DOI:10.11721/cqnuj20170415

仿射表面积的 Brunn-Minkowski 不等式*

侯林波[1]，杨　林[2]，罗　淼[3]
(1. 黄河科技学院 民族学院，郑州 450063;2. 铜仁职业技术学院本信息工程学院，贵州 铜仁 554300;
3. 贵州师范大学 数学科学学院，贵阳 550001)

摘要:【目的】探索仿射表面积的逆 Brunn-Minkowski 型不等式。【方法】运用分析不等式中的 Beckenbach-Dresher's 不等式与逆 Beckenbach-Dresher's 不等式进行分析。【结果】建立了仿射表面积的逆 Minkowski 型不等式和逆 Brunn-Minkowski 型不等式，拓展了 Brunn-Minkowski 型不等式。【结论】仿射表面积的逆 Brunn-Minkowski 型不等式不仅丰富了仿射表面积的内容，还为研究 L_p 仿射表面积提供了思路。

关键词:仿射表面积;Beckenbach-Dresher's 不等式;Brunn-Minkowski 型不等式
中图分类号:O186.5　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2017)06-0074-04

1 预备知识

欧氏空间中的仿射表面积被称为经典的仿射表面积，Blaschke 于 1923 年首先探究了仿射表面积[1]。随后 Lutwak 将经典的仿射表面积延伸到混合仿射表面积[2]，扩充了经典 Brunn-Minkowski 理论，并得到研究者们的广泛关注。随着凸几何中的经典 Brunn-Minkowski 理论发展到 L_p-Brunn-Minkowski 理论，Lutwak 将混合仿射表面积推广到了 L_p 混合仿射表面积[3]。L_p 混合仿射表面积在 L_p-Brunn-Minkowski 理论中占据重要地位[2-4]。文献[4]深入探讨了仿射表面积与极小几何表面积之间的密切关系，文献[5]研究了仿射表面积与极小几何表面积在 Orilicz 空间中的关系。凸超曲面的仿射表面积是仿射微分几何中重要的研究对象之一，由它衍生出诸多优美的结果，如 Aleksandrov-Fenchel 型不等式、Minkowski 型不等式、Brunn-Minkowski 型不等式等[2-4]。

记 E^n 为 $n(n\geqslant 2)$ 维欧氏空间，若点集 $K\subset E^n$，对任意两点 $x,y\in K$ 都有 $(1-\lambda)x+\lambda y\in K,\lambda\in[0,1]$，则称 K 为凸集。若 K 为 E^n 中的紧致凸集，则称 K 为凸体。本文用 K^n 表示由 E^n 中凸体构成的集合，用 B 表示 E^n 中的单位球，S^{n-1} 表示 E^n 中的单位球面。

设 $K\in K^n$ 的支持函数 $h_K(u):S^{n-1}\rightarrow(0,\infty)$ 为 $h_K(u)=\max\{x\cdot u:x\in K\},u\in S^{n-1}$，其中 $x\cdot u$ 为标准内积。

对于 $K,L\in K^n,x\in E^n$，若存在正数 λ，使得 $K=x+\lambda L$，则称 K 与 L 位似。

设 $K\in K^n$ 及对任意的 $L\in K^n$，若存在函数 $f_K(u)$ 使得混合体积 $V_1(K,L)$ 的积分表达式为 $V_1(K,L)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}f_K(u)h_L(u)\mathrm{d}S(u)$，则称凸体 K 的曲率函数是正值连续函数，即 $f_K(\cdot):S^{n-1}\rightarrow(0,\infty)$。文献[6]证明了凸体的曲率函数是唯一的，同时证明了对具有相同曲率函数的凸体在仅相差一平移变换的情况下也是唯一的，即:若 $K,L\in K^n$ 满足 $f_K(u)=f_L(u)$，则 $K=x+L$。把 K^n 中所有边界具有正值连续曲率函数的凸体记为 F^n。

若 $K\in F^n$，则有:

$$\int_{S^{n-1}}uf_K(u)\mathrm{d}S(u)=0。\tag{1}$$

* **收稿日期**:2016-06-07　**修回日期**:2017-06-29　**网络出版时间**:2017-05-16 11:27
资助项目:贵州省科学技术基金项目(No.黔科合 J 字 LKS[2011]16);国家自然科学基金(No.11401486;No.11161007);贵州师范大学 2017 年度博士科研项目
第一作者简介:侯林波，男，讲师，研究方向为积分几何与微分几何，E-mail:18108397371@163.com;**通信作者**:罗淼，副教授，E-mail:luomiao@gznu.edu.cn
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170516.1127.074.html

若函数 $f(u)$ 为正值连续函数且满足(1)式，则存在唯一的凸体 K(在仅相差一平移变换下)使得它的曲率函数为 $f(u)$。记 $K\in F^n$ 的曲率函数 $f_K(u)$ 的最大值与最小值分别为 m_K 与 M_K。

设 $K,L\in F^n$ 且 $\alpha,\beta\in(0,\infty)$，若 $\int_{S^{n-1}} u(\alpha f_K(u)+\beta f_K(u))\mathrm{d}S(u)=0$，则存在唯一的凸体(在仅相差一平移变换下)，记为 $\alpha K\tilde{+}\beta L$，使得

$$f_{\alpha K\tilde{+}\beta L}(u)=\alpha f_K(u)+\beta f_L(u)。\tag{2}$$

由(2)式所确定的加法与数乘，称为 Blaschke 加法与数乘[2]。

若 $K,L\in F^n$，存在 $\alpha\in(0,\infty)$，使得 $f_K(u)=\alpha f_L(u)$ 成立的充要条件为 K 与 L 位似。

