2016 年度重庆市出版专项基金资助栏目　　DOI:10.11721/cqnuj20170619

运筹学与控制论

多目标优化近似解的一些非线性标量化性质*

徐威娜，朱　巧，赵克全
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】提出多目标优化问题近似解的定义,并对它的性质进行讨论。【方法】利用一类广义切比雪夫范数标量化模型对多目标优化近似解进行研究。【结果】建立了多目标优化问题 ε-弱有效解和 ε-真有效解的一些非线性标量化结果。【结论】得到的主要结果推广了一些已有工作。

关键词:多目标优化;非线性标量化;ε-真有效解;ε-弱有效解
中图分类号:O221.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2017)06-0007-04

多目标优化理论与方法在经济管理、交通运输、生态保护与数据处理等诸多领域中都具有十分广泛的应用。关于多目标优化问题的相关研究已取得了大量的研究成果[1-5]。其中关于解的定义及性质方面的研究是多目标优化问题中十分重要的研究方向。弱有效解与有效解是多目标优化领域中两类很重要的解概念。然而,由于多目标优化问题的有效解集和弱有效解集可能很大,且可能具有一些不太好的性质,一些学者相继提出了各种类型的真有效解。特别地,1968 年,Geoffrion[6]提出了 G-真有效解的定义并研究了这类真有效解的一些性质。

标量化方法是研究多目标优化问题解性质的重要方法之一。伴随着各类解概念的发展,一些学者对多目标优化问题各类解的标量化性质展开研究。特别地,1983 年,Choo 和 Atkins[7]提出了一类广义切比雪夫范数标量化方法,建立了多目标优化问题 G-真有效解的非线性标量化结果。1987 年,Ignacy[8]进一步对 Choo 和 Atkins 提出的标量化方法进行了修正,获得了多目标优化问题有效解的非线性标量化性质。

在实际生产和生活中,多目标优化问题的(弱)有效解和真有效解可能不存在。因此,如何提出多目标优化问题的近似解定义并研究它的性质具有非常重要的理论意义与应用价值。近年来,对多目标优化问题各类近似解及其性质研究已经引起了一些学者的关注,并取得了一些重要成果。目前为止,一些学者已经对多目标优化问题的 ε-弱有效解和 ε-真有效解的线性与非线性标量化性质开展了一些研究[9-13]。特别地,夏远梅等人[13]利用一类非线性标量化函数建立了多目标优化中 ε-真有效解的一个非线性标量化性质。其他一些近似解及性质研究见文献[14-15]等。

受文献[4,7]等研究工作的启发,本文利用一类广义切比雪夫范数标量化方法进一步建立了多目标优化问题 ε-弱有效解和 ε-真有效解的一类非线性标量化性质。所得到的主要结果推广了多目标优化中关于精确解的一些非线性标量化结果到近似解情形。

1 预备知识

本部分主要介绍本文所需要的一些基本定义。

定义 1[7]　设 $\beta\in\mathbf{R}^L$ 且 $\alpha\in\mathbf{R}$,定义范数 $\|\cdot\|_\beta^\alpha$ 为 $\|y\|_\beta^\alpha=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i|(\boldsymbol{I}_\alpha^{-1}y)_i|$,其中 $\boldsymbol{I}_\alpha$ 是 $L\times L$ 矩阵且满足 $(\boldsymbol{I}_\alpha)_{ij}=\begin{cases}1,i=j\\ \alpha,i\neq j\end{cases}$。

注 1　本文假定 α 的取值范围为 $\left(-\dfrac{1}{2L},0\right]$。

* **收稿日期**:2017-02-28　**修回日期**:2017-04-14　**网络出版时间**:2017-11-10 15:35
资助项目:国家自然科学基金(No.11431004;No.11671062;No.11271391);重庆市基础与前沿研究计划项目(No.cstc2015jcyjA00027);重庆市教委科学技术研究项目(No.KJ1500303)
第一作者简介:徐威娜,女,研究方向为多目标优化理论与方法,E-mail:doris_xwn@163.com;**通信作者**:赵克全,教授,E-mail:kequanz@163.com
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20171110.1535.004.html

