

分数阶 $RL_\alpha C_\beta$ 串联谐振及电路仿真实验*

王廷江

(西南大学 荣昌校区基础部, 重庆 荣昌 402460)

摘要:【目的】分析和总结分数阶 $RL_\alpha C_\beta$ 串联电路在谐振态及邻近态的特性。【方法】首先推导出谐振频率、品质因数、谐振态阻抗及电感和电容两端电压表达式,并进行了简要分析;其次,对阻抗模幅频特性、相频特性、电流及电压幅频特性进行了理论分析及数值仿真分析,得到一些基本结论;最后,用分抗链设计的等效分数阶电容模型及模拟电感方法设计的分数阶电感模型实现了该系统的仿真电路。【结果】Multisim 仿真结果与数值仿真分析基本一致,验证了相关结论的正确性。【结论】分数阶谐振更具普遍意义,谐振特性依赖于元件参数及分数阶次数,在奇数阶次附近特别敏感,随阶次变化,会出现电路感性和容性调换等现象。

关键词:分数阶;串联谐振;品质因数;相频特性;幅频特性

中图分类号:TM131.4;TP391.9

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2017)04-0135-06

分数阶微积分与整数阶微积分几乎同时产生,均已有 300 多年的发展历史,但分数阶微积分的研究与应用却远滞后于整数阶微积分,这主要是因前者具有复杂性且实际应用背景缺乏等原因所致。直到 Mandelbort^[1]指出在自然界中存在大量分维数的事实,才逐步引起关注。由于分数阶微积分积累了函数在一定范围内的整体信息,具有良好的“记忆”和“遗传”特性,更符合宏观自然界普遍连续的朴素哲学观点,所建立实际系统的数学模型比基于整数阶微积分建立的模型能更准确地反映物理本质,加之计算机科学的快速发展和越来越多分数阶现象被发现,使得分数阶微积分近年来在诸多领域有很好的研究与应用。由分数阶电路元件组成的网络研究就是其中之一,相关研究十分活跃^[2-14]。

本研究将 RLC 串联谐振推广到分数阶,并且推广到假分数阶,就分数阶次数及元件参数对 $RL_\alpha C_\beta$ 串联电路在谐振态及邻近态的影响进行了数值仿真分析。采用分抗链和模拟法相结合设计出分数阶电容和电感的等效电路模型,此设计方案便于改变分数阶次及元件参数,从而方便验证二者对电路工作特性的影响。通过数值仿真分析及电路实验仿真结果的相互佐证,得到该谐振的一些基本结论,如:在参数不变时,同一阶次范围内,奇数附近和偶数附近阶次的电路特性有很大差异,且阶次逼近偶数阶,电路不发生谐振;每跨越一个整数阶,电路的感性和容性特性会出现调换现象;在阶次不变时,元件参数对电路特性也有很大影响,甚至可以使电路不发生谐振;等等。

1 $RL_\alpha C_\beta$ 串联电路谐振态特性

$RL_\alpha C_\beta$ 串联电路如图 1 所示。图中 R, L_α, C_β 为电路元件, α, β 分别为电感、电容的分数阶数。

1.1 谐振频率

在频率为 ω 的正弦交流电源作用下,图 1 所示电路阻抗为:

$$Z(j\omega, \alpha, \beta) = \left[R + \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^\alpha L + \frac{\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\omega^\beta C} \right] + j \left[\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^\alpha L - \frac{\sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\omega^\beta C} \right] \quad (1)$$

当 $\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^\alpha L - \frac{\sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\omega^\beta C} = 0$ 时,电路发生谐振,谐振频率为:

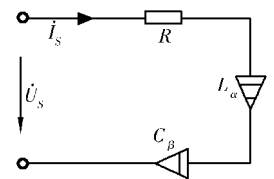


图 1 $RL_\alpha C_\beta$ 串联电路
Fig. 1 $RL_\alpha C_\beta$ series circuit

* 收稿日期:2016-04-30 修回日期:2017-04-28 网络出版时间:2017-5-16 11:27

资助项目:西南大学实验技术研究项目(No.SYJ2016058);国家自然科学基金(No.31201807)

