DOI:10.11721/cqnuj20170606

一类可解李代数的自同构群和 Centroid 代数*

黄忠铣
(武夷学院 数学与计算机学院,福建 武夷山 354300)

摘要:【目的】研究一类特殊的可解李代数的结构,此李代数以 Filiform 李代数为幂零根基。【方法】确定了以 m 维 Filiform 李代数为幂零根基的 $m+1$ 维可解李代数的自同构群同构于一有限阶矩阵乘法群。【结果】给出了此李代数的 Centroid 代数的矩阵表示。【结论】此可解李代数的 Centroid 代数是一个 $m+3$ 维可解李代数。

关键词:可解李代数;幂零李代数;自同构;Centroid 代数
中图分类号:O152.5 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2017)06-0065-05

任一李代数都有一个可解根基与幂零根基。所谓半单李代数是可解根基为零的李代数[1],在复数域上的半单李代数已经得到了较完善的结构理论。可解李代数与幂零李代数是李代数结构理论研究中的重要对象[2-6]。Filiform 李代数是一类特殊的幂零李代数,在李代数的分类上起重要作用[7-9]。

设 m 维幂零李代数 N,如果 N 具有性质 $\dim N^i=m-i-2$,则称 N 是一个 Filiform 李代数。记 N 是 m 维 Filiform 李代数,且满足在一组基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 下的乘法表为 $[e_1,e_i]=e_{i-1}$,$3\leqslant i\leqslant m$。在文献[10]中,论证了以 m 维 Filiform 李代数 N 为幂零根基的 $m+k(k>0)$ 维的可解李代数,则 $k=1$ 或 $k=2$。当 $k=1$ 时,在同构的意义下,该可解李代数有且仅有如下一类:

$$[e_1,e_i]=e_{i-1},[e_j,e_m]=e_{j-2},[e_{m+1},e_1]=e_1,[e_{m+1},e_l]=(m-l+2)e_k, \tag{1}$$

其中 $3\leqslant i\leqslant m$,$4\leqslant j\leqslant m-1$,$2\leqslant l\leqslant m$,$\{e_1,e_2,\cdots,e_m,e_{m+1}\}$ 是 L 的一组基。

本文将用矩阵代数刻画以 m 维 Filiform 李代数 N 为幂零根基的 $m+1$ 维可解李代数 L 的结构:其自同构和 Centroid 代数。

1 自同构群

定义 1[1] 设 L 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的李代数,如果存在可逆线性变换 $\varphi:L\to L$ 满足 $\varphi[x,y]=[\varphi(x),\varphi(y)]$,$\forall x,y\in L$,则称此可逆线性变换 φ 是李代数 L 的自同构映射。L 的所有自同构映射构成的集合关于映射的复合构成一个群,称为李代数 L 的自同构群,记作 $\mathrm{Aut}\, L$。

令李代数 L 的基为 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m,e_{m+1}\}$,$\varphi$ 是李代数 L 上的线性变换,可设 $\varphi(e_i)=\sum\limits_{l=1}^{m+1}a_{li}e_l\ (1\leqslant i\leqslant m+1)$。

定理 1 设 L 是 $m+1$ 维的以 N 为幂零根基的可解李代数,L 在基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m,e_{m+1}\}$ 下乘法表为(1)式,则 L 的任一自同构在此基下的矩阵为:

$$\begin{bmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_{1,m+1}\\
a_{21} & a_{11}^{m} & -a_{11}^{m-1}a_{1,m+1} & \cdots & a_{11}a_{3,m-1} & a_{11}a_{3m}+a_{41}a_{11}^{2} & a_{2m} & a_{2,m+1}\\
a_{31} & 0 & a_{11}^{m-1} & \cdots & a_{11}a_{4,m-1} & a_{11}a_{4m}+a_{51}a_{11}^{2} & a_{3m} & a_{3,m+1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{m-2} & 0 & 0 & \cdots & a_{11}^{4} & -a_{1,m+1}a_{11}^{3} & \frac{1}{2}a_{1,m+1}^{2}a_{11}^{2} & a_{m-2,m+1}\\
\frac{1}{2}a_{m,m+1}a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{11}^{3} & -a_{1,m+1}a_{11}^{2} & a_{m-1,m+1}\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{11}^{2} & a_{m,m+1}\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix},$$