本文考虑如下多目标问题

$$(\mathrm{MOP})\ \min f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_L(x)),$$
$$\text{s.t. } x\in S\subseteq \mathbf{R}^n。$$

对任意的 $y,z\in\mathbf{R}^n$,考虑如下序关系:

$$y\leqq z\Leftrightarrow z-y\in\mathbf{R}^n;y<z\Leftrightarrow z-y\in \mathrm{int}\ \mathbf{R}^n;y\leqslant z\Leftrightarrow z-y\in\mathbf{R}^n\backslash\{0\}。$$

定义 2[9] 设 $\varepsilon\geqq 0$,称 $\hat{x}\in S$ 为(MOP)的:1) ε-弱有效解,如果不存在 $x\in S$ 使得 $f(x)<f(\hat{x})-\varepsilon$;2) ε-有效解,如果不存在 $x\in S$ 使得 $f(x)\leqslant f(\hat{x})-\varepsilon$ 且 $f(x)\neq f(\hat{x})-\varepsilon$。

定义 3[10] 设 $\varepsilon\geqq 0$,$\hat{x}\in S$ 称为(MOP)的 ε-真有效解,如果 $\hat{x}$ 是 ε-有效解且存在 $M>0$,对所有满足 $f_i(x)<f_i(\hat{x})-\varepsilon_i$ 的 i 和 x,存在 $j\neq i$ 使得 $f_j(\hat{x})-\varepsilon_j<f_j(x)$ 且满足 $\dfrac{f_i(\hat{x})-f_i(x)-\varepsilon_i}{f_j(x)-f_j(\hat{x})+\varepsilon_j}\leqslant M$。

本文考虑如下广义切比雪夫范数标量化模型:

$$(\mathrm{P}\beta\alpha)\ \min_{x\in S}\ \|f(x)-u^*\|_\beta^\alpha。$$

当 $\alpha=0$ 时,$(\mathrm{P}\beta\alpha)$退化为$(\mathrm{P}\beta\alpha1)$ $\min\limits_{x\in S}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i(f_i(x)-u_i^*)$,其中 $u_i^*=\min\limits_{x\in S}f_i(x)-\tau$,$\forall i=1,\cdots,L$,$\tau$ 是充分小正数。

设 $\varepsilon\geqslant 0$,称 $\bar{x}$ 是标量化问题$(\mathrm{P}\beta\alpha)$的 ε-最优解,若对任意的 $x\in S$,$\|f(x)-u^*\|_\beta^\alpha\geqslant\|f(\bar{x})-u^*\|_\beta^\alpha-\varepsilon$。

定理 1 若 $-\dfrac{1}{2L}<\alpha\leqslant 0$,则 $\boldsymbol{I}_\alpha$ 是非奇异矩阵,且逆矩阵 $\boldsymbol{I}_\alpha^{-1}$ 中每一项都大于或等于 0。

证明 如果 $\alpha=0$,则由 $\boldsymbol{I}_\alpha$ 的定义可知,$\boldsymbol{I}_\alpha$ 是单位矩阵,结论显然成立;如果 $-\dfrac{1}{2L}<\alpha<0$,则由文献[7]中的定理 2.1 可知,$\boldsymbol{I}_\alpha^{-1}$ 中每项严格大于 0。 证毕

2 ε-弱(真)有效解的非线性标量化性质

下面主要利用广义切比雪夫范数标量化模型$(\mathrm{P}\beta\alpha)$给出(MOP)的 ε-弱有效解和 ε-真有效解的非线性标量化结果。

定理 2 设 $\varepsilon\geqq 0$,若存在 $\beta>0$ 满足 $0\leqslant\bar{\varepsilon}\leqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i\varepsilon_i$ 且 $\hat{x}\in S$ 是$(\mathrm{P}\beta\alpha1)$的 $\bar{\varepsilon}$-最优解,则 $\hat{x}$ 是(MOP)的 ε-弱有效解。

