DOI:10.11721/cqnuj20170615

Dirichlet 空间上 Hankel 算子的紧性*

孙 志 玲

(内蒙古民族大学 数学学院,内蒙古 通辽 028000)

摘要:【目的】讨论高维 Dirichlet 空间上的 3 种 Hankel 算子的紧性。【方法】利用 Bergman 空间和 Dirichlet 空间之间的 Toeplitz 算子之间的关系进行讨论。【结果】证明了大 Hankel 和小 Hankel 算子的紧性,在此基础上也得出了 Little Hankel 算子的紧性。【结论】Dirichlet 空间算子的性质与 Bergman 空间密切相关。

关键词: Dirichlet 空间;Hankel 算子;紧性

中图分类号:O177.1　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2017)06-0070-04

1 预备知识

在 Bergman 空间上得到了丰富的紧 Toeplitz 算子和 Hankel 算子的一些相关性质,而 Dirichlet 空间和 Bergman 空间存在着密切联系,因而人们开始在 Dirichlet 空间研究相关问题[1-5]。近些年在更广的调和 Dirichlet 空间中也有一些相关结果[6-7]。最近在 Fock 空间也有相关问题的研究[8]。在文献[4]中讨论了大 Hankel 算子在单位圆盘上的 Dirichlet 空间的紧性,在此基础上本文研究了高维 Dirichlet 空间 3 种 Hankel 算子的紧性。

设 B_n 是 C^n 中的单位球,dv 是 B_n 上正规化的 Lebesgue 测度。Sobolev 空间 $L^{2,1}$ 是 B_n 上满足 $\|u\|_{\frac{1}{2}}=\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{B_n}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial z_i}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial \overline{z}_i}\right|^2+|u(z)|^2\right)\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{2}}<\infty$ 的函数全体。显而易见,$L^{2,1}$ 在内积 $\langle u,v\rangle_{\frac{1}{2}}=\sum_{i=1}^{n}\left\langle\frac{\partial u}{\partial z_i},\frac{\partial v}{\partial z_i}\right\rangle+\sum_{i=1}^{n}\left\langle\frac{\partial u}{\partial \overline{z}_i},\frac{\partial v}{\partial \overline{z}_i}\right\rangle+\langle u,v\rangle$ 下是一个 Hilbert 空间。Dirichlet 空间 $\mathcal{D}$ 是 $L^{2,1}$ 中满足 $g(0)=0$ 的所有解析函数构成的子空间。令 P 是 $L^{2,1}$ 到 $\mathcal{D}$ 的正交投影,记作 $P(f)(w)=\langle f,K_w\rangle_{\frac{1}{2}}=\sum_{i=1}^{n}\int_{B_n}\frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{\partial \overline{K}_w}{\partial z_i}\mathrm{d}v$,其中 $K(z,w)$ 是 $\mathcal{D}$ 的再生核,通过直接计算得 $K(z,w)=\sum_{\alpha\in \mathbf{Z}^{+n}}\frac{(|\alpha|+n-1)!}{|\alpha|!\,n!\,\alpha!}z^{\alpha}\overline{w}^{\alpha}$,$z^{\alpha}=z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}$,$\alpha=(\alpha_1\cdots\alpha_n)$,$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$,$\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$。记 $L^{\infty,1}=\left\{f\,\middle|\,f,\frac{\partial f}{\partial z_i},\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i}\in L^{\infty}(B_n)\right\}$,对任意 $\varphi\in L^{\infty,1}$,定义 $f\in\mathcal{D}$ 上的有界线性算子 $T_{\varphi}(f)(w)=P(\varphi f)(w)=\langle\varphi f,K_w\rangle_{\frac{1}{2}}$,称 T_{φ} 为 $\mathcal{D}$ 上带有符号 φ 的 Toeplitz 算子。同时,定义大 Hankel 算子为 $H_{\varphi}(f)(w)=(I-P)(\varphi f)(w)$;并且小 Hankel 定义为:$\Gamma_{\varphi}(f)(w)=P(\varphi Jf))$,此处 J 是 $\mathcal{D}$ 上通过 $J(f)(z)=J(\overline{z})$ 的方式定义的酉算子。除此之外,还可以定义以 φ 为符号的 Little Hankel(也称作 Reduce Hankel) 算子,$h_{\varphi}(f)(w)=\overline{P}(\varphi f))$,其中 $\overline{P}$ 表示 $L^{2,1}$ 到 $\overline{\mathcal{D}}$($\mathcal{D}$ 的复共轭) 的正交投影。