* **收稿日期**:2016-09-29 **修回日期**:2017-10-04 **网络出版时间**:2017-11-10 15:40
资助项目:福建省教育厅科技项目(No.JB14107);福建省自然科学基金项目(No.2016J01761)
第一作者简介:黄忠铣,女,副教授,研究方向为李代数,E-mail:zhx-huang2@163.com
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20171110.1540.028.html

其中：

$$a_{m-3,m-1}=a_{11}a_{m-2,m}+a_{m-1,1}a_{11}^2=\frac{1}{2}a_{11}^3(a_{1,m+1}^2+a_{m,m+1}),$$

$$a_{m-3,m}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a_{1,m+1}^3a_{11}^2+a_{m-1,m+1}a_{11}^2+a_{m,m+1}a_{1,m+1}a_{11}^2\right),$$

$$a_{m-4,m}=-\frac{1}{4}(a_{1,m+1}a_{m-3,m}+a_{m-2,m+1}a_{mm}-a_{m,m+1}a_{m-2,m}),$$

$$a_{m-5,m}=-\frac{1}{5}(a_{1,m+1}a_{m-4,m}+a_{m-3,m+1}a_{mm}-a_{m,m+1}a_{m-3,m}),$$

$$a_{2m}=-\frac{1}{m-2}(a_{1,m+1}a_{3m}+a_{4,m+1}a_{mm}-a_{m,m+1}a_{4m}),$$

$$a_{21}=-\frac{1}{m-1}(a_{1,m+1}a_{31}-a_{3,m+1}a_{11}-a_{m,m+1}a_{41}),$$

$$a_{m-3,1}=-\frac{1}{4}(a_{1,m+1}a_{m-2,1}-a_{m-2,m+1}a_{11}-a_{m,m+1}a_{m-1,1}),$$

$$a_{m-2,1}=-\frac{1}{3}(a_{1,m+1}a_{m-1,1}-a_{m-1,m+1}a_{11})。$$

如当 $m=4$ 时，L 的任一自同构在基$\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$下的矩阵为：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & a_{15} \\ -\frac{1}{6}a_{11}a_{15}a_{45}+\frac{1}{3}a_{11}a_{35} & a_{11}^4 & -a_{11}^3a_{15} & \frac{1}{2}a_{11}^2a_{15}^2 & a_{25} \\ \frac{1}{2}a_{11}a_{45} & 0 & a_{11}^3 & -a_{11}^2a_{15} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11}^2 & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

当 $m=5$ 时，L 的任一自同构在基$\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$下的矩阵为：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{16} \\ -\frac{a_{11}}{4}\left(-\frac{1}{6}a_{16}^2a_{56}+\frac{a_{16}}{3}a_{46}-a_{36}-\frac{1}{2}a_{56}^2\right) & a_{11}^5 & -a_{11}^4a_{16} & \frac{a_{11}^3}{2}(a_{16}+a_{56}) & -\frac{1}{3}a_{11}^2\left(\frac{1}{2}a_{16}^3+a_{46}+a_{56}a_{16}\right) & a_{26} \\ -\frac{a_{11}}{3}\left(\frac{1}{2}a_{16}a_{56}-a_{46}\right) & 0 & a_{11}^4 & -a_{11}^3a_{16} & \frac{1}{2}a_{11}^2a_{16}^2 & a_{36} \\ \frac{1}{2}a_{11}a_{56} & 0 & 0 & a_{11}^3 & -a_{11}^2a_{16} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11}^2 & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

证明 设 φ 是李代数 L 上的自同构映射，设 $\varphi(e_i)=\sum_{l=1}^{m+1}a_{li}e_l\,(1\leqslant i\leqslant m+1)$，由乘法表(1)式，计算如下：