证明 假定 $\hat{x}$ 不是(MOP)的 ε-弱有效解,则存在 $\bar{x}\in S$ 使得 $f(\bar{x})<f(\hat{x})-\varepsilon$。从而对任意的 $i\in\{1,\cdots,L\}$ 有 $\beta_i(f_i(\bar{x})-u_i^*)<\beta_i(f_i(\hat{x})-u_i^*-\varepsilon_i)$。

进一步,由 $0\leqslant\bar{\varepsilon}\leqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i\varepsilon_i$ 可知:

$$\max_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i(f_i(\bar{x})-u_i^*)<\max_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i(f_i(\hat{x})-u_i^*-\varepsilon_i)<$$
$$\max_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i(f_i(\hat{x})-u_i^*-\min_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i\varepsilon_i)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i(f_i(\hat{x})-u_i^*)-\bar{\varepsilon}。$$

这与 $\hat{x}$ 是$(\mathrm{P}\beta\alpha1)$的 $\bar{\varepsilon}$-最优解矛盾,定理得证。 证毕

定理 3 设 $\varepsilon\geqq 0$,若 $\hat{x}\in S$ 是(MOP)的 ε-弱有效解,则 $\hat{x}$ 是$(\mathrm{P}\beta\alpha1)$的 $\bar{\varepsilon}$-最优解,其中 $\beta_i=\dfrac{1}{f_i(\hat{x})-u_i^*}$ 且 $\bar{\varepsilon}\geqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i\varepsilon_i$。

证明 假设 $\hat{x}$ 不是$(\mathrm{P}\beta\alpha1)$的 $\bar{\varepsilon}$-最优解,即存在 $\bar{x}\in S$ 使得:

$$\max_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i(f_i(\hat{x})-u_i^*)>\max_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i(f_i(\bar{x})-u_i^*)+\bar{\varepsilon}。$$

因为

$$\max_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i(f_i(\bar{x})-u_i^*)+\bar{\varepsilon}\geqslant\max_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i(f_i(\bar{x})-u_i^*)+\max_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i\varepsilon_i\geqslant\max_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i(f_i(\bar{x})-u_i^*+\varepsilon_i),$$

所以有 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i(f_i(\bar{x})-u_i^*+\varepsilon_i)<1$。即对任意的 i 有 $f_i(\bar{x})+\varepsilon_i<f_i(\hat{x})$。这与 $\hat{x}$ 是(MOP)的 ε-弱有效解矛盾,定理得证。 证毕

定理 4 设 $\varepsilon\geqq 0$ 且 $-\dfrac{1}{2L}<\alpha<0$。若 $\bar{x}\in S$ 是(MOP)的 ε-真有效解,则 $\bar{x}$ 是$(\mathrm{P}\beta\alpha)$的 $\bar{\varepsilon}$-最优解,其中 $\beta_i=$

$\dfrac{1}{(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}(f(\bar{x})-u^{*}))_i}$，$\bar{\varepsilon}\geqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}\varepsilon)_i$。

证明　设 $\bar{x}$ 是(MOP)的 ε-真有效解，则由定义可知，存在 $M>0$，对所有满足 $f_i(x)<f_i(\bar{x})-\varepsilon_i$ 的 i 和 x 都存在 j 满足 $f_j(\bar{x})-\varepsilon_j<f_j(x)$ 且 $\dfrac{f_i(\bar{x})-f_i(x)-\varepsilon_i}{f_j(x)-f_j(\bar{x})+\varepsilon_j}\leqslant M$。

因为 $-\dfrac{1}{2L}<\alpha<0$，所以存在充分小的 α 满足 $M+1<\dfrac{1-\alpha}{-\alpha L}$。对任意的 $x\in S$，记 $y=f(x)$ 且

$$\bar{\theta}_i=(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}(\bar{y}-u^{*}))_i,\beta_i=\frac{1}{\bar{\theta}_i},\forall i=1,\cdots,L,$$