用 $L^2(B_n)$ 表示单位球 B_n 上平方可积的函数构成的 Hilbert 空间。下面文中是以 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\frac{1}{2}}$ 表示 $\mathcal{D}$ 中的内积,用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $L^2(B_n)$ 中的内积。

* **收稿日期:**2016-09-05　**修回日期:**2017-05-30　**网络出版时间:**2017-11-10 15:36

资助项目:内蒙古自治区自然科学基金(No.2014BS0106;No.2016MS0118)

第一作者简介:孙志玲,女,讲师,博士,研究方向为算子理论,E-mail:zlingsun@126.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20171110.1536.010.html

以 $L_a^2(B_n)$ 表示单位球 B_n 上的 Bergman 空间，对任意 $\varphi\in L^\infty(B_n)$，记 $\widetilde{T}_\varphi$ 为 $L_a^2(B_n)$ 上具有符号 φ 的 Toeplitz 算子，相应大 Hankel 算子为 $\widetilde{H}_\varphi$。对函数 $\varphi\in L_a^2(B_n)$，它的 Berezin 变换定义为 $\hat{\varphi}(z)=\langle\varphi k_z,k_z\rangle$，这里 $K_z(w)=\dfrac{1}{(1-\langle w,z\rangle)^{n+1}}$，$k_z$ 是 K_z 是标准化。

2 一些引理

不难证明$\mathcal{D}\subset L_a^2(B_n)$，记 $i:\mathcal{D}\mapsto L_a^2(B_n)$为嵌入算子，下面的引理给出了算子 i 紧的性质。

引理 1　嵌入算子 i 为紧算子。

证明　假定 $\{f_k\}\subset\mathcal{D}$是弱收敛到 0 的序列且满足 $\|f_k\|_{\mathcal{D}}=1$，下面来证 $\|if_k\|_{L_a^2}\to 0(k\to\infty)$，不妨设 $f_k(z)=\sum\limits_{\alpha\in\mathbf{Z}^{+n}}a_\alpha^{(k)}z^\alpha$，根据 $f_k\xrightarrow{w}0$ 知，$a_\alpha^{(k)}\to 0(k\to\infty,\forall\alpha)$。由于 $\|f_k\|_{\mathcal{D}}^2=\sum\limits_{j=1}^n\left\|\dfrac{\partial f_k}{\partial z_j}\right\|_{L_a^2}^2=1$，故：

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}^{+n}}|a_\alpha^{(k)}|^2|\alpha|\frac{n!\ \alpha!}{(|\alpha|+n-1)!}=1(\forall k)。$$

因此对 $\forall\varepsilon>0$，存在与 k 无关的 N_0，使得 $\sum_{|\alpha|>N_0}|a_\alpha^{(k)}|^2\dfrac{n!\ \alpha!}{(|\alpha|+n)!}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$，从而有：

$$\|if_k\|_{L_a^2}=\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}^{+n}}|a_\alpha^{(k)}|^2\frac{n!\ \alpha!}{(|\alpha|+n)!}\leqslant\sum_{|\alpha|\leqslant N_0}|a_\alpha^{(k)}|^2\frac{n!\ \alpha!}{(|\alpha|+n)!}+\frac{\varepsilon}{2}。$$

令 $k\to\infty$，由于 $a_\alpha^{(k)}\to 0(\forall\alpha)$，可以得到 $\|if_k\|_{L_a^2}\to 0$，故 i 为紧算子。　证毕

令 $U_i:\mathcal{D}\to L_a^2(B_n)$是 f 到 f'_{z_i} 的映射，容易验证 $\|U_i\|\leqslant 1$。

引理 2　对 $\varphi\in L^{\infty,1}$，有 $T_\varphi=K_0+\sum\limits_{i=1}^n U_i^*\widetilde{T}_\varphi U_i$，这里 $K_0=\sum\limits_{i=1}^n U_i^*\widetilde{T}_{\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}}i$ 是$\mathcal{D}$上的紧算子。

