DOI:10.11721/cqnuj20170613

关于凸集的平均曲率积分的不等式(Ⅱ)*

曾春娜，柏仕坤

(重庆师范大学 数学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】主要研究 $\mathbf{R}^n$ 中凸集的各阶平均曲率积分的不等式关系。【方法】运用平均曲率积分和初等对称函数的性质，并在此基础上利用 Cauchy 公式。【结果】获得了新的关于平均曲率积分的不等式，并得到了几个凸集均质积分的不等式。【结论】丰富了积分几何中平均曲率积分不等式的研究及应用。

关键词:凸集;平均曲率积分;初等对称函数;均质积分

中图分类号:O186.5　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2017)06-0057-04

1 预备知识

平均曲率积分是表征曲面整体性质的一个重要外在概念,在积分几何以及微分几何中非常重要。它与凸体的均质积分(即 Cauchy 公式)、表面积、体积、球面象的映射度、Euler-Poincare 示性数等有着密切联系[1-2],是研究凸体理论的重要工具。另一方面,关于凸集的平均曲率积分的不等式目前还知之甚少。众所周知,几何不等式分为内在型几何不等式(关于弧长、面积、体积和 Gauss 曲率等内在不变量的不等式或积分不等式)和外在型几何不等式(如平均曲率积分等外在不变量的不等式或积分不等式)。经过数学家不懈努力目前发现的主要是内在型不等式,如等周不等式、Minkowski 不等式等。因此,对凸集的平均曲率积分的研究将极大丰富几何不等式和积分几何理论及运用。

设 Σ 表示 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中 C^2 类的超曲面,$k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$ 表示的 $n-1$ 个主曲率,记

$$k=\{(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1})\mid k_i>0,i=1,2,\cdots,n-1\},$$

则称

$$E_r(k)=E_r(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1})=\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_r\leqslant n-1}\prod_{j=1}^{r}k_{i_j},r=1,2,\cdots,n-1$$

为关于主曲率 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$ 的 r 阶初等对称函数。另外,补充规定 $E_0(k)=1$。

超曲面 Σ 的第 r 阶平均曲率积分可以用初等对称函数定义为[1-2]:

$$M_r(\Sigma)=\binom{n-1}{r}^{-1}\int_\Sigma E_r(k)\mathrm{d}\sigma,r=1,\cdots,n-1。\tag{1}$$

其中,$\mathrm{d}\sigma$ 表示 Σ 的面积元。补充定义 $M_0(\Sigma)=F$(即 Σ 的面积)。

设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中的点集,若对于任意的 $x,y\in K$,都有 $\lambda x+(1-\lambda)y\in K(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,则 K 为凸集。记 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中的点集。具有非空内点的紧凸集称为凸体。若 Σ 为凸体 K 的曲面,则经典 的 Minkowski 不等式为:

$$M_i^2(\Sigma)\geqslant M_{i-1}(\Sigma)M_{i+1}(\Sigma),$$

等号成立当且仅当 Σ 为标准球 面。若∂K 为凸集 K 的 C^2 类超曲面,则著名的 Cauchy 公式表明了平均曲率积分和均值积分之间的联系[1-2]:

$$M_j(\partial K)=nW_{j+1}(K),j=0,1,\cdots,n-1。$$

值得注意的是:W_j 对任何凸集 K 都有定义,而 M_j 则要求$\partial K\in C^2$。

---

* **收稿日期:**2017-03-28　　**修回日期:**2017-05-18　　**网络出版时间:**2017-11-10 15:36

资助项目:重庆市科学技术委员会重庆市前沿与应用基础研究项目(No.cstc2017jcyjAX0022;No.cstc2015jcyjA00009);重庆市教委科学技术研究项目(No.KJ1500628)

第一作者简介:曾春娜,女,副教授,博士,研究方向为积分几何、凸几何分析,E-mail: zengchn@163.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20171110.1536.012.html