则有 $\|\bar{y}-u^{*}\|_{\beta}^{\alpha}=1$ 且 $\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}(\bar{y}-u^{*})>0$。若存在 $\hat{y}\in f(S)$ 使得 $\|\hat{y}-u^{*}\|_{\beta}^{\alpha}+\bar{\varepsilon}<\|\bar{y}-u^{*}\|_{\beta}^{\alpha}$，即：

$$\max_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i\hat{\theta}_i+\bar{\varepsilon}=\|\hat{y}-u^{*}\|_{\beta}^{\alpha}+\bar{\varepsilon}<\max_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i\bar{\theta}_i=1$$

故对任意的 $i=1,\cdots,L$，有 $\beta_i\hat{\theta}_i+\bar{\varepsilon}<\beta_i\bar{\theta}_i$。

假设对任意的 $i\in\{1,\cdots,L\}$，都有 $\bar{y}_i-\varepsilon_i\leqslant\hat{y}_i$ 成立。从而有 $(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}(\hat{y}-(\bar{y}-\varepsilon)))_i\geqslant0$。因为 $\bar{\varepsilon}\geqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}\varepsilon)_i$，所以：

$$\beta_i(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}(\hat{y}-(\bar{y}-\varepsilon)))_i=\beta_i(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}(\hat{y}-\bar{y}))_i+\beta_i(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}\varepsilon)_i=$$
$$\beta_i(\hat{\theta}_i-\bar{\theta}_i)+\beta_i(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}\varepsilon)_i\leqslant\beta_i(\hat{\theta}_i-\bar{\theta}_i)+\bar{\varepsilon}<0。$$

产生矛盾。故存在 $k\in\{1,\cdots,L\}$ 使得 $\hat{y}_k<\bar{y}_k-\varepsilon_k$。令 $q=(\bar{\theta}_1-\hat{\theta}_1-\varepsilon'_1)+\cdots+(\bar{\theta}_L-\hat{\theta}_L-\varepsilon'_L)$，$\varepsilon'=(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}\varepsilon)$，则对任意的 $i=1,\cdots,L$，有 $(\bar{y}_i-\varepsilon_i)-\hat{y}_i=(\boldsymbol{I}_{\alpha}(\bar{\theta}_i-\hat{\theta}_i-\varepsilon'))_i=\alpha q+(1-\alpha)(\bar{\theta}_i-\hat{\theta}_i-\varepsilon'_i)$。

不妨记 $\bar{\theta}_1-\hat{\theta}_1-\varepsilon'_1=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant L}(\bar{\theta}_i-\hat{\theta}_i-\varepsilon'_i)$。从而有 $(\bar{y}_1-\varepsilon_1)-\hat{y}_1>0$，$(\bar{\theta}_1-\hat{\theta}_1-\varepsilon'_1)\geqslant\dfrac{q}{L}$。

因为 $\bar{x}$ 是 ε-真有效解，对 $i=1$ 而言，存在 $j\neq1$ 满足 $\hat{y}_j>\bar{y}_j-\varepsilon_j$ 且使得：

$$\frac{\bar{y}_1-\hat{y}_1-\varepsilon_1}{\hat{y}_j-\bar{y}_j+\varepsilon_j}=\frac{\alpha q+(1-\alpha)(\bar{\theta}_1-\hat{\theta}_1-\varepsilon'_1)}{-\alpha q-(1-\alpha)(\bar{\theta}_j-\hat{\theta}_j-\varepsilon'_j)}\geqslant\frac{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}q+\dfrac{q}{L}}{-\dfrac{\alpha}{1-\alpha}q}=(-1)+\frac{1-\alpha}{-\alpha L}>M。$$

