

有限理性与图像拓扑下广义博弈解的稳定性^{*}

陈拼博¹, 丘小玲¹, 王能发^{1,2}

(1. 贵州大学 数学与统计学院, 贵阳 550025; 2. 贵州财经大学 数学与统计学院, 贵阳 550025)

摘要:【目的】集值映射的图像拓扑较一致度量产生的拓扑弱,图像拓扑下研究解的稳定性具有重要的理论意义。【方法】有限理性框架下,首先利用可行策略映射图像之间的 Hausdorff 距离定义度量,其次分别定义可行映射,行为映射和理性函数。【结果】得到了参数空间的完备性和有限理性框架下广义博弈解的通有稳定性。【结论】也就是说,在此弱图像拓扑下证明了大多数的广义博弈(Baire 分类的意义下)都是结构稳定的,对 ϵ -平衡也是鲁棒的。

关键词:有限理性;广义博弈;图像拓扑;结构稳定;鲁棒性

中图分类号:O189.1;O225

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2017)06-0015-06

许多经济模型的基础是建立在完全理性之上,即每个决策者都能在一一定的约束条件下做出对自己最为有利的选择。这一假设过于严格和理想,许多重要的问题和模型都无法满足,因此在应用上受到很大限制。Simon^[1]引入的有限理性打破了原来完全理性的限制和束缚,使得结论的假设条件更加符合人们的实际情况,也引起了许多学者的关注。其中,Anderlini 和 Canning^[2]在 2001 年建立了抽象模型 M ,它是带有抽象理性函数的带参数的“一般化博弈”。但值得注意的是,文献[2]给出的假设条件太强,许多重要的经济模型无法满足,俞建等人^[3-6]重新研究了此模型,不仅扩大了模型的应用范围,而且得到一些新的较为深刻的结果。具体地,文献[3]将假设条件弱化: Δ 是紧度量空间减弱为完备度量空间,集值映射 f 连续减弱为上半连续,理性函数 R 连续减弱为下半连续。同时,文献[3]给出了 M 在 $\lambda \in \Delta$ 对 ϵ -平衡鲁棒和 M 在 $\lambda \in \Delta$ 结构稳定的新定义,并且证明了对大多数的参数值 $\lambda \in \Delta$ (Baire 分类的意义下), M 都是结构稳定的,对 ϵ -平衡也是鲁棒的。随后,文献[4]又将文献[3]的主要结果用于多目标博弈和广义多目标博弈。文献[5]研究了有限理性与多目标问题解的稳定性,文献[6]在有限理性条件下,研究了 Ky Fan 点问题解的稳定性。

关于广义博弈解的稳定性,Lin 和 Yu^[7-8]分别研究了多目标广义博弈的 Tikhonov 良定问题、Hadamard 良定问题和弱 Pareto-Nash 平衡点集的本质连通区;1999 年,Yu^[9]研究了广义博弈 Nash 平衡点的通有稳定性;Song 和 Wang^[10]在支付函数的扰动下,研究了多目标广义博弈解的稳定性。需要注意的是,文献[7-10]所考虑的集值映射或函数所构成空间的拓扑结构均由一致度量产生。正如向淑文和杨辉^[11]所指出:集值映射的图像拓扑允许比一致拓扑有更大的扰动,因为它同时考虑集值映射与定义域的扰动,并且图像收敛比一致度量下的收敛更弱。

广义博弈中局中人的支付函数和可行策略集均与对方有关。特别地,对于可行策略映射 $G_1, G_2: X \rightarrow P_0(Y)$,一致拓扑产生的度量定义为 $\rho_X(G_1, G_2) = \sup_{x \in X} h(G_1(x), G_2(x))$ 。而图像拓扑下的度量定义为 $\rho_g(G_1, G_2) = h(\text{Graph}(G_1), \text{Graph}(G_2))$,此处 ρ_X 是 Y 上的 Hausdorff 距离,而 ρ_g 是 $X \times Y$ 上的 Hausdorff 距离。

本文在有限理性框架下,研究图像拓扑意义下广义博弈 Nash 平衡点的结构稳定性和对 ϵ -平衡的鲁棒性。结构如下:第 1 部分是本文需要的基本定义和预备知识,且给出有限理性下的稳定性结论;第 2 部分先定义了图像拓扑下的度量,结合有限理性框架给出广义博弈 Nash 平衡点的稳定性结果;第 3 部分是本文的结论。