证明　对 $f,g\in\mathcal{D}$，通过直接计算得：

$$\langle T_\varphi f,g\rangle_{\frac{1}{2}}=\langle\varphi f,g\rangle_{\frac{1}{2}}=\sum_{i=1}^n\left\langle\varphi\frac{\partial f}{\partial z_i},\frac{\partial g}{\partial z_i}\right\rangle+\sum_{i=1}^n\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}f,\frac{\partial g}{\partial z_i}\right\rangle=$$

$$\sum_{i=1}^n\left\langle T_\varphi\frac{\partial f}{\partial z_i},\frac{\partial g}{\partial z_i}\right\rangle+\sum_{i=1}^n\left\langle T_{\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}}if,\frac{\partial g}{\partial z_i}\right\rangle=\sum_{i=1}^n\langle U_i^*\widetilde{T}_\varphi U_if,g\rangle_{\frac{1}{2}}+\sum_{i=1}^n\left\langle U_i^*\widetilde{T}_{\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}}if,g\right\rangle_{\frac{1}{2}}。$$

因此 $T_\varphi=K_0+\sum\limits_{i=1}^n U_i^*\widetilde{T}_\varphi U_i$，其中 $K_0=\sum\limits_{i=1}^n U_i^*\widetilde{T}_{\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}}i$，由引理 1 知 K_0 在$\mathcal{D}$上是紧算子。　证毕

引理 3　对 $\varphi,\psi\in L^{\infty,1}$，则有：i) $M_\psi^*M_\varphi=K_1+\sum\limits_{i=1}^n U_i^*\widetilde{T}_{\bar{\psi}\varphi}U_i$，这里 K_1 为$\mathcal{D}$上的某个紧算子；ii) $H_\psi^*H_\varphi=K_2+\sum\limits_{i=1}^n U_i^*\widetilde{H}_\psi^*\widetilde{H}_\varphi U_i$，这里 K_2 为$\mathcal{D}$上的某个紧算子。

证明　i) 对 $f,g\in\mathcal{D}$，有：

$$\langle M_\psi^*M_\varphi f,g\rangle_{\frac{1}{2}}=\langle\varphi f,\psi g\rangle_{\frac{1}{2}}=\int_{B^n}\varphi f\,\mathrm{d}v\,\overline{\int_{B^n}\psi g\,\mathrm{d}v}+\sum_{n=1}^n\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}f+\frac{\partial f}{\partial z_i}\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial z_i}g+\frac{\partial g}{\partial z_i}\psi\right\rangle+\sum_{n=1}^n\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_i}f,\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}_i}g\right\rangle=$$

$$\int_{B^n}\varphi f\,\mathrm{d}v\,\overline{\int_{B^n}\psi g\,\mathrm{d}v}+\sum_{n=1}^n\left(\left\langle i^*\widetilde{T}_{\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial z_i}\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}}if,g\right\rangle_{\frac{1}{2}}+\left\langle i^*\widetilde{T}_{\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial z_i}\varphi}Uf,g\right\rangle_{\frac{1}{2}}\right)+$$

$$\sum_{i=1}^n\left(\left\langle U_i^*\widetilde{T}_{\bar{\psi}\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}}if,g\right\rangle_{\frac{1}{2}}+\left\langle U_i^*\widetilde{T}_{\bar{\psi}\varphi}U_if,g\right\rangle_{\frac{1}{2}}+\left\langle i^*\widetilde{T}_{\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{z}_i}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_i}}if,g\right\rangle_{\frac{1}{2}}\right),$$

用 L_φ 表示定义在$\mathcal{D}$上的线性泛函,其中 $L_\varphi f=\int_{B^n}\varphi f\mathrm{d}v$,因此 $M_\psi^*M_\varphi=K_1+\sum_{i=1}^n U_i^*\widetilde{T}_{\bar{\psi}\varphi}U_i$。根据引理1,这里 $K_1=L_\psi^*L_\varphi+\sum_{i=1}^n i^*(\widetilde{T}_{\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial z_i}\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}}+\widetilde{T}_{\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{z}_i}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_i}})i+\sum_{i=1}^n(U_i^*\widetilde{T}_{\bar{\psi}\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}}i+i^*\widetilde{T}_{\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial z_i}\varphi}U_i)$ 在$\mathcal{D}$上是紧算子。

ii)

$$\langle H_\psi^*H_\varphi f,g\rangle=\langle H_\varphi f,H_\psi g\rangle=\langle(I-P)\varphi f,\psi g\rangle=\langle M_\varphi f,M_\psi g\rangle-\langle T_\varphi f,T_\psi g\rangle=\langle M_\psi^*M_\varphi f,g\rangle-\langle T_\psi^*T_\varphi f,g\rangle。$$