这与 $\bar{x}$ 是(MOP)的 ε-真有效解矛盾，定理得证。　　证毕

定理 5　设 $\varepsilon\geqq0$ 且 $-\dfrac{1}{2L}<\alpha<0$。若存在 $\beta>0$ 满足 $0\leqslant\bar{\varepsilon}\leqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}\varepsilon)_i$ 且 $\bar{x}\in S$ 是(Pβα)的 ε-最优解，则 $\bar{x}$ 是(MOP)的 ε-真有效解。

证明　令 $\bar{x}$ 是标量化问题(Pβα)的 ε-最优解。首先证明 $\bar{x}$ 是(MOP)的 ε-有效解。假设存在 $\hat{x}\in S$ 使得 $f(\hat{x})\leqslant f(\bar{x})-\varepsilon$。记 $f(\bar{x})=\bar{y}$，$f(\hat{x})=\hat{y}$ 且 $\bar{\theta}_i=(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}(\bar{y}-u^{*}))_i$，$\hat{\theta}_i=(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}(\hat{y}-u^{*}))_i$，$\forall i\in\{1,\cdots,L\}$，则 $\bar{y}-\hat{y}=\boldsymbol{I}_{\alpha}(\bar{\theta}-\hat{\theta})$。从而对任意的 $i\in\{1,\cdots,L\}$，由定理 1 可知 $(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}(\hat{y}-(\bar{y}-\varepsilon)))_i<0$，即 $\hat{\theta}_i+(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}\varepsilon)_i<\bar{\theta}_i$。因为 $\beta_i>0$，所以 $\beta_i\hat{\theta}_i+\beta_i(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}\varepsilon)_i<\max\limits_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i\bar{\theta}_i=\|\bar{y}-u^{*}\|_{\beta}^{\alpha}$，$\forall i\in\{1,\cdots,L\}$。

进一步可得 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant L}(\beta_i\hat{\theta}_i)+\min\limits_{1\leqslant i\leqslant L}\beta_i(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}\varepsilon)_i<\|\bar{y}-u^{*}\|_{\beta}^{\alpha}$，即 $\|\hat{y}-u^{*}\|_{\beta}^{\alpha}+\bar{\varepsilon}<\|\bar{y}-u^{*}\|_{\beta}^{\alpha}$。这与 $\bar{x}$ 是(Pβα)的 ε-最优解矛盾。

下面证明 $\bar{x}$ 是(MOP)的 ε-真有效解。假设 $\hat{y}_k<\bar{y}_k-\varepsilon_k$，并令 $\bar{\theta}_j-\hat{\theta}_j-(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}\varepsilon)_j=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant L}(\bar{\theta}_i-\hat{\theta}_i-(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}\varepsilon)_i)$，因为 $\bar{x}$ 是 ε-有效解，所以有 $(\bar{\theta}_j-\hat{\theta}_j-(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}\varepsilon)_j)\leqslant0$ 且 $\bar{y}_j-\varepsilon_j<\hat{y}_j$。从而有：

$$\frac{\bar{y}_k-\hat{y}_k-\varepsilon_k}{\hat{y}_j-\bar{y}_j+\varepsilon_j}=-\frac{1}{\alpha}+\frac{\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)(\bar{\theta}_j-\hat{\theta}_j-(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}\varepsilon)_j)+(\alpha-1)t}{\hat{y}_j-\bar{y}_j+\varepsilon_j},$$

其中 $t=\sum\limits_{i\neq k,j}(\bar{\theta}_i-\bar{\theta}_i-(\boldsymbol{I}_{\alpha}^{-1}\varepsilon)_i)$，因为 $-\dfrac{\alpha-1}{\alpha}<L-2$，所以有：

$$(\bar{\theta}_j-\hat{\theta}_j-(\boldsymbol{I}_\alpha^{-1}\varepsilon)_j)\left(-\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)<(\bar{\theta}_j-\hat{\theta}_j-(\boldsymbol{I}_\alpha^{-1}\varepsilon)_j)(L-2),$$

即$\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)(\bar{\theta}_j-\hat{\theta}_j-(\boldsymbol{I}_\alpha^{-1}\varepsilon)_j)(1-\alpha)t<0$。