1 基本定义和预备知识

首先给出集值映射的基本定义和相关引理^[15-16]。

* 收稿日期:2016-10-11 修回日期:2017-10-26 网络出版时间:2017-11-10 15:40

资助项目:国家自然科学基金(No.11561013;61472093);贵州省科技厅自然科学基金项目(No.黔科合 LH 字[2016]7425);贵州省教育厅自然科学研究项目(No.黔教合 KY 字[2015]421)

第一作者简介:陈拼博,男,研究方向为博弈论与非线性分析,E-mail:pbchen73@163.com;通信作者:丘小玲,副教授,E-mail:xlqiu@gzu.edu.cn

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20171110.1540.022.html>

定义 1 设 X 和 Y 是两个度量空间, $P_0(Y)$ 是 Y 中所有非空子集构成的集合, $F: X \rightarrow P_0(Y)$ 是一个集值映射, $x \in X$, 则:

1) 称集值映射 F 在 x 是上半连续的, 如果 Y 中的任意开集 $G, G \supset F(x)$, 存在 x 的开邻域 $O(x)$, 使得 $\forall x' \in O(x)$, 有 $G \supset F(x')$ 。

2) 称集值映射 F 在 x 是下半连续的, 如果 Y 中的任意开集 $G, G \cap F(x) \neq \emptyset$, 存在 x 的开邻域 $O(x)$, 使得 $\forall x' \in O(x), G \cap F(x') \neq \emptyset$ 。

3) 称集值映射 F 在 x 是连续的, 如果集值映射 F 在 x 既是上半连续的, 也是下半连续的。

4) 称集值映射 F 在 X 是连续的(或上半连续的, 或下半连续的), 如果 $\forall x \in X, F$ 在 x 是连续的(或上半连续的, 或下半连续的)。

5) 称 F 在 X 上是一个 usco 映射, 如果 $\forall x \in X, F$ 在 x 是上半连续的, 且 $F(x)$ 是非空紧集。

定义 2 如果 $\text{Graph}(F)$ 是 $X \times Y$ 中的闭集, 则称集值映射 F 是闭的, 其中 $\text{Graph}(F) = \{(x, y) \in X \times Y: y \in F(x)\}$ 。

引理 1^[17] 若 X 和 Y 是两个 Hausdorff 拓扑空间, Y 为紧空间, 如果集值映射 $F: X \rightarrow P_0(Y)$ 是闭的当且仅当 F 在 X 上是上半连续的, 且 $\forall x \in X, F(x)$ 是非空闭集。

引理 2^[15] 设 (X, d) 是一个完备度量空间, $K(X)$ 是 X 中所有非空紧集的集合, 则 $(K(X), h)$ 也是一个完备度量空间, 其中 h 是 $K(X)$ 上的 Hausdorff 距离。

引理 3^[15] 1) 设 $\{A_\alpha\}$ 是 $K(X)$ 中一网且 $A_\alpha \xrightarrow{h} A$, 则 $\forall x_\alpha \in A_\alpha, \{x_\alpha\}$ 有一聚点 x 属于 A ; 2) 设 $\{A_\alpha \times B_\alpha\}$ 是 $K(X) \times K(X)$ 中一网, 且 $A_\alpha \xrightarrow{h} A, B_\alpha \xrightarrow{h} B$, 则 $\forall (x_\alpha, y_\alpha) \in A_\alpha \times B_\alpha, \{(x_\alpha, y_\alpha)\}$ 有一聚点 (x, y) 属于 $A \times B$ 。

定理 1^[17] 设 X 和 Y 是两个 Hausdorff 拓扑空间, $f: X \times Y \rightarrow R$ 连续, $G: Y \rightarrow P_0(X)$ 连续, 且 $\forall y \in Y, G(y)$ 是非空紧集, 则 $V(y) = \max_{x \in G(y)} f(x, y)$ 是连续的。

