E(F,K,\wp,0)=\bigcap_{\varepsilon>0}A_E(F,K,\wp,\varepsilon)$。

定理 4 的证明与定理 3 的证明类似。

参考文献：

[1] KUTATELADZE S S. Convex ε-programming[J]. Soviet Mathematics Doklady, 1979, 20(2): 390-393.

[2] LORIDAN P. ε-solutions in vector minimization problems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1984, 43(2): 265-276.

[3] WHITE D J. Epsilon efficiency[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1986, 49(2): 319-337.

[4] GUTIÉRREZ C, JIMÉNEZ B, NOVO V. A unified approach and optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems[J]. SIAM Journal on Optimization, 2006, 17(3): 688-710.

[5] GAO Y, YANG X M, TEO K L. Optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems[J]. Journal of Industrial & Management Optimization, 2011, 7(2): 483-496.

[6] CHEN G Y, HUANG X X. Ekeland's ε-variational principle for set-valued mappings[J]. Math Method Oper Res, 1998, 48(1): 181-186.

[7] RONG W D, MA Y. ε-properly efficient solutions of vector optimization problems with set-valued maps[J]. OR Tran-

sctions,2000,4(4):21-32.

[8] RONG W D,WU Y N.ε-weak minimal solutions of vector optimization problems with set-valued maps[J].Journal of Optimization Theory and Applications,2000,106(3):569-579.

[9] 王定畅,仇秋生.集值优化问题广义近似解的性质和最优性条件[J].浙江师范大学学报(自然科学版),2015,38(2):165-162.
WANG D C,QIU Q S.The properties and optimality conditions for generalized approximate solutions to set-valued optimization problems[J].Journal of Zhejiang Normal University(Natural Science),2015,38(2):165-162.

[10] GUTIERREZ C,JIMENEZ B,NOVO V.On approximate solutions in vector optimization problems via scalarization [J].Computational Optimization and Applications,2006,35(3):305-324.

[11] 刘三阳,盛宝怀.非凸向量集值优化 Benson 真有效解的最优性条件与对偶[J].应用数学学报,2003,26(2):337-344.
LIU S Y,SHENG B H. The optimality conditions and duality of nonconvex vector set-value optimization with Benson proper efficiency[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica,2003,26(2):337-344.

[12] 徐义红,李太勇.集值优化问题超有效解的 kuhn-Tucker 最优性条件[J].运筹学学报,2006,10(3):85-90.
XU Y H,LI T Y.Kuhn-Tucker optimality conditions for set-valued optimization problem in the sense of superly efficient solutions[J].OR Transactions,2006,10(3):85-90.

[13] 王开荣,李健.集值优化问题弱尖锐解的最优性条件[J].四川大学学报(自然科学版),2015,52(2):223-227.
WANG K R,LI J.Optimality conditions for weak sharp minima in set-valued optimization[J].Journal of Sichuan University(Natural Science Edition),2015,52(2):223-227.

Operations Research and Cybernetics

Nonlinear Scalarization Theorems of Generalized Approximate Solutions in Set-valued Optimization Problems

WU Haiqin, LIU Xuewen, LUO Ping

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]The properties of generalized approximate (weakly) efficient solutions are mainly studied here. [**Methods**]The characterization of generalized approximate (weak) efficient solutions for set-valued optimization problems using linear scalar method. [**Findings**]The alternative theorem of generalized sub convex like condition is established, and the scalarization theorems of generalized weak approximate solutions is given, and some properties of the generalized approximate (weak) efficient solution are further studied. [**Conclusions**]The generalization of set-valued function F is convex to sub convex, and some properties of generalized approximate solutions are further improved.

Keywords: set-valued optimization; generalized approximate solution; scalarization

(责任编辑　黄　颖)