因此 $H_\psi^*H_\varphi=M_\psi^*M_\varphi-T_\psi^*T_\varphi$。通过引理2,$T_\psi^*T_\varphi=K+\sum_{i=1}^n U_i^*\widetilde{T}_\psi^*\widetilde{T}_\varphi U_i$,$K$ 为$\mathcal{D}$上的紧算子;再由Bergman空间算子关系式 $\widetilde{H}_\psi^*\widetilde{H}_\varphi=\widetilde{T}_{\bar{\psi}\varphi}-\widetilde{T}_\psi^*\widetilde{T}_\varphi$,以及i)式,经简单计算得 $H_\psi^*H_\varphi=K_2+\sum_{i=1}^n U_i^*\widetilde{H}_\psi^*\widetilde{H}_\varphi U_i$,这里 K_2 为$\mathcal{D}$上的紧算子。　证毕

3 主要结果

定理1　对任意 $\varphi,\psi\in L^{\infty,1}$,则:

1) $H_\psi^*H_\varphi$ 在$\mathcal{D}$上是紧算子当且仅当 $\widetilde{H}_\psi^*\widetilde{H}_\varphi$ 在 $L_a^2(B_n)$上是紧的。特别地,H_φ 在$\mathcal{D}$上是紧的当且仅当 $\widetilde{H}_\varphi$ 在 $L_a^2(B_n)$上是紧的;

2) $M_\psi^*M_\varphi$ 在$\mathcal{D}$上是紧算子当且仅当 $\widetilde{T}_{\bar{\psi}\varphi}$ 在 $L_a^2(B_n)$上是紧的。特别地,M_φ 在$\mathcal{D}$上是紧的当且仅当 $\lambda\to\partial B_n$,$|\hat{\varphi}|^2(\lambda)\to0$。

证明　1) 由引理3的ii)知,$H_\psi^*H_\varphi$ 在$\mathcal{D}$上紧当且仅当 $\widetilde{H}_\psi^*\widetilde{H}_\varphi$ 在 $L_a^2(B_n)$紧,特别的取 $\varphi=\psi$,则有 $H_\varphi^*H_\varphi$ 是紧的当且仅当 $\widetilde{H}_\varphi^*\widetilde{H}_\varphi$ 是紧的,由文献[9]中的定理1.20知在Hilbert空间$\mathcal{D}$中 $H_\varphi^*H_\varphi$ 是紧的与 H_φ 的紧性等价。

2) 由引理3的i)得,$M_\psi^*M_\varphi$ 在$\mathcal{D}$上紧当且仅当 $\widetilde{T}_{\bar{\psi}\varphi}$ 在 $L_a^2(B_n)$上紧,特别地取 $\varphi=\psi$,则有 $M_\varphi^*M_\varphi$ 在$\mathcal{D}$上紧当且仅当 $\widetilde{T}_{|\varphi|^2}$ 在 $L_a^2(B_n)$上紧,由文献[2]的定理4,$\widetilde{T}_{|\varphi|^2}$ 在$\mathcal{D}$上紧当且仅当 $|\hat{\varphi}|^2(\lambda)\to0$,$\lambda\to\partial B_n$,同理在Hilbert空间$\mathcal{D}$中 $M_\psi^*M_\varphi$ 的紧性与 M_φ 的紧性等价。　证毕

定理2　对任意 $\varphi\in L^{\infty,1}$,则 Γ_φ 是$\mathcal{D}$上的紧算子。

证明　任取 $f,g\in\mathcal{D}$,有:

$$\langle\Gamma_\varphi f,g\rangle_{\frac{1}{2}}=\langle\varphi Jf,g\rangle_{\frac{1}{2}}=\sum_{i=1}^n\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}Jf,\frac{\partial g}{\partial z_i}\right\rangle \tag{1}$$

对$\{f_k\}\subset\mathcal{D}$弱收敛到0的序列,满足 $\|f_k\|_{\mathcal{D}}=1$,由引理1知 i 为紧算子,则有 $\|if_k\|_{L_a^2}\to0(k\to\infty)$,由(1)式有:

$$\|\Gamma_\varphi f_k\|_{\frac{1}{2}}^2=\langle\Gamma_\varphi f_k,\Gamma_\varphi f_k\rangle_{\frac{1}{2}}=\sum_{i=1}^n\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}Jf_k,\frac{\partial(\Gamma_\varphi f)}{\partial z_i}\right\rangle\leqslant\sum_{i=1}^n\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}Jf_k\right\|_{L_a^2}\left\|\frac{\partial(\Gamma_\varphi f)}{\partial z_i}\right\|_{L_a^2}\leqslant M\|Jf_k\|_{L_a^2}\sum_{i=1}^n\left\|\frac{\partial(\Gamma_\varphi f)}{\partial z_i}\right\|_{L_a^2}$$