1) 对任意 $3\leqslant i\leqslant m$，$[e_1,e_i]=e_{i-1}$，将 φ 作用于两边得$[\varphi(e_1),\varphi(e_i)]=\varphi(e_{i-1})$，即$\left[\sum_{l=1}^{m+1}a_{l1}e_l,\sum_{l=1}^{m+1}a_{li}e_l\right]=\sum_{l=1}^{m+1}a_{l,i-1}e_l$，又有：

$$\left[\sum_{l=1}^{m+1}a_{l1}e_l,\sum_{l=1}^{m+1}a_{li}e_l\right]=a_{11}\sum_{j=3}^{m}a_{ji}e_{j-1}+\sum_{j=4}^{m-1}a_{j1}a_{mi}e_{j-2}+a_{m+1,1}a_{1i}e_1-$$

$$\sum_{j=3}^{m} a_{j1}a_{1i}e_{j-1}-\sum_{j=4}^{m-1} a_{m1}a_{ji}e_{j-2}-a_{11}a_{m+1,i}e_1+\sum_{k=2}^{m} a_{m+1,1}a_{ki}(m-k+2)e_k-\sum_{k=2}^{m} a_{k1}a_{m+1,i}(m-k+2)e_k,$$

得 $a_{1,i-1}=0, a_{2,i-1}=a_{11}a_{3i}+a_{41}a_{mi}, a_{3,i-1}=a_{11}a_{4i}+a_{51}a_{mi}, \cdots, a_{m-3,i-1}=a_{11}a_{m-2,i}+a_{m-1,1}a_{mi}, a_{m-2,i-1}=a_{11}a_{m-1,i}, a_{m-1,i-1}=0, a_{m,i-1}=0, a_{m+1,i-1}=0$。

2) $4\leqslant j\leqslant m-1$，$[e_j,e_m]=e_{j-2}$，将 φ 作用两边得 $[\varphi e_j,\varphi e_m]=\varphi e_{j-2}$，即 $\left[\sum_{l=1}^{m+1} a_{lj}e_l, \sum_{l=1}^{m+1} a_{lm}e_l\right]=\sum_{l=1}^{m+1} a_{l,j-2}e_l$。

又有：

$$\left[\sum_{l=1}^{m+1} a_{lj}e_l, \sum_{l=1}^{m+1} a_{lm}e_l\right]=a_{1j}\sum_{i=3}^{m} a_{im}e_{i-1}-\sum_{i=3}^{m} a_{ij}a_{1m}e_{i-1}+\sum_{k=4}^{m-1} a_{kj}a_{mm}e_{k-2}-\sum_{k=4}^{m-1} a_{mj}a_{km}e_{k-2}+$$

$$a_{m+1,j}a_{1m}e_1-a_{1j}a_{m+1,m}e_1+\sum_{k=2}^{m} a_{m+1,j}a_{km}(m-k+2)e_k-\sum_{k=2}^{m} a_{kj}a_{m+1,m}(m-k+2)e_k,$$

得 $a_{1,j-2}=0, a_{2,j-2}=a_{4j}a_{mm}, \cdots, a_{m-3,j-2}=0(4\leqslant j\leqslant m-2), a_{m-3,m-3}=a_{11}^{5}, a_{m-2,j-2}=0, a_{m-1,j-2}=0, a_{m,j-2}=0, a_{m+1,j-2}=0$。