根据文献[2], 简化后给出有限理性模型 M 。具体地, $M = \{\Delta, X, F, R\}$, Δ 是参数空间, 每个 $\lambda \in \Delta$ 表示一个博弈; X 是行为空间, 每个 $x \in X$ 表示一个策略; $F: \Delta \times X \rightarrow P_0(X)$ 是可行映射, 而由 F 诱导出的行为映射 $f: \Delta \rightarrow P_0(X)$, 其中 $\forall \lambda \in \Delta, f(\lambda) = \{x \in X: x \in F(\lambda, x)\}$; 映射 f 的图像 $\text{Graph}(f) = \{(\lambda, x) \in \Delta \times X: x \in f(\lambda)\}$ 。 $R: \text{Graph}(f) \rightarrow R^+$ 是理性函数。 $R(\lambda, x) = 0$ 对应于完全理性, $\forall \lambda \in \Delta, \forall \epsilon \geq 0, E(\lambda, \epsilon) = \{x \in f(\lambda): R(\lambda, x) \leq \epsilon\}$ 定义为博弈 λ 的 ϵ -平衡点集。特别地, $E(\lambda) = \{x \in f(\lambda): R(\lambda, x) = 0\}$ 定义为博弈 λ 的平衡点集。

假定 (Δ, ρ) 是一个完备度量空间, X 是一个紧度量空间, $f: \Delta \rightarrow K(X)$ 是上半连续的, $R: \text{Graph}(f) \rightarrow R^+$ 是下半连续的, 而 $\forall \lambda \in \Delta, E(\lambda) \neq \emptyset$ 。这样 $E(\lambda) = \{x \in f(\lambda): R(\lambda, x) \leq \epsilon\}$ 必是 X 中的闭集, 从而是紧集。

定义 3^[3] $\forall \lambda \in \Delta$, 如果 $\forall \delta > 0, \exists \bar{\epsilon} > 0$, 当 $\epsilon < \bar{\epsilon}, \rho(\lambda, \lambda') < \bar{\epsilon}$, 有 $h(E(\lambda', \epsilon), E(\lambda')) < \delta$, 则称 M 在 λ 对 ϵ -平衡是鲁棒的。

定义 4^[3] 如果平衡映射 $E: \Delta \rightarrow K(X)$ 在 $\lambda \in \Delta$ 是连续的, 则称 M 在 λ 是结构稳定的。

现将文献[4]中的主要结果以定理 A 的形式给出。

定理 A 设 (Δ, ρ) 是完备度量空间, (X, d) 是紧度量空间, f 在 Δ 上是 usco 的, 即 $f: \Delta \rightarrow K(X)$ 是上半连续的且 $\forall \lambda \in \Delta, f(\lambda)$ 是非空紧集, $R: \text{Graph}(f) \rightarrow R^+$ 是下半连续的且 $\forall \lambda \in \Delta, E(\lambda) \neq \emptyset$, 则: 1) 平衡映射 E 在 Δ 上是 usco 的; 2) 存在 Δ 中的一个稠密剩余集 Q , 使得 $\forall \lambda \in Q, M$ 在 λ 是结构稳定的; 3) 如果 M 在 $\lambda \in \Delta$ 是结构稳定的, 则 M 在 $\lambda \in \Delta$ 对 ϵ -平衡必是鲁棒的, 从而 $\forall \lambda \in Q, M$ 在 λ 对 ϵ -平衡必是鲁棒的; 4) $\forall \lambda \in Q, \lambda_n \rightarrow \lambda, \forall \epsilon_n \rightarrow 0$, 有 $h(E(\lambda_n, \epsilon_n), E(\lambda)) \rightarrow 0$; 5) 如果 $\lambda \in \Delta$, 而 $E(\lambda)$ 是单点集, 则 M 在 $\lambda \in \Delta$ 是结构稳定的, 在 $\lambda \in \Delta$ 对 ϵ -平衡也是鲁棒的。

2 主要结果

设 $N = \{1, \dots, n\}$ 是局中人的集合, $\forall i \in N$, 记 $\hat{i} = N \setminus \{i\}$, X_i 是第 i 个局中人的策略集, 它是度量空间 E_i 中的非空紧集, $G_i: X_{\hat{i}} \rightarrow P_0(X_i)$ 是第 i 个局中人的可行策略映射, 集值映射 G_i 连续, 且 $\forall x_{\hat{i}} \in X_{\hat{i}}, G_i(x_{\hat{i}})$ 是非空紧集, $u_i: X = \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow R$ 是第 i 个局中人的支付函数, u_i 是连续的。