第一作者简介:王廷江,男,副教授,研究方向为电工理论与新技术、生物电子电路、非线性电路与系统,E-mail:wjtj1969@163.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170516.1127.072.html>

$$\omega_0 = \left(\frac{\sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)LC} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \quad (2)$$

其中,当 $\alpha=\beta=1$ 时,即为整数阶谐振频率表达式。

1.2 品质因数

由(1)式,取 $\alpha=\beta$,可得品质因数

$$Q = \frac{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\sqrt{\frac{CR^2}{L} + 2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}}. \quad (3)$$

由(3)式,当 $\alpha=1$ 时,则 $Q = \sqrt{\frac{L}{CR^2}}$ 为整数阶 RLC 串联谐振的品质因数;当 R, L, C 不变且 $0 < \alpha < 1$ 时,品质因数 Q 随 α 增大而增大;当 $\alpha > 1$ 时,取适当 R, L, C 值,可出现品质因数 $Q \rightarrow \infty$,且具有周期性。

1.3 谐振态阻抗

由(1)式,取 $\alpha=\beta$,可得谐振态阻抗

$$Z_0(j\omega_0, \alpha, \alpha) = R + 2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (4)$$

由(4)式,当 $\alpha=1$ 时, $Z_0(j\omega_0, \alpha, \alpha) = R$,为整数阶谐振态阻抗值;当 R, L, C 不变,在 α 逼近奇数时, $Z_0(j\omega_0, \alpha, \alpha) \rightarrow R$, α 逼近偶数时, $Z_0(j\omega_0, \alpha, \alpha) \rightarrow R \pm 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 。

1.4 谐振态电压

图 1 所示电路在有效值为 U_s 的正弦交流电压源的作用下发生谐振时,电感、电容两端电压分别为:

$$U_{0L} = \frac{U_s}{|Z_0(j\omega_0, \alpha, \beta)|} |Z_{0L}(j\omega_0, \alpha)|, \quad (5)$$

$$U_{0C} = \frac{U_s}{|Z_0(j\omega_0, \alpha, \beta)|} |Z_{0C}(j\omega_0, \beta)|. \quad (6)$$

(5), (6)两式中的 $|Z_{0L}(j\omega_0, \alpha)|$, $|Z_{0C}(j\omega_0, \beta)|$ 分别为谐振态电感、电容阻抗模。

由(5), (6)式,取 $\alpha=\beta$,并结合品质因数表达式(3)式可得:

$$\frac{U_{0L}}{U_s} = \frac{U_{0C}}{U_s} = \frac{Q}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}. \quad (7)$$

利用(7)式可定义品质因数,当 $\alpha=1$ 时, $\frac{U_{0L}}{U_s} = \frac{U_{0C}}{U_s} = Q$,为整数阶 RLC 串联谐振品质因数。

2 阻抗模幅频特性

由(1)式可得图 1 所示电路阻抗模

$$|Z(j\omega, \alpha, \beta)| = \left[\left(R + \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^\alpha L + \frac{\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\omega^\beta C} \right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^\alpha L - \frac{\sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\omega^\beta C} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (8)$$

取 $\alpha=\beta$, $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$,则(8)式变为:

$$|Z(j\omega, \alpha, \alpha)| = \left[R^2 + \frac{L}{C}\eta^{2\alpha} + \frac{L}{C}\eta^{-2\alpha} + 2R\sqrt{\frac{L}{C}}\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\eta^\alpha + 2R\sqrt{\frac{L}{C}}\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\eta^{-\alpha} + \frac{2L}{C}\cos(\alpha\pi) \right]^{1/2}. \quad (9)$$

由(9)式,可作如下推断:

1) 在 R, L, C 不变时,当 $\alpha \rightarrow 0$, $|Z(j\omega, \alpha, \alpha)| \rightarrow R + 2\sqrt{\frac{L}{C}}$,阻抗与频率无关;当 $\alpha \rightarrow$ 奇数阶, $|Z(j\omega, \alpha, \alpha)| \rightarrow$

$\left[R^2 + \frac{L}{C} \eta^{2\alpha} + \frac{L}{C} \eta^{-2\alpha} - \frac{2L}{C} \right]^{1/2}$, 在 $\eta=1$ 时, 有最小值 R ;

2) 取适当的 R, L, C, α , 使得 $|Z(j\omega, \alpha, \alpha)|$ 有极值, 则极值出现在 $\eta=1$ 处; 当 $\eta \rightarrow 0$ 或 $\eta \rightarrow \infty$ 时, 可以得到 $|Z(j\omega, \alpha, \alpha)| \rightarrow \infty$ 。

由(9)式, 取 $R=1 \Omega, L=3 \text{ mH}, C=100 \mu\text{F}$, 不同阶次范围阻抗模幅频特性如图 2 所示。最小值出现在 $\eta=1$ 处, 在同一阶次范围内, 阶次越靠近奇数, 其最小值越小, 越靠近偶数, 最小值越大, 甚至无最小值, 其他阶次范围也有类似特征; 改变元件参数值, 当满

足 $\sqrt{\frac{CR^2}{L}}$ 较小时, 也有类似特征。

3 相频特性

由(1)式可得阻抗相位表达式

$$\varphi(Z(j\omega, \alpha, \beta)) = \arctan \left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) LC\omega^{\alpha+\beta} - \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) LC\omega^{\alpha+\beta} + \omega^\beta RC + \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)} \right) \quad (10)$$

取 $\alpha=\beta, \eta=\frac{\omega}{\omega_0}$, 并作适当变换可得

$$\varphi(Z(j\omega, \alpha, \alpha)) = \arctan \left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \eta^{2\alpha} - \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \eta^{2\alpha} + \sqrt{\frac{CR^2}{L}} \eta^\alpha + \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \right) \quad (11)$$

保持参数不变, 令 $\sqrt{\frac{CR^2}{L}} = 0.001$,

不同阶次范围内相频特性如图 3 所示。在 $\eta=1, \varphi(Z(j\omega, \alpha, \alpha))=0$; 在同一阶次范围内, 分数阶次越靠近奇数, 偏离谐振态时电路感性或容性越强, 反之越弱; 每跨越一个整数阶, 偏离谐振态电路的感性和容性却发生调换。其他阶次范围相频特性也有上述类似特征。阶次不变, 改变元件参数, 当 $\sqrt{\frac{CR^2}{L}}$ 越小, 偏离谐振态电路的感性或容性越强, 反之越弱, 甚至电路呈电阻特性。

4 电流、电压幅频特性

图 1 所示电路在正弦交流电压源 (有效值为 U_s , 频率为 ω) 作用下电流为 $I_s = \frac{U_s}{|Z(j\omega, \alpha, \alpha)|}$, 式中 $|Z(j\omega, \alpha, \alpha)|$ 为总阻抗模。