因此有 $\|\Gamma_\varphi f_k\|_{\frac{1}{2}}\leqslant M\|Jf_k\|_{L_a^2}=M\|f_k\|_{L_a^2}\to0(k\to\infty)$。

这样便得到了 Γ_φ 是$\mathcal{D}$上的紧算子的结论。　证毕

通过一些计算,有下面的关系成立。

命题1　对 $\varphi\in L^{\infty,1}$,有下面的关系式 $\Gamma_\varphi=Uh_{\hat{\varphi}}$ 成立,其中 $\hat{\varphi}(z)=\varphi(\bar{z})$,$z\in B_n$。

由命题1及定理2容易得到下面的推论。

推论 1 对任意 $\varphi \in L^{\infty,1}$，则 h_φ 是$\mathcal{D}$上的紧算子。

参考文献：

[1] 曹广福.Dirichlet 空间上的 Toeplitz 算子[J].数学年刊，2000，21A(4)：499-512.
CAO G F.Toeplitz operators on Dirichlet spaces[J].Annals of Mathmatics，2000，21A(4)：499-512.

[2] 曹广福，朱淥涛.Dirichlet 空间上的 Toeplitz 算子的紧性[J].数学学报，2001，44(2)：241-248.
CAO G F，ZHU L T.The compactness of Toeplitz operators on Dirichlet spaces[J].Acta Mathematica Sinica，2001，44(2)：241-248.

[3] 卢玉峰，孙顺华.Dirichlet 空间上的 Toeplitz 算子[J].数学学报，2003，46(5)：981-984.
LU Y F，SUN S H.Toeplitz operators on Dirichlet spaces[J].Acta Mathematica Sinica，2003，46(5)：981-984.

[4] ZHAO L K. Hankel operator on the Dirichlet space[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2009，352：767-772.

[5] 夏锦，王晓峰，曹广福.Dirichlet 空间上的紧算子[J].数学物理学报，2009，29A(5)：1196-1205.
XIA J，WANG X F，CAO G F. Compact operators on Dirichlet spaces[J]. Acta Mathematica Scientia，2009，29A(5)：1196-1205.

[6] ZHANG Z L，ZHAO L K.Toeplitz algebra on the harmonic Dirichlet space[J]. Journal of Fudan University，2008，47(2)：251-265.

[7] 冯丽霞，麻文芳，赵连阔.调和 Dirichlet 空间上 Toeplitz 算子与小 Hankel 算子的交换性[J].数学杂志，2015，35(4)：917-926.
FENG L X，MA W F，ZHAO L K.Commutativity of Toeplitz operator and small Hankel operator on harmonic Dirichlet space[J]. Journal of Mathematics，2015，35(4)：917-926.

[8] 胡璋剑，吕小芬.加权 Fock 空间上的 Hankel 算子[J].中国科学：数学，2016，46(2)：141-156.
HU Z J，LÜ X F. Hankel operators on weighted Fock spaces[J].Sci Sin Math，2016，46(2)：141-156.

[9] ZHU K H.Operator theory in function space[M]//PROVIDENCE R I.Mathematical Surveys and Monographs(Vol. 138).New York：American Mathematical Society，2007.

The Compactness of Hankel Operators on Dirichlet Spaces

SUN Zhiling

(College of Mathematics，Inner Mongolia University for the Nationalities，Tongliao Inner Mongolia 028000，China)

Abstract：[**Purposes**]The research of Toeplitz operator and Hankel operator on Hardy，Bergman and Dirichlet space of various domains be an active branch of function space operators theory，and attract the attention of scholars. [**Methods**]According to the relation of Toeplitz on Bergman and Dirichlet space. [**Results**]It is proved that the property of Big Hankel operator and Small Hankel operator are compact，thus the compactness of Little Hankel are obtained. [**Conclusions**]Thus it can be seen that the nature of Dirichlet space operators is closely related to Bergman spaces.

Keywords：Dirichlet space；Hankel operator；compact operator

（责任编辑 黄 颖）