设 Λ 是所有以上博弈 $\lambda = \{u_1, \dots, u_n; G_1, \dots, G_n\}$ 的集合, 还满足 $\exists x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in X$, 使 $\forall i \in N$, 有 $x_i^* \in G_i(x_i^*)$ 且 $u_i(x_i^*, x_i^*) = \max_{w_i \in G_i(x_i^*)} u_i(w_i, x_i^*)$ 。这样的 $x^* \in X$ 称为广义博弈 $\lambda \in \Lambda$ 的平衡点, 记 $E(\lambda)$ 是广义博弈 λ 的所有平衡点的集合, 则 $E(\lambda) \neq \emptyset$ 。

$\forall \lambda_1 = (u_{11}, \dots, u_{1n}; G_{11}, \dots, G_{1n}), \lambda_2 = (u_{21}, \dots, u_{2n}; G_{21}, \dots, G_{2n}) \in \Lambda$, 定义 λ_1, λ_2 之间的距离为:

$$\rho(\lambda_1, \lambda_2) = \sup_{x \in X} \sum_{i=1}^n |u_{1i}(x) - u_{2i}(x)| + \sum_{i=1}^n h_i(\text{Graph}(G_{1i}), \text{Graph}(G_{2i})).$$

注 1 此处的 ρ 不同于文献[3]中使用的度量:

$$\rho'(\lambda_1, \lambda_2) = \sup_{x \in X} \sum_{i=1}^n |u_{1i}(x) - u_{2i}(x)| + \sup_{x_i \in X_i} \sum_{i=1}^n H_i(G_{1i}(x_i), G_{2i}(x_i)).$$

因为 h_i 是 $X_i \times X_i$ 上的 Hausdorff 距离, 而 H_i 是 X_i 上的 Hausdorff 距离。

引理 4 设 $N = \{1, \dots, n\}$ 是局中人的集合, $\forall i \in N, X_i$ 是第 i 个局中人的策略集, 它是度量空间 E_i 中的非空紧集, $G_i: X_i \rightarrow P_0(X_i)$ 是第 i 个局中人的可行策略映射, 集值映射 G_i 连续, 且 $\forall x_i \in X_i, G_i(x_i)$ 是非空紧集。如果 Y 是以上所有 $y = (G_1, \dots, G_n)$ 的集合, $\forall y_1 = (G_{11}, \dots, G_{1n}), y_2 = (G_{21}, \dots, G_{2n}) \in Y$, 定义 $d(y_1, y_2) = \sum_{i=1}^n h_i(\text{Graph}(G_{1i}), \text{Graph}(G_{2i}))$, 则 (Y, d) 是一个完备度量空间。

证明 要证 (Y, d) 完备, 只需证明 Y 中任意一个 Cauchy 列 $\{y_m\}$, 有 $y_m \rightarrow y$, 且 $y \in Y$ 。

设 $\{y_m\}$ 是 Y 中任意一个 Cauchy 列, 则 $\forall \epsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $m, p > N$, 有:

$$d(y_m, y_p) = \sum_{i=1}^n h_i(\text{Graph}(G_{mi}), \text{Graph}(G_{pi})) < \epsilon.$$

1) 首先证明 $\exists y$, 使得 $y_m \rightarrow y$ 。

由引理 2, 存在紧集 $S_i \in K(X)$, 使得 $\text{Graph}(G_{mi}) \rightarrow S_i$ 。 $\forall i \in N$, 设 S_i 在 X_i 上的投影为 A_i , 在 X_i 上的投影为 A_i , 定义集值映射 $G_i: A_i \rightarrow P_0(A_i)$, 且 $G_i(x_i) = \{u \in A_i: (x_i, u) \in S_i\}$, $\forall x_i \in A_i$ 。

容易得到, $\text{Graph}(G_i) = S_i$ 。另外, $\forall x_i \in X_i$, 有 $(x_i, z^m) \in \text{Graph}(G_{mi})$, 即 $z^m \in G_{mi}(x_i)$ 。由于 $G_{mi}(x_i)$ 是紧集, 不妨设 $z^m \rightarrow z$ 。由引理 3 和 $\text{Graph}(G_{mi}) \rightarrow \text{Graph}(G_i)$, 有 $(x_i, z) \in \text{Graph}(G_i)$, 即 $z \in G_i(x_i)$, 从而 G_i 在每一 x_i 属于 X_i 上都有定义。