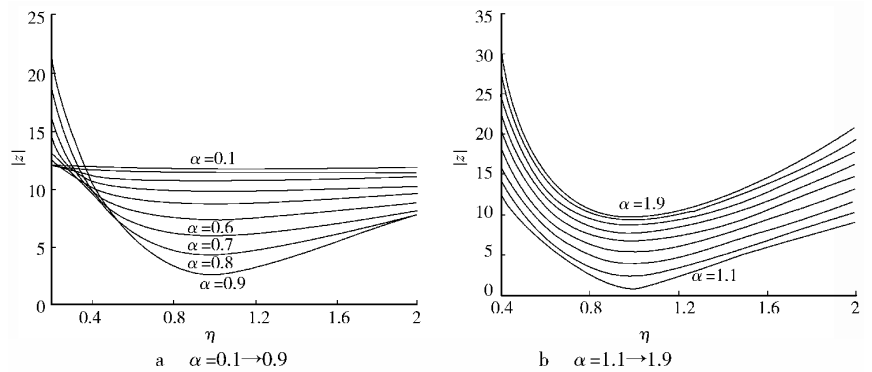


图 2 阻抗模幅频特性

Fig. 2 The amplitude-frequency characteristic of impedance

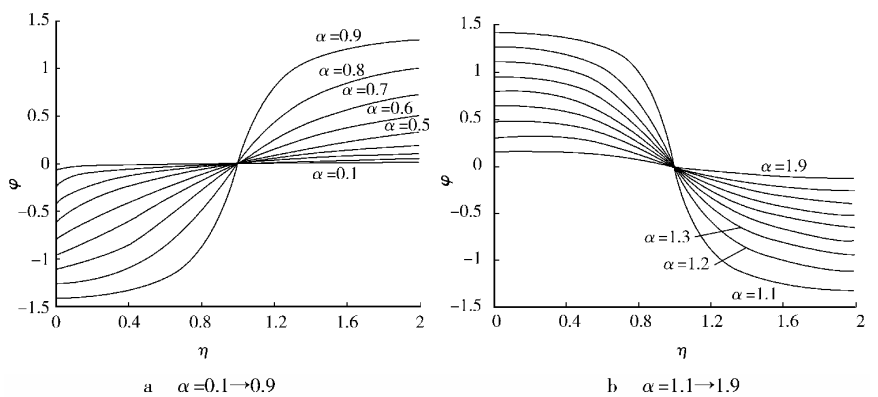


图 3 相频特性

Fig. 3 The phase-frequency characteristic

$$\frac{I_s}{U_s} = \left[R^2 + \frac{L}{C} \eta^{2\alpha} + \frac{L}{C} \eta^{-2\alpha} + 2R \sqrt{\frac{L}{C}} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \eta^\alpha + 2R \sqrt{\frac{L}{C}} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \eta^{-\alpha} + \frac{2L}{C} \cos(\alpha\pi) \right]^{-1/2} \quad (12)$$

电感的阻抗模为 $|Z_L(j\omega, \alpha)| = \sqrt{\frac{L}{C}} \eta^\alpha$ (式中 $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$), 由 $\frac{U_L}{U_s} = \frac{|Z_L(j\omega, \alpha)|}{|Z(j\omega, \alpha)|}$ 可得

$$\frac{U_L}{U_s} = \left[1 + \frac{CR^2}{L} \eta^{-2\alpha} + \eta^{-4\alpha} + 2R \sqrt{\frac{C}{L}} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \eta^{-\alpha} + 2R \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \eta^{-3\alpha} + 2 \cos(\alpha\pi) \eta^{-2\alpha} \right]^{-1/2} \quad (13)$$

同理可得

$$\frac{U_C}{U_s} = \left[1 + \frac{CR^2}{L} \eta^{2\alpha} + \eta^{4\alpha} + 2R \sqrt{\frac{C}{L}} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \eta^{3\alpha} + 2R \sqrt{\frac{C}{L}} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \eta^\alpha + 2 \cos(\alpha\pi) \eta^{2\alpha} \right]^{-1/2} \quad (14)$$

由(12),(13),(14)式,在分数阶次及元件参数不变时,可作如下推断:

1) 当 $\eta=1$ 时,所得谐振态电流、电感和电容电压表达式与在谐振态推导结果吻合;

2) 因 $\left. \frac{d\left(\frac{I_s}{U_s}\right)}{d\eta} \right|_{\eta=1} = 0, \left. \frac{d\left(\frac{U_L}{U_s}\right)}{d\eta} \right|_{\eta=1} > 0, \left. \frac{d\left(\frac{U_C}{U_s}\right)}{d\eta} \right|_{\eta=1} < 0$, 所以电流的最大值出现在谐振态,而电感电压最大值