近些年来,关于平均曲率积分的研究如火如荼地进行。Santalo 在文献[2-3]中详细讨论了凸体 K 的外平行体 K_ρ 在 $n-r(1\leqslant r\leqslant n-1)$ 维平面的正交投影体的平均曲率积分的平均值;Zhao 等人[4]获得了凸体与它任意 $n-r$ 维投影体之间的均值积分关系,推广了 Kubota 的结论;周家足等人在文献[5]中研究 $\mathbf{R}^n$ 中外平行体的平坦凸体的各阶平均曲率积分,并得到了 $r(0\leqslant r\leqslant n)$ 阶平均曲率积分的具体表达式;曾春娜等人以文献[5]的工作为基础,获得了凸体 K 在 $n-r$ 维平面的正交投影体,分别往两个子空间 L_{n-r} 和 $\mathbf{R}^n$ 做外平行体的各阶平均曲率积分的表达式,推广了 Santalo 和 Zhou 的结果[6]。此外,曾春娜等人在文献[7]中利用平均曲率积分的定义,研究各阶平均曲率积分之间的不等式关系,是本文的前期工作。更多关于凸体平均曲率积分的结果可以参见文献[8-12]。

本文在前人以及文献[7]的基础上继续研究凸集的平均曲率积分之间的不等式关系。主要运用平均曲率积分的定义和初等对称函数的性质,获得新的关于平均曲率积分的不等式。由著名的 Cauchy 不等式,还建立了对偶的凸体均质积分的不等式。这种从定义出发研究平均曲率积分间的不等式在积分几何中是最本质的也是较困难的。

2 主要结果及证明

定理 1 设 $K\in\mathcal{K}^n$,$\partial K\in C^2$,若 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}\leqslant 1\left(即\ H_{n-1}\leqslant\dfrac{1}{n-1}\right)$,则

$$M_0(\partial K)-(n-1)^2M_1(\partial K)+\cdots+(-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}M_{n-1}(\partial K)\geqslant(n-2)^{n-1}M_{n-1}(\partial K)。\tag{2}$$

证明 由初等对称函数不等式的性质,当 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}\leqslant 1$ 时,有[13]

$$E_0(k_1,\cdots,k_{n-1})-(n-1)E_1(k_1,\cdots,k_{n-1})+\cdots+(-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}E_{n-1}(k_1,\cdots,k_{n-1})\geqslant (n-2)^{n-1}E_{n-1}(k_1,\cdots,k_{n-1})\tag{3}$$

成立。对(3)式在 ∂K 上取积分,得到:

$$\int_{\partial K}\mathrm{d}\sigma-(n-1)\int_{\partial K}E_1(k_1,\cdots,k_{n-1})\mathrm{d}\sigma+\cdots+(-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}\int_{\partial K}E_{n-1}(k_1,\cdots,k_{n-1})\mathrm{d}\sigma\geqslant (n-2)^{n-1}\int_{\partial K}E_{n-1}(k_1,\cdots,k_{n-1})\mathrm{d}\sigma。$$

把 $M_r(\Sigma)=\dbinom{n-1}{r}^{-1}\displaystyle\int_\Sigma E_r(k)\mathrm{d}\sigma$,$r=1,\cdots,n-1$ 代入上式,故(2)式成立。 证毕

定理 2 设 $K\in\mathcal{K}^n$,$\partial K\in C^2$,若 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}=1\left(即\ H_{n-1}=\dfrac{1}{n-1}\right)$,则

$$1-\binom{n-1}{1}M_1(\partial K)+\binom{n-1}{2}M_2(\partial K)+\cdots+(-1)^{n-1}M_{n-1}(\partial K)\geqslant(n-2)^{(n-1)}M_{n-1}(\partial K)。\tag{4}$$

为了证明定理 2,首先引入下面两个引理。

引理 1 设 $K\in\mathcal{K}^n$,$\partial K\in C^2$,若 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}=1\left(即\ H_{n-1}=\dfrac{1}{n-1}\right)$,则

$$\binom{n-1}{r}\binom{n-1}{j}M_j(\partial K)\geqslant(n-1)^{(r-j)}\binom{n-1}{r}\binom{n-1}{j}M_r(\partial K)。\tag{5}$$

证明 由初等对称函数的性质,当 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}=1$ 时,有:

$$\binom{n-1}{r}E_j(k_1,\cdots,k_{n-1})\geqslant(n-1)^{(r-j)}\binom{n-1}{j}E_r(k_1,\cdots,k_{n-1})\tag{6}$$