于是, $\forall i \in N, \text{Graph}(G_{mi}) \rightarrow \text{Graph}(G_i)$ 。令 $y = (G_1, \dots, G_n)$, 故 $y_m \rightarrow y$ 。

2) 其次证明 $y \in Y$ 。

(a) 由引理 1 及 $\text{Graph}(G_i) = S_i, S_i$ 为紧集, 则 G_i 在 X_i 上是上半连续且闭值的。又 $G_i(x_i) \subset X_i, X_i$ 是紧集, 故 $G_i(x_i)$ 必是紧集。

(b) 下面证明 $\forall x_i \in X_i, G_i$ 在 x_i 连续。

由(a)知, G_i 在 x_i 上半连续, 故只需证明 G_i 在 x_i 下半连续即可, 即对于 X_i 中的任意开集 $V, G_i(x_i) \cap V \neq \emptyset$, 存在 x_i 的一个开邻域 $O(x_i)$, 使得 $\forall x_i' \in O(x_i)$, 有 $G_i(x_i') \cap V \neq \emptyset$ 。

由于 $G_i(x_i) \cap V \neq \emptyset$, 取 $z^i \in G_i(x_i) \cap V$, 则 $z^i \in G_i(x_i)$ 且 $z^i \in V$ 。因 V 是开集, 则存在 z_i 的一个邻域 $U(z_i, \delta)$, 使得 $U(z_i, \delta) \subset V$ 。

因 $(x_i, z^i) \in \text{Graph}(G_i)$, 且 $\text{Graph}(G_{mi}) \rightarrow \text{Graph}(G_i)$ 。取 $z_m^i \in G_{mi}(x_i)$, 由引理 3, $\{(x_i, z_m^i)\}$ 有收敛子列 $\{(x_i, z_{m_k}^i)\}$, 且 $(x_i, z_{m_k}^i) \rightarrow (x_i, z^i)$ 。对于充分大的 k , 有 $z_{m_k}^i \in U(z^i, \delta)$, 即 $G_{mi}(x_i) \cap V \neq \emptyset$ 。

由于 G_{mi} 在 x_i 处下半连续, 则存在 x_i 的一个开邻域 $O(x_i)$, 使得 $\forall x_i' \in O(x_i)$, 有 $G_{mi}(x_i') \cap V \neq \emptyset$ 。取 $u_m^i \in G_{mi}(x_i') \cap V$, 则 $u_m^i \in G_{mi}(x_i')$ 且 $u_m^i \in V$, 即 $(x_i', u_m^i) \in \text{Graph}(G_{mi})$ 。

同样地, 由 $\text{Graph}(G_{mi}) \rightarrow \text{Graph}(G_i)$, $\{(x_i', u_m^i)\}$ 存在收敛子列 $\{(x_i', u_{m_k}^i)\}$, 且 $(x_i', u_{m_k}^i) \rightarrow (x_i', u^i)$, $u^i \in G_i(x_i')$, 有 $G_i(x_i') \cap V \neq \emptyset$ 。

于是, G_i 在 x_i 是下半连续的。再由 x_i 的任意性, 得 G_i 在 X_i 上连续。

综上, 由 1)、2), 完备性得证。

证毕

引理 5 (Λ, ρ) 是一个完备度量空间。

证明 设 $\{\lambda_m\}$ 是 Λ 中的一个 Cauchy 列, 则 $\forall \epsilon > 0$, 存在正整数 P , 使得 $\forall m, p > P$, 有:

$$d(\lambda_m, \lambda_p) = \sup_{x \in X} \sum_{i=1}^n |u_{mi}(x) - u_{pi}(x)| + \sum_{i=1}^n h_i(\text{Graph}(G_{mi}), \text{Graph}(G_{pi})) < \varepsilon$$

易知, $\forall x \in X, \forall i \in N$, 存在 $u_i(x)$ 且 u_i 连续, 使得 $\lim_{p \rightarrow \infty} u_{pi}(x) = u_i(x)$ 。由引理 4, $\forall i \in N$, 存在连续的 G_i , 使得 $h_i(\text{Graph}(G_{pi}), \text{Graph}(G_i)) \rightarrow 0 (p \rightarrow \infty)$, 且 $\forall x_\gamma \in X_\gamma, G_i(x_\gamma)$ 为非空紧集。