对应频率高于谐振频率,电容电压最大值对应频率低于谐振频率;

3) 当 $\eta \rightarrow 0$ 时, $\frac{I_s}{U_s} \rightarrow 0, \frac{U_L}{U_s} \rightarrow 0, \frac{U_C}{U_s} \rightarrow 1$, 图 1 中电容 C 相当于开路,电感 L 相当于短路;

4) 当 $\eta \rightarrow \infty$ 时, $\frac{I_s}{U_s} \rightarrow 0, \frac{U_L}{U_s} \rightarrow 1, \frac{U_C}{U_s} \rightarrow 0$, 图 1 中电容 C 相当于短路,电感 L 相当开路。

由(12),(13),(14)式,取 $R=1 \Omega, L=3 \text{ mH}, C=100 \mu\text{F}$, 在 $\alpha=0.1 \rightarrow 0.9$ 范围内的幅频特性如图 4 所示。图示效果与上述推断吻合。在同一阶次范围内,分数阶次越靠近奇数,峰值越大,通频带越窄,逼近偶数,不出现峰值;不同阶次范围相比,峰值和通频带都有较大的变化。若改变元件参数,幅频特性也有上述特征。

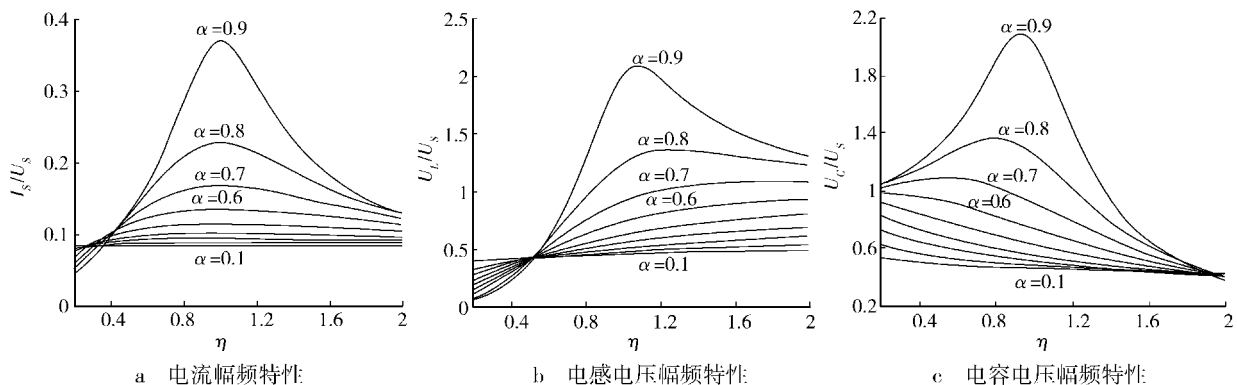


图 4 电流、电压幅频特性

Fig. 4 The amplitude-frequency characteristics of current and voltage

5 电路仿真实验

图 1 所示电路中,电源选择有效值为 1 V 的正弦交流电压源,取 $\alpha=\beta=0.8, R=1 \Omega, L_\alpha=3 \text{ mH}, C_\beta=100 \mu\text{F}$, 分数阶电容采用分抗链设计,等效电路模型如图 5 所示。图 5 中各元件参数分别为^[11]: $R_{C1}=20 \text{ m}\Omega, C_1=6.5 \mu\text{F}; R_{C2}=160 \text{ m}\Omega, C_2=13.98 \mu\text{F}; R_{C3}=1.5 \Omega, C_3=24.5 \mu\text{F}; R_{C4}=14.6 \Omega, C_4=43.2 \mu\text{F}; R_{C5}=141 \Omega, C_5=76.2 \mu\text{F}; R_{C6}=1.36 \text{ k}\Omega, C_6=134.2 \mu\text{F}; R_{C7}=13.131 \text{ k}\Omega, C_7=236.6 \mu\text{F}; R_{C8}=126.742 \text{ k}\Omega, C_8=417 \mu\text{F}; R_{C9}=1.222 \text{ M}\Omega, C_9=736 \mu\text{F}; R_{C10}=102.85 \text{ M}\Omega, C_{10}=560 \mu\text{F}$ 。分数阶电感则基于设计的分数阶电容由模拟法设计(图 6)。改变 $R_1 \sim R_4$ 值即可改变元件 L 参数。通过 Multisim 仿真所得系列结果如图 7 所示。图 7a, b, c 中的曲线分别与图 4a, b, c 中 $\alpha=0.8$ 所对应曲线基本吻合。图 7d, e, f 分别为谐振态电流(i_{0s})、电感和电容电压(u_{oL}, u_{oC})与电源电压(u_s)波形图,对应的谐振频率与(2)式所求结果基本吻合,约 1.8 kHz。若改变元件参数或