3) $[e_{m+1},e_1]=e_1$，将 φ 作用于两边得 $[\varphi e_{m+1},\varphi e_1]=\varphi e_1$，即 $\left[\sum_{l=1}^{m+1} a_{l,m+1}e_l, \sum_{l=1}^{m+1} a_{l1}e_l\right]=\sum_{l=1}^{m+1} a_{l,1}e_l$。又有：

$$\left[\sum_{l=1}^{m+1} a_{l,m+1}e_l, \sum_{l=1}^{m+1} a_{l1}e_l\right]=\sum_{i=3}^{m} a_{1,m+1}a_{i1}e_{i-1}-\sum_{i=3}^{m} a_{i,m+1}a_{11}e_{i-1}+\sum_{j=4}^{m-1} a_{j,m+1}a_{m1}e_{j-2}-\sum_{j=4}^{m-1} a_{m,m+1}a_{j1}e_{j-2}+$$

$$a_{m+1,m+1}a_{11}e_1-a_{1,m+1}a_{m+1,1}e_1+\sum_{k=2}^{m} a_{m+1,m+1}a_{k1}(m-k+2)e_k-\sum_{k=2}^{m} a_{k,m+1}a_{m+1,1}(m-k+2)e_k,$$

得 $a_{m+1,m+1}=1, a_{21}=-\frac{1}{m-1}(a_{1,m+1}a_{31}-a_{3,m+1}a_{11}-a_{m,m+1}a_{41}), \cdots, a_{m-3,1}=-\frac{1}{4}(a_{1,m+1}a_{m-2,1}-a_{m-2,m+1}a_{11}-a_{m,m+1}a_{m-1,1}), a_{m-2,1}=-\frac{1}{3}(a_{1,m+1}a_{m-1,1}-a_{m-1,m+1}a_{11}), a_{m-1,1}=\frac{1}{2}a_{m,m+1}a_{11}, a_{m1}=0, a_{m+1,1}=0$。

4) $2\leqslant k\leqslant m$，$[e_{m+1},e_k]=(m-k+2)e_k$，将 φ 作用两边得 $[\varphi e_{m+1},\varphi e_k]=(m-k+2)\varphi e_k$，即 $\left[\sum_{l=1}^{m+1} a_{l,m+1}e_l, \sum_{l=1}^{m+1} a_{lk}e_l\right]=(m-k+2)\sum_{l=1}^{m+1} a_{lk}e_l$。又有：

$$\left[\sum_{l=1}^{m+1} a_{l,m+1}e_l, \sum_{l=1}^{m+1} a_{lk}e_l\right]=\sum_{i=3}^{m} a_{1,m+1}a_{ik}e_{i-1}-\sum_{i=3}^{m} a_{i,m+1}a_{1k}e_{i-1}+\sum_{j=4}^{m-1} a_{j,m+1}a_{mk}e_{j-2}-\sum_{j=4}^{m-1} a_{m,m+1}a_{jk}e_{j-2}+$$

$$a_{m+1,m+1}a_{1k}e_1-a_{1,m+1}a_{m+1,k}e_1+\sum_{j=2}^{m} a_{m+1,m+1}a_{jk}(m-j+2)e_j-\sum_{j=2}^{m} a_{j,m+1}a_{m+1,k}(m-j+2)e_j,$$

得：

$$a_{1k}=0, (m-k+2)a_{2k}=a_{1,m+1}a_{3k}+a_{4,m+1}a_{mk}-a_{m,m+1}a_{4k}+ma_{2k}, \cdots, a_{m-3,m-2}=-a_{1,m+1}a_{11}^{4},$$

$$a_{m-3,k}=0(k<m-3), a_{m-3,m-1}=-\frac{1}{2}(a_{1,m+1}a_{m-2,m-1}-a_{m,m+1}a_{m-1,m-1}+5a_{m-3,m}),$$

$$a_{m-3,m}=-\frac{1}{3}(a_{1,m+1}a_{m-2,m}+a_{m-1,m+1}a_{mm}-a_{m,m+1}a_{m-1,m}+5a_{m-3,m}), a_{m-2,m-1}=-a_{1,m+1}a_{11}^{3},$$

$a_{m-2,m}=\frac{1}{2}a_{1,m+1}^{2}a_{11}^{2}, a_{m-1,k}=0(2\leqslant k\leqslant m-2), a_{m-1,m-1}\neq 0, a_{m-1,m}=-a_{1,m+1}a_{mm}, a_{mk}=0, (m\neq k), a_{m+1,k}=0$。