$\forall m > P$, 有 $\sup_{x \in X} \sum_{i=1}^n |u_{mi}(x) - u_i(x)| + \sum_{i=1}^n h_i(\text{Graph}(G_{mi}), \text{Graph}(G_i)) < \varepsilon$ 。因 $\lambda_m = (u_{m1}, \dots, u_{mn}; G_{m1}, \dots, G_{mn}) \in \Lambda$, 存在 $x^m = (x_1^m, \dots, x_n^m) \in X$, 使得 $\forall i \in N, x_i^m \in G_{mi}(x_\gamma^m)$, 且 $u_{mi}(x_i^m, x_\gamma^m) = \max_{w_i \in G_{mi}(x_\gamma^m)} u_{mi}(w_i, x_\gamma^m)$ 。

因 (X, d) 是紧集, 不妨设 $x^m \rightarrow x^*$ 。因

$$d(x^*, \text{Graph}(G_i)) \leq d(x^*, x^m) + d(x^m, \text{Graph}(G_{mi})) + h_i(\text{Graph}(G_{mi}), \text{Graph}(G_i)) \rightarrow 0,$$

得到 $x^* \in \text{Graph}(G_i)$, 即 $x_i^* \in G_i(x_\gamma^*)$ 。

$\forall w_i \in G_i(x_\gamma^*)$, 由 $\text{Graph}(G_{mi}) \rightarrow \text{Graph}(G_i)$, 存在 $w_{mi} \in G_{mi}(x_\gamma^m)$ 。由引理 3, 不妨设 $(x_\gamma^m, w_{mi}) \rightarrow (x_\gamma^*, w_i)$, 且 $w_{mi} \rightarrow w_i$ 。

注意到 $u_{mi}(w_{mi}, x_\gamma^m) \leq u_{mi}(x_i^m, x_\gamma^m)$, 由

$$|u_{mi}(x_i^m, x_\gamma^m) - u_i(x_i^*, x_\gamma^*)| \leq |u_{mi}(x_i^m, x_\gamma^m) - u_i(x_i^m, x_\gamma^m)| + |u_i(x_i^m, x_\gamma^m) - u_i(x_i^*, x_\gamma^*)| \rightarrow 0,$$

得 $u_{mi}(x_i^m, x_\gamma^m) \rightarrow u_i(x_i^*, x_\gamma^*)$ 。

由 $|u_i(w_{mi}, x_\gamma^m) - u_{mi}(w_{mi}, x_\gamma^m)| \rightarrow 0$, 且 $u_i(w_{mi}, x_\gamma^m) = u_{mi}(w_{mi}, x_\gamma^m) + [u_i(w_{mi}, x_\gamma^m) - u_{mi}(w_{mi}, x_\gamma^m)]$ 。得 $u_i(w_i, x_\gamma^*) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_i(w_{mi}, x_\gamma^m) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_{mi}(w_{mi}, x_\gamma^m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} u_{mi}(x_i^m, x_\gamma^m) = u_i(x_i^*, x_\gamma^*)$ 。

这样, $\forall i \in N, u_i(x_i^*, x_\gamma^*) = \max_{w_i \in G_i(x_\gamma^*)} u_i(w_i, x_\gamma^*)$ 。所以, $\lambda = (u_1, \dots, u_n; G_1, \dots, G_n) \in \Lambda, (\Lambda, \rho)$ 是一个完

备度量空间。

证毕

现在考虑模型 $M = \{\Lambda, X, F, R\}$, $\forall \lambda \in \Lambda, \forall x \in X$, 定义可行映射 $F(\lambda, x) = G(x) = \prod_{i=1}^n G_i(x_\gamma)$, 行为映射 $f(\lambda) = \{x \in X : x \in F(\lambda, x)\} = \{x \in X : x \in G(x)\}$ 。另外, $\forall \lambda \in \Lambda, \forall x \in f(\lambda)$, 定义理性函数 $R(\lambda, x) = \max_{1 \leq i \leq n} [\max_{w_i \in G_i(x_\gamma)} u_i(w_i, x_\gamma) - u_i(x_i, x_\gamma)]$ 。

引理 6 集值映射 $f: \Lambda \rightarrow P_0(X)$ 是上半连续的, 且 $\forall \lambda \in \Lambda, f(\lambda)$ 是非空紧集。