成立[14],对(6)式在 ∂K 上取积分,得到:

$$\binom{n-1}{r}\int_{\partial K}E_j(k_1,\cdots,k_{n-1})\mathrm{d}\sigma\geqslant(n-1)^{(r-j)}\binom{n-1}{j}\int_{\partial K}E_r(k_1,\cdots,k_{n-1})\mathrm{d}\sigma,$$

故(5)式成立。 证毕

引理 2　设 $K\in\mathcal{K}^n$,$\partial K\in C^2$,若 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}=1\left(即\ H_{n-1}=\frac{1}{n-1}\right)$,则:

$$\binom{n-j-1}{r-j}\binom{n-1}{j}M_j(\partial K)-\binom{n-1}{j+1}\binom{n-j-2}{r-j-1}M_{j+1}(\partial K)\geqslant(n-1)^{(r-j)}\binom{n-1}{r}\binom{r}{j}M_r(\partial K)-n^{r-j-1}\binom{n-1}{r}\binom{r}{j+1}M_r(\partial K),\tag{7}$$

其中,$0\leqslant j\leqslant j+1\leqslant r\leqslant n-1$。

证明　由初等对称函数的性质,当 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}=1$ 时,有:

$$\binom{n-j-1}{r-j}E_j(k_1,\cdots,k_{n-1})-\binom{n-j-2}{r-j-1}E_{j+1}(k_1,\cdots,k_{n-1})\geqslant(n-1)^{(r-j)}\binom{r}{j}E_r(k_1,\cdots,k_{n-1})-n^{r-j-1}\binom{r}{j+1}E_r(k_1,\cdots,k_{n-1})\tag{8}$$

成立[14],其中,$0\leqslant j\leqslant j+1\leqslant r\leqslant n-1$,对(8)式在$\partial K$ 上取积分并利用(1)式,故引理 2 成立。　　证毕

证明(定理 2)　由(6) 式和(8)式,可以推出

$$1-E_1(k_1,\cdots,k_{n-1})+E_2(k_1,\cdots,k_{n-1})+\cdots+(-1)^{n-1}E_{n-1}(k_1,\cdots,k_{n-1})\geqslant(n-2)^{(n-1)}E_{n-1}(k_1,\cdots,k_{n-1})$$

成立[14]。上式在∂K 上取积分并利用(1)式,故定理 2 成立。　　证毕

定理 3　设 $K\in\mathcal{K}^n$,$\partial K\in C^2$,若 $0\leqslant k_i\leqslant\frac{1}{n-2}$,$k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}\geqslant1$, 则

$$M_{n-1}(\partial K)\geqslant M_0(\partial K)-(n-2)\binom{n-1}{1}M_1(\partial K)+\cdots+(-1)^{n-1}(n-2)^{n-1}M_{n-1}(\partial K)。\tag{9}$$

证明　由对称函数不等式的性质,当 $0\leqslant k_i\leqslant\frac{1}{n-2}$,$k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}\geqslant1$ 时,不等式

$$E_{n-1}(k_1,\cdots,k_{n-1})\geqslant E_0(k_1,\cdots,k_{n-1})-(n-2)E_1(k_1,\cdots,k_{n-1})+\cdots+(-1)^{n-1}(n-2)^{n-1}E_{n-1}(k_1,\cdots,k_{n-1})\tag{10}$$

成立[12]。对(10)式在 Σ 上取积分, 则

$$\int_\Sigma E_{n-1}(k_1,\cdots,k_{n-1})\mathrm{d}\sigma\geqslant\int_\Sigma\mathrm{d}\sigma-(n-2)\binom{n-1}{1}\int_\Sigma E_1(k_1,\cdots,k_{n-1})\mathrm{d}\sigma+\cdots+(-1)^{n-1}(n-2)^{n-1}\int_\Sigma E_{n-1}(k_1,\cdots,k_{n-1})\mathrm{d}\sigma,$$