整理得定理 1 的矩阵。　　证毕

推论 1　$m+1$ 维的以 N 为幂零根基的可解李代数 L 的自同构群 Aut L 同构于一有限阶的矩阵乘法群。

2 Centroid 代数

定义 2[7]　设 L 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的李代数,若线性变换 $\sigma\in\mathrm{End}(L)$ 且 $\sigma([x,y])=[x,\sigma(y)]$, $\forall x,y\in L$,则称变换 σ 是 L 的 Centroid。L 上的所有 Centroid 的集合记作 $\mathrm{Cent}(L)$。

定理 2　设 L 是 $m+1$ 维的以 N 为幂零根基的可解李代数,L 在基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m,e_{m+1}\}$ 下乘法表为(1),则 L 的任一 Centroid 代数 σ(即 $\sigma([x,y])=[x,\sigma(y)]$, $\forall x,y\in L$)在此基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \vdots & a_{2,m+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{22} & a_{m,m+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{m+1,m+1} \end{bmatrix}。$$

证明　设 σ 是李代数 L 上的线性变换,设 $\sigma(e_i)=\sum_{l=1}^{m+1}a_{li}e_l(1\leqslant i\leqslant m+1)$,由乘法表(1),计算如下。

1) $[e_1,e_i]=e_{i-1}$,将 σ 作用两边得 $\sigma[e_1,e_i]=\sigma e_{i-1}$,可得 $[e_1,\sigma e_i]=\sigma e_{i-1}=\sum_{j=1}^{m+1}a_{j,i-1}e_j$,即 $[e_1,\sigma e_i]=\left[e_1,\sum_{j=1}^{m+1}a_{ji}e_j\right]=\sum_{j=3}^{m}a_{ji}e_{j-1}-a_{m+1,i}e_1$。

由此可得 $a_{1,i-1}=-a_{m+1,i}$, $a_{2,i-1}=a_{3i}$, $a_{3,i-1}=a_{4i}$, $\cdots$, $a_{m-2,i-1}=a_{m-1,i}$, $a_{m-1,i-1}=a_{mi}$, $a_{m,i-1}=0$。

2) $[e_j,e_m]=e_{j-2}$, $4\leqslant j\leqslant m-1$。将 σ 作用两边得 $\sigma[e_j,e_m]=\sigma e_{j-2}$, $\sigma e_{j-2}=\sum_{k=1}^{m+1}a_{k,j-2}e_k$, $\sigma[e_j,e_m]=[e_j,\sigma(e_m)]=\left[e_j,\sum_{k=1}^{m+1}a_{km}e_k\right]=-a_{1m}e_{j-1}+a_{mm}e_{j-2}-(m-j+2)a_{m+1,m}e_j$。

于是当 $j=4$ 时,$a_{mm}=a_{22}$, $-a_{1m}=a_{32}$, $-(m-2)a_{m+1,m}=a_{42}$。当 $j=5$ 时,$a_{mm}=a_{33}$, $-a_{1m}=a_{43}$, $-(m-3)a_{m+1,m}=a_{52}$。

……

当 $j=m-1$ 时,$a_{mm}=a_{m-3,m-3}$, $-a_{1m}=a_{m-2,m-3}$, $-3a_{m+1,m}=a_{m-1,j-2}$。

3) $[e_{m+1},e_1]=e_1$,将 σ 作用于两边得 $\sigma[e_{m+1},e_1]=\sigma e_1$,即

$\sigma e_1=\sum_{k=1}^{m+1}a_{k1}e_k$, $[e_{m+1},\sigma e_1]=[e_{m+1},\sigma e_1]=\left[e_{m+1},\sum_{k=1}^{m+1}a_{k1}e_k\right]=a_{11}e_1+ma_{21}e_2+(m-1)a_{31}e_3+\cdots+2a_{m1}e_m$,

得 $a_{11}=a_{11}$, $a_{21}=ma_{21}$, $a_{31}=(m-1)a_{31}$, $\cdots$, $a_{m1}=2a_{m1}$, $a_{m+1,1}=0$,从而 $a_{21}=0$, $a_{31}=0$, $\cdots$, $a_{m1}=0$, $a_{m+1,1}=0$。