证明 由于 X 是紧集, 由引理 1, 只需证 $\text{Graph}(f)$ 是闭的, 即 $\forall \lambda_m \in \Lambda, \lambda_m \rightarrow \lambda, \forall x_m \in f(\lambda_m), x_m \rightarrow x$, 有 $x \in f(\lambda)$ 成立。

由于 $x_m \in f(\lambda_m)$, 则 $x_m \in F(\lambda_m, x_m) = G(x_m) = \prod_{i=1}^n G_i(x_\gamma^m)$, 则 $\forall i \in N, x_{mi} \in G_i(x_\gamma^m)$ 。

另外, $x_{mi} \in X_i, x_\gamma^m \in X_\gamma$ 。 $\forall i = 1, \dots, N$, 由于 X_i 为紧集, 不妨设 $x_{mi} \rightarrow x_i, x_\gamma^m \rightarrow x_\gamma$, 由 G_i 连续, 知 $G_i(x_\gamma^m) \rightarrow G_i(x_\gamma)$ 。又由引理 1, $\text{Graph}(G_i)$ 是闭的, 则 $\forall i \in N, x_i \in G_i(x_\gamma)$ 。于是 $x \in \prod_{i=1}^n G_i(x_\gamma) = G(x)$, 即 $x \in f(\lambda)$ 。

证毕

引理 7 $R(\lambda, x)$ 在 (λ, x) 是连续的。

证明 只需证明 $\forall \lambda_m = (u_{m1}, \dots, u_{mn}; G_{m1}, \dots, G_{mn}) \in \Lambda, \lambda_m \rightarrow \lambda, \forall x^m \in X, x^m \rightarrow x$, 有 $R(\lambda_m, x^m) \rightarrow R(\lambda, x)$ 成立。

$\forall i \in N$, 因 $\{u_{mi}\}$ 是一个连续函数序列, $u_{mi} \rightarrow u_i, u_i$ 是一个连续函数, 且有 $h_i(\text{Graph}(G_{mi}), \text{Graph}(G_i)) \rightarrow 0$ 。

由定理 1, 有 $\max_{(x_\gamma^m, w_i) \in \text{Graph}(G_{mi})} u_{mi}(w_i, x_\gamma^m) \rightarrow \max_{(x_\gamma, w_i) \in \text{Graph}(G_i)} u_i(w_i, x_\gamma)$, 即:

$$\max_{w_i \in G_{mi}(x_\gamma^m)} u_{mi}(w_{mi}, x_\gamma^m) \rightarrow \max_{w_i \in G_i(x_\gamma)} u_i(w_i, x_\gamma)。$$

在引理 5 的证明中已有 $u_{mi}(x_i^m, x_\gamma^m) \rightarrow u_i(x_i, x_\gamma)$, 所以:

$$\max_{1 \leq i \leq n} [\max_{w_i \in G_{mi}(x_\gamma^m)} u_{mi}(w_i, x_\gamma^m) - u_{mi}(x_i^m, x_\gamma^m)] \rightarrow \max_{1 \leq i \leq n} [\max_{w_i \in G_i(x_\gamma)} u_i(w_i, x_\gamma) - u_i(x_i, x_\gamma)],$$

即 $R(\lambda_m, x^m) \rightarrow R(\lambda, x)$, R 是连续的。

证毕

容易验证, $\forall \lambda \in \Lambda, \forall x \in f(\lambda), R(\lambda, x) \geq 0$, 且 $R(\lambda, x) = 0$ 当且仅当 $x \in E(\lambda)$ 。

下面给出本文的主要结果。

定理 2 对模型 $M = \{\Lambda, X, F, R\}$, 定理 A 成立。

证明 由引理 5~7, (Λ, ρ) 是完备度量空间且 X 是紧集, 集值映射 f 在 Λ 上是一个usco 映射, R 连续且 $\forall \lambda \in \Lambda, E(\lambda) \neq \emptyset$ 。因此, 对于模型 M , 定理 A 成立。证毕

3 结论

本文在有限理性的框架下讨论了广义博弈模型。在 Baire 分类的意义下, 对大多数的参数值 $\lambda \in \Lambda$, M 在 λ 是结构稳定的, 对 ϵ -平衡也是鲁棒的。与以往结果不同的是, 定理 2 给出了图像拓扑意义下 Nash 平衡点的稳定性结果。对于集值映射, 图像拓扑较一致度量产生的拓扑弱, 因此所得结果以原有一致度量意义下的相应结果为特例。