将(1)式代入上式,故(9)式成立。　　证毕

由 Cauchy 公式和定理 1,得到

定理 4　设 $K\in\mathcal{K}^n$,$\partial K\in C^2$,若 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}\leqslant1$, 则

$$W_1(K)-(n-1)^2W_2(K)+\cdots+(-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}W_n(K)\geqslant(n-2)^{n-1}W_n(K)。\tag{11}$$

由 Cauchy 公式和定理 2,得到定理 5。

定理 5　设 $K\in\mathcal{K}^n$,$\partial K\in C^2$,若 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}=1\left(即\ H_{n-1}=\frac{1}{n-1}\right)$,则

$$1-\binom{n-1}{1}W_2(K)+\binom{n-1}{2}W_3(K)+\cdots+(-1)^{n-1}W_n(K)\geqslant(n-2)^{(n-1)}W_n(K)。\tag{12}$$

由 Cauchy 公式和定理 3,得到定理 6。

定理 6　设 $K\in\mathcal{K}^n$,$\partial K\in C^2$,若 $0\leqslant k_i\leqslant\frac{1}{n-2}$,$k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}\geqslant1$, 则

$$W_n(K)\geqslant W_1(K)-(n-2)\binom{n-1}{1}W_2(K)+\cdots+(-1)^{n-1}(n-2)^{n-1}W_n(K)。\tag{13}$$

参考文献：

[1] REN D.Topics in integral geometry[M].Sigapore: World Scientific,1994.

[2] SANTALO L.Integral geometry and geometric probability [M].London:Addison-Wesley,1976.

[3] SCHNEIDER R.Convex bodies:the Buunn-Minkowski theory[M].Cambridge:Cambridge University Press,1995.

[4] ZHAO X,ZHANG J,WANG B.Notes on kubota's formula [J].Jounal of Mathematics,2010,30(4):613-616.

[5] ZHOU J Z,JIANG D.On mean curvatures of a parallel convex body[J]. Acta Mathematica Science, 2008, 28B: 489-494.

[6] ZENG C N,MA L,XIA Y.On mean curvature integrals of the outer parallel body of the projection of a convex body [J].Journal of Inequalities and Applications,2014,1:1-11.

[7] 曾春娜,姜德烁。关于凸集平均曲率积分的注记[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2013,30(5):62-64.
ZENG C N,JIANG D S.Some notes on mean curvature integral of convex sets[J].Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2013,30(5):62-64.

[8] JIANG D S,ZENG C N.On mean values of mean curvature integrals of a flattened parallel body[J].Jounal of Mathematics,2012,32:429-438.

[9] LI Z,ZHOU J.On mean values of the outer parallel body [J].Jounal of Mathematics,2007,27:391-396.

[10] HARDY G H,LITTLEWOOD J E,POLYA G.Inequalities[M].Cambridge:Cambridge University Press,1952.

[11] SANTALO L.On the mean curvatures of a flattened convex body[J].Rev Fac Sci Univ Istanbul,1956,21:189-194.

[12] ROS A.Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvature and a congruence theorem[J].Journal of Differential Geometry,1988,27(2):215-220.

[13] 马统一,任天胜.关于一类对称函数不等式的控制证明[J].甘肃教育学院学报,2001,15(3):8-12.
MA T Y,REN T S.Control prove about a class of symmetric function inequalities[J].Journal of Gansu Education College(Social Sciences),2001,15(3):8-12.

[14] 石焕南.一类对称函数不等式的加强、推广及应用[J].北京联合大学学报,1999,13(2):50-55.
SHI H N.Sharpening and generalization of a class of inequalities for symmetric function and its applications[J]. Journal of Beijing Union University,1999,13(2):50-55.

Some Inequalities on Mean Curvature Integral of Convex Sets(Ⅱ)

ZENG Chunna, BAI Shikun

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]The mean curvature integral of convex sets in $\mathbf{R}^n$ is investigated. [**Methods**]It mainly uses the properties of mean curvature integrals, elementary symmetric functions, and the Cauchy formula. [**Findings**]Some new inequalities for the mean curvature integral and some inequalities on the quermassintegral of convex sets are obtained. [**Conclusions**]This enriches the study and applications of the inequalities for mean curvature integral in integral geometry.

Keywords:convex set; mean curvature integral; quermassintegral; symmetric function

(责任编辑 游中胜)