4) $[e_{m+1},e_k]=(m-k+2)e_k$, $2\leqslant k\leqslant m$,将 σ 作用两边得:

$$\sigma[e_{m+1},e_k]=(m-k+2)\sigma e_k,\ [e_{m+1},\sigma e_k]=(m-k+2)\sigma e_k=(m-k+2)\sum_{j=1}^{m+1}a_{jk}e_j,$$

$$\left[e_{m+1},\sum_{j=1}^{m+1}a_{jk}e_j\right]=a_{1k}e_1+ma_{2k}e_2+(m-1)a_{3k}e_3+\cdots+2a_{mk}e_m。$$

从而有:

$$(m-k+2)a_{1k}=a_{1k},\ (m-k+2)a_{2k}=ma_{2k},$$

$$(m-k+2)a_{3k}=(m-1)a_{3k},\cdots,(m-k+2)a_{mk}=2a_{mk},a_{m+1,k}=0,$$

即 $a_{jk}=0(2\leqslant j\leqslant m,j\neq k),a_{m+1,k}=0$。 证毕

引理[5] 设 L 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的李代数，则 L 上的所有 Centroid 的集合 Cent(L)是一个李代数。

推论 $m+1$ 维的以 N 为幂零根基的可解李代数 L 的 Cent(L)是一个 $m+3$ 维的可解李代数。

参考文献：

[1] HUMPHREYS J E.Introduction to Lie algebras and representation theory[M].New York:Springer-Verlag,1972.

[2] MENG D J.Solvable complete Lie algebras I[J].Comm Algebra,1996,24:4181-4197.

[3] JIANG C P,MENG D J,ZHANG S Q.Some complete Lie Algebras[J].Journal of algebra,1996,186:807-817.

[4] YAN Z L,DENG S Q.Completable two step nilpotent Lie algebras of type (2,p)[J].Linear and Multilinear Algebra,2014,62(4):445-452.

[5] CICALO S, DE G W, SCHNEIDER C. Six-dimensional nilpotent Lie algebras[J]. Linear Algebra and its Applicationa,2012,436(1):163-189.

[6] SCHNEIDER C,USEFI H.The classification of p-nilpotent restricted Lie algebras of dimension at most 4[J]. Forum Mathematicum,2016,28(4):713-727.

[7] ALLISON B,BENKART G,GAO Y.Central extensions of Lie algebras graded by finite root system[J]. Mathematische Annalen,2000,316(3):499-527.

[8] GÓMEZ J R,JIMENÉZ-MERCHÁN A,KHAKIMDJANOV Y. Low-dimensional filiform Lie algebras[J]. Journal of Pure and Applied Algebra,1998,130(2):133-158.

[9] CEBALLOS M,NÚÑEZ J,TENORIO Á F.New Results in the classification of filiform Lie algebras bull[J]. Malays Math Sci Soc,2017,40(1):409-437.

[10] BAI R P,SHEN C H,ZHANG Y Z.Solvable 3-Lie algebras with an ideal N[J]. Electronic Journal of Linear,2010,21:43-62.

The Automorphism Group and the Centroid Algebra of a Class of Solvable Lie Algebras

HUANG Zhongxian

(College of Mathematics and Computer Science, Wuyi University, Wuyishan Fujian 354300, China)

Abstract: [**Purposes**]A class of solvable Lie algebras with special Filiform nilpotent radicals are discussed.[**Methods**]The automorphism group of the $m+1$-dimensional Lie algebra which has m-dimensional special Filiform nilpotent radicals is omorphic to a $m+1$-order matrix multiplication group.[**Findings**] Its matrix representation was given.[**Conclusions**]And the Centroid algebra of it is given, which is a $m+3$-dimensional solvable Lie algebra.

Keywords: solvable Lie algebra;nilpotent Lie algebra; automorphism;centroid algebra

(责任编辑 许 甲)