广义博弈(又称抽象经济)在一般均衡存在性的证明中发挥了重要作用。Arrow 和 Debreu 正是利用广义博弈 Nash 平衡点的存在性, 证明了数理经济学中的一般均衡的存在性定理, 他们也因此分别获得了 1972 年和 1983 年诺贝尔经济学奖。需要指出的是, 在有限理性下研究广义博弈平衡点的稳定性具有重要的现实意义。

参考文献:

- [1] SIMON H A. 管理决策新科学[M]. 李柱流, 译. 北京: 中国社会科学出版社, 1982.
- [2] ANDERLINI L, CANNING D. Structural stability implies robustness to bounded rationality[J]. J Econom Theory, 2001, 101(2): 395-422.
- [3] YU C, YU J. On structural stability and robustness to bounded rationality [J]. Nonlinear Analysis TMA, 2006, 65(3): 583-592.
- [4] YU C, YU J. Bounded rationality in multiobjective games [J]. Nonlinear Analysis TMA, 2007, 67(3): 930-937.
- [5] 王红蕾, 俞建. 有限理性与多目标问题解的稳定性[J]. 运筹学学报, 2008, 12(1): 104-108.
- [6] 俞建. 几类考虑有限理性平衡问题解的稳定性[J]. 系统科学与数学, 2009, 29(7): 999-1008.
- [7] LIN Z, YU J. On well-posedness of the multiobjective generalized game[J]. Applied Mathematics, 2004, 19(3): 327-334.
- [8] LIN Z. Essential components of the set of weakly pareto-Nash equilibrium points for multiobjective generalized games in two different topological spaces[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2005, 124(2): 387-405.
- [9] YU J. Essential equilibria of n -person noncooperative games [J]. J Math Economics, 1999, 31(3): 361-372.
- [10] SONG Q Q, WANG L S. On the stability of the solution for multiobjective generalized games with the payoffs perturbed[J]. Nonlinear Analysis, 2010, 73(8): 2680-2685.
- [11] 向淑文, 杨辉. 集值映射的图像拓扑与不动点的通有稳定性[J]. 应用数学学报, 2001, 24(2): 221-226.
- [12] 周永辉, 向淑文. 图像意义下不动点的 Tikhonov 良定性及其在对策论中的应用[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2007, 44(4): 771-778.
- [13] 周永辉, 向淑文. 图像拓扑下的 Ky Fan 引理解集的本质连通区及其在对策论上的应用[J]. 应用数学学报, 2005, 28(2): 281-287.
- [14] 彭定涛, 曹素元. 上图像拓扑与多目标优化问题加权解的通有稳定性[J]. 运筹学学报, 2006, 10(4): 81-88.

- PENG D T, CAO S Y. The upper graph topology and the generic stability of weighted solution for multiobjective optimization problem [J]. Operations Research Transactions, 2006, 10(4): 81-88.
- [15] KLEIN E, THOMPSON A. Theory of correspondences [M]. New York: Wiley, 1984.
- [16] AUBIN J P, Frankowska H. Set-valued analysis [M]. Boston: Birkhauser, 1990.
- [17] 俞建. 博弈论与非线性分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- YU J. Game theory and nonlinear analysis [M]. Beijing: Science Press, 2008.

Operations Research and Cybernetics

Bounded Rationality and Stability of Solutions for Generalized Games under Graph Topology

CHEN Pinbo¹, QIU Xiaoling¹, WANG Nengfa^{1,2}

(1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang 550025,

2. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China)

Abstract: [Purposes] The graph topology of set-valued mappings is weaker than the topology produced by uniform metric; it is of great theoretical significance to study the stability of solutions under graph topology. [Methods] A metric is defined by using the Hausdorff distance of graphs of feasible strategy mappings under the framework of bounded rationality, and concepts of feasible mapping, behavior mapping and rational function are defined respectively. [Findings] Then the completeness of parameter space and the generic stability of solutions for generalized games under bounded rationality are obtained. [Conclusions] Under this weak graph topology, it is proven that the most of generalized games (in the sense of Baire) are structurally stable and robust to ϵ -equilibrium.

Key words: bounded rationality; generalized games; graph topology; structurally stable; robustness

(责任编辑 黄 颖)