从而有$\dfrac{\bar{y}_k-\hat{y}_k-\varepsilon_k}{\hat{y}_j-\bar{y}_j+\varepsilon_j}\leqslant-\dfrac{1}{\alpha}$。取$M=-\dfrac{1}{\alpha}$,则由定义可知,$\bar{x}$是ε-真有效解。 证毕

注2 定理2~5推广了文献[4,7]中的相应结果到近似解情形。事实上,取ε=0,则定理2和定理3退化为文献[4]中的定理4.24;取ε=0,则定理4和定理5退化为文献[7]中的定理3.1。

参考文献:

[1] SAWARAGI Y, NAKAYAM H, TANINO T. Theory of multiobjective optimization[M]. Tokyo: Academic Press, 1985.

[2] BECKMANN M, KÜNZI H P. Multiobjective programming and goal programming[M].Berlin Heidelberg:Springer,2009.

[3] CHANKONG V, HAIMES Y Y. Multiobjective decision making theory and methodology[M]. New York: North-Holland,1983.

[4] EHRGOTT M. Multicriteria optimization[M]. Berlin, Heidelberg:Springer,2005.

[5] 林锉云,董家礼.多目标最优化的方法与理论[M].吉林:吉林教育出版社,1992.
LIN C Y, DONG J L.The method and theory of multiobjective optimization[M].Jilin:Jilin Education Publishing House,1992.

[6] GEOFFRION A M.Proper efficiency and the theory of vector maximization[J].J Math Anal Appl,1968,22(3):618-630.

[7] CHOO E U, ATKINS D R.Proper efficiency in nonconvex multicriteria programming[J]. Mathematics of Operation Reseach,1983,8(3):467-470.

[8] IGNACY K. A modified weighted tchebycheff metric for multiple objective programming[J].Computers and Operations Research,1987,14(4):315-323.

[9] LORIDAN P.ε-solutions in vector minimization problems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1984,43(2):265-276.

[10] LIU J C.ε-properly efficient solutions to nondifferentiable multiobjective programming problems[J].Applied Mathematics Letters,1999,12(6):109 -113.

[11] GHAZNAVI-GHOSONI B A, Khorram E, Soleimani-damaneh M.Scalarization for characterization of approximate strong/weak/proper efficiency in multi-objective optimization[J].Optimization,2013,62(6):703-720.

[12] RONG W D, WU Y N.ε-weak minimal solutions of vector optimization problems with set-valued maps[J].Journal of Optimization Theory and Applications,2000,106(3):569-579.

[13] 夏远梅,赵克全.向量优化中ε-真有效解的非线性标量化性质[J].运筹学学报,2014,18(4):58-64.
XIA Y M, ZHAO K Q. Nonlinear scalarization characterizations for ε-properly ecient solutions in vector optimization[J]. Operations Research Transactions ,2014,18(4):58-64.

[14] ZHAO K Q, CHEN G Y, YANG X M. Approximate proper efficiency in vector[J].Optimization,2015,64(8):1777-1793.

[15] ZHAO K Q, YANG X M.E-Benson proper efficiency in vector optimization[J].Optimization,2015,64(4):739-752.

Operations Research and Cybernetics

Nonlinear Scalarization Characterizations of Approximate Solutions in Multiobjective Optimization

XU Weina, ZHU Qiao, ZHAO Kequan

(College of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]In recent years, study on the scalarization characterizations of approximate solutions has became one of the most important research fields for multiobjective optimization problems. [**Methods**]By means of a kind of generalized Tchebycheff norm scalarization method for multiobjective optimization problems. [**Finding**]Some nonlinear scalarization results of ε-weakly efficient solutions and ε-properly efficient solutions are obtained. [**Conclusions**]The main results generalize some known works.

Keywords: multi-objective optimization; nonlinear scalarization; ε-properly efficient solutions; ε-weakly efficient solutions

(责任编辑 黄 颖)