改变阶次数,实验仿真结果与数值仿真结果也基本吻合。

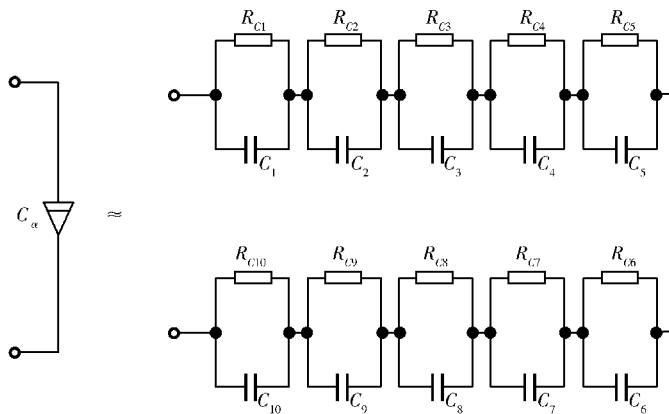


图 5 分数阶电容等效电路模型

Fig. 5 The circuit model of fractional order capacitor

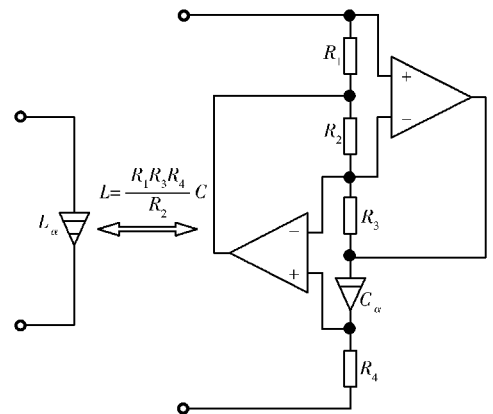


图 6 分数阶电感的等效电路

Fig. 6 The equivalent circuit of fractional order inductor

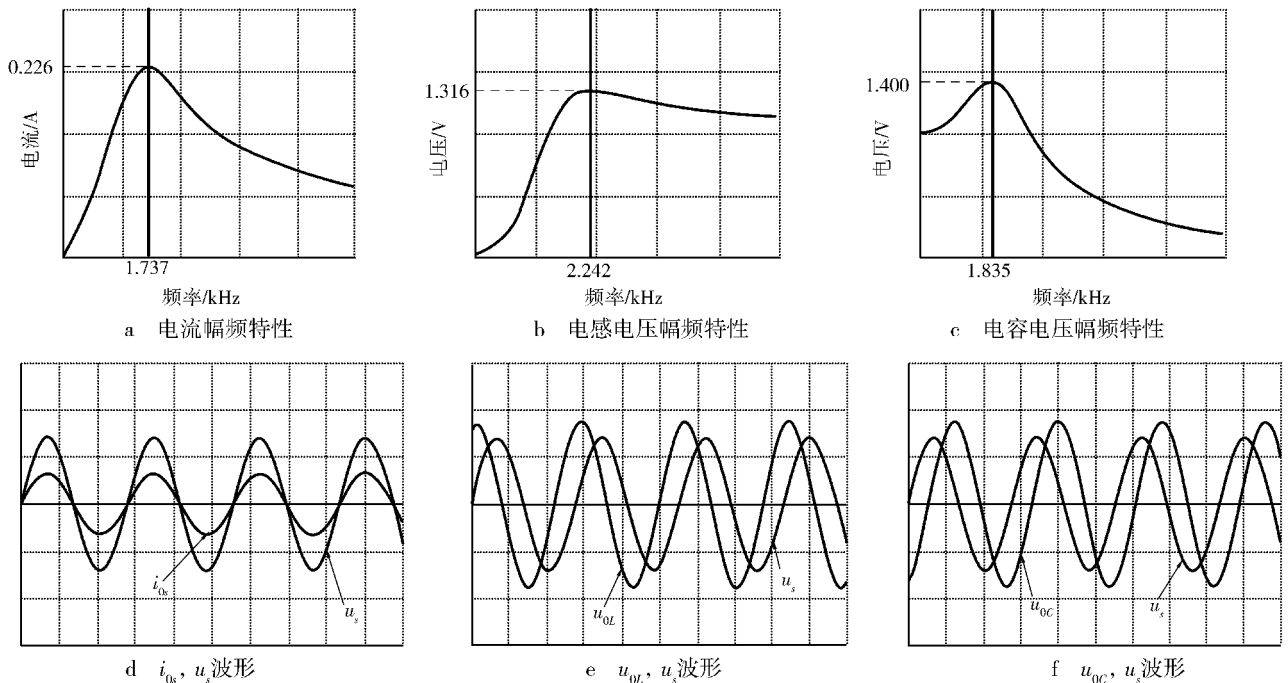


图 7 电路实验仿真系列图

Fig. 7 The diagrams of circuit experiment simulation

6 结论

通过对分数阶 $RL_\alpha C_\beta$ 串联谐振的研究,得到了该谐振的谐振频率、品质因数、谐振态阻抗及电感和电容电压表达式。提出了定义该分数阶谐振品质因数的一种方法((7)式)。分数阶谐振更具普遍意义,而整数阶谐振只是一种特例。电路谐振特性依赖于分数阶的阶数,以及元件参数。在参数不变时,分数阶的阶次越接近奇数,谐振越强,但频带越窄,反之越弱,甚至不发生谐振;在分数阶的阶次不变时,参数变化,如使 $\frac{CR^2}{L}$ 增大,谐振越弱,甚至不发生谐振,反之越强。偏离谐振态电路的感性或容性的强弱,也取决于分数阶的阶数,以及元件参数。在参数不变时,分数阶的阶次越接近奇数,感性或容性越强,反之越弱;在分数阶的阶次不变时,元件参数变化,如使 $\frac{CR^2}{L}$ 增大,感性或容性越弱,反之越强。每跨越一个整数阶,会出现电路感性和容性交替变化。所得到的一系列结论,将为后续深入研究及实际工程应用提供参考。

参考文献:

- [1] MANDELBORT B B. The fractal geometry of nature[M]. New York: Freeman W H and Company, 1983.
- [2] RADWAN A G, SALAMA K N. Passive and active elements using fractional $L_\beta C_\alpha$ circuit[J]. IEEE Transaction on Circuit and Systems I: Regular Papers, 2011, 58(10): 2388-2397.
- [3] TENREIRO M J A, GALHANO A M S F. Fractional order inductive phenomena based on the skin effect[J]. Nonlin Dyn, 2012, 68: 107-115.
- [4] CHEN L P, CHAI Y, WU R C. Dynamic analysis of a class of fractional-order neural networks with delay[J]. Neuro-computing, 2013, 111(2): 190-194.
- [5] WU R C, HEIX D, CHEN L P. Finite-time stability of fractional-order neural networks with delay[J]. Communications in Theoretical Physics, 2013, 60(2): 189-193.
- [6] CHEN J, ZENG Z, JIANG P. Global Mittag-Leffler stability and synchronization of memristor-based fractional-order neural networks[J]. Neural Networks, 2014, 51: 1-8.
- [7] ZHANG D L, TANG Y G, GUAN X P. Optimum design of fractional order PID controller for an AVR system using an improved artificial beecolony algorithm[J]. Acta Automatica Sinica, 2014, 40(5): 973-980.
- [8] 闫丽梅, 祝玉松, 徐建军, 等. 基于分数阶微积分理论的线路模型建模方法[J]. 电工技术学报, 2014, 29(9): 260-268.
- YAN L M, ZHUY S, XU J J, et al. Transmission lines modeling method based on fractional order calculus theory[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2014, 29(9): 260-268.
- [9] 谭程, 梁志珊. 电感电流伪连续模式下 Boost 变换器的分数阶建模与分析[J]. 物理学报, 2014, 63(7): 070502.
- TAN C, LIANG Z S. Modeling and simulation analysis of fractional-order boost converter in pseudo-continuous conduction mode[J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(7): 070502.
- [10] 刁利杰, 张小飞, 陈帝伊. 分数阶并联 $RL_\alpha C_\beta$ 电路[J]. 物理学报, 2014, 63(3): 038401.
- DIAO L J, ZHANG X F, CHEN D Y. Fractional-order multiple $RL_\alpha C_\beta$ circuit[J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(3): 038401.
- [11] 余战波. 分数阶 T 型 $L_\alpha C_\beta$ 电路仿真研究[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(2): 141-147.
- YU Z B. Numerical simulation of a T-shaped $L_\alpha C_\beta$ fractional circuit[J]. Journal of Southwest University (Natural Science Edition), 2015, 37(2): 141-147.
- [12] ZHOU K, CHEN D Y, ZHANG X, et al. Fractional-order three-dimensional $\Delta \times n$ circuit network [J]. IEEE Transactions on Circuit and Systems, IEEE Transactions on Circuit and System I-regular papers, 2015, 62(10): 2401-2410.
- [13] ZHOU R, ZHANG R F, CHEN D Y. Fractional-order $L_\beta C_\alpha$ low-pass filter circuit[J]. Journal of Electrical Engineering & Technology, 2015, 10(4): 1597-1609.
- [14] ZHOU R, CHEN D Y, HERBERT H C. Fractional-order $2 \times n$ RLC circuit network[J]. Journal of Circuits, Systems and Computers, 2015, 24(9): 1550142.

Resonance in Series Fractional-order $RL_\alpha C_\beta$ and Circuit Simulation

WANG Tingjiang

(Department of Basic Science Rongchang Campus, Southwest University, Rongchang Chongqing 402460, China)

Abstract: [Purposes] The characteristics of the resonant state and the neighboring states about series fractional-order $RL_\alpha C_\beta$ circuit are analyzed and summarized here. [Methods] Firstly, the expressions of resonance frequency, quality factor, resonant state impedance, and inductance and capacitance voltage are derived and concisely analyzed. Secondly, the theoretical analysis and numerical simulation analysis of impedance amplitude frequency characteristics, phase frequency characteristics, current and voltage amplitude frequency characteristics are carried out and get some basic conclusions. Finally, on the basis of the fractance chain capacitor model and simulated inductance, a realizing circuit is designed. [Findings] Multisim simulation results are in agreement with the numerical simulation analysis, and the correctness of the related conclusions is verified. [Conclusions] Fractional order resonance more universal significance, resonant characteristics depend on the device parameters and fractional order number, near the odd-order times especially sensitive. There will be the exchange phenomenon such as inductance and capacitive characteristic, with the order change.

Keywords: fractional-order; series resonance; quality factor; phase-frequency characteristic; amplitude-frequency characteristic

(责任编辑 许甲)