若 $K\in F^n$，K 的仿射表面积 $\Omega(K)$ 定义为[2]：

$$\Omega(K)=\int_{S^{n-1}} f_K(u)^{\frac{n}{n+1}}\mathrm{d}S(u)。\tag{3}$$

文献[2]研究了 $K,L\in F^n$ 的 i 阶混合表面积 $\Omega_i(K,L)$，其定义式为：

$$\Omega_i(K,L)=\int_{S^{n-1}} f_K(u)^{\frac{n-i}{n+1}} f_L(u)^{\frac{i}{n+1}}\mathrm{d}S(u),i\in\mathbf{R}。$$

当 $L=B$ 时，$\Omega_i(K,B)=\Omega_i(K)$。

文献[2]给出了如下 Minkowski 型不等式与 Brunn-Minkowski 型不等式。

Minkowski 型不等式：若 $K,L\in F^n$，则：

$$\Omega_i(K,L)\leqslant\Omega(K)^{\frac{n-i}{n}}\Omega(L)^{\frac{i}{n}},0<i<n,\tag{4}$$

当且仅当 K 与 L 位似时等号成立。

Brunn-Minkowski 型不等式：若 $K,L\in F^n$，则：

$$\Omega_i(K\tilde{+}L)^{\frac{n+1}{n-i}}\leqslant\Omega_i(K)^{\frac{n+1}{n-i}}+\Omega_i(L)^{\frac{n+1}{n-i}},i<-1,\tag{5}$$

当且仅当 K 与 L 位似时等号成立；

当 $i>-1$ 时，不等式(5)反向。特别地，当 $i=0$ 时，不等式(5)变为：

$$\Omega(K\tilde{+}L)^{\frac{n+1}{n}}\leqslant\Omega(K)^{\frac{n+1}{n}}+\Omega(L)^{\frac{n+1}{n}},$$

当且仅当 K 与 L 位似时等号成立。

设 $f(x)$ 为可测集 X 上的正值可测函数，定义 $p(p\neq0)$ 范数 $\|f(x)\|_p=\left(\int_X f(x)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$。

本文主要得到不等式(4)与(5)的反向不等式，即存在 $c_1,c_2\geqslant1$，使得：

$$c_1\Omega_i(K,L)\geqslant\Omega(K)^{\frac{n-i}{n}}\Omega(L)^{\frac{i}{n}},0<i<n,\tag{6}$$

$$c_2\Omega_i(K\tilde{+}L)^{\frac{n+1}{n-i}}\geqslant\Omega_i(K)^{\frac{n+1}{n-i}}+\Omega_i(L)^{\frac{n+1}{n-i}},i<-1。\tag{7}$$

同时还建立了如下不等式：

$$c_3\left(\frac{\Omega_i(K\tilde{+}L)}{\Omega_j(K\tilde{+}L)}\right)^{\frac{n+1}{j-i}}\geqslant\left(\frac{\Omega_i(K)}{\Omega_j(K)}\right)^{\frac{n+1}{j-i}}+\left(\frac{\Omega_i(L)}{\Omega_j(L)}\right)^{\frac{n+1}{j-i}},c_3\geqslant1,i\leqslant-1\leqslant j<n(i\neq j)。\tag{8}$$

2 引理与主要结论

为得到不等式(6)～(8)，需要以下几个重要引理作为工具。

引理 1[7]　(逆 Hölder 不等式)设 $f_i(x)(i=1,2)$ 为可测闭集 X 上满足 $m_i\leqslant f_i(x)\leqslant M_i$ 的正值连续函数，若 $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1,p_1>1$ 且 $f_i(x)^{p_i}$ 可积，记 $C_{(p_1,p_2)}(x,y)=\dfrac{\frac{x}{p_1}+\frac{y}{p_2}}{x^{\frac{1}{p_1}}y^{\frac{1}{p_2}}}$，$X_i=\|f_i(x)\|_{p_i}^{p_i}$，$T_{(p_1,p_2)}(m_1,m_2,M_1,M_2,X_1,X_2)=\max\left\{C_{(p_1,p_2)}\left(\frac{m_1^{p_1}}{X_1},\frac{M_2^{p_2}}{X_2}\right),C_{(p_1,p_2)}\left(\frac{M_1^{p_1}}{X_1},\frac{m_2^{p_2}}{X_2}\right)\right\}$，则：

$$\prod_{1}^{2}\|f_i(x)\|_{p_i}\leqslant T_{(p_1,p_2)}(m_1,m_2,M_1,M_2,X_1,X_2)\left\|\prod_{1}^{2}f_i(x)\right\|_1,\tag{9}$$

若 $p_1<1(p_1\neq 0)$，不等式(9)反向。

运用引理1与(3)式，可以得到关于仿射表面积的逆 Minkowski 型不等式。

定理1　若 $K,L\in F^n$，$0<i<n$，$c_1=T_{\left(\frac{n}{n-i},\frac{n}{i}\right)}\left(m_K^{\frac{n-i}{n+1}},m_L^{\frac{i}{n+1}},M_K^{\frac{n-i}{n+1}},M_L^{\frac{i}{n+1}},\Omega(K),\Omega(L)\right)$，则：

$$c_1\Omega_i(K,L)\geqslant\Omega(K)^{\frac{n-i}{n}}\Omega(L)^{\frac{i}{n}}。\tag{10}$$

证明　运用(3)式与不等式(9)有：

$$\Omega(K)^{\frac{n-i}{n}}\Omega(L)^{\frac{i}{n}}=\left(\int_{S^{n-1}}f_K(u)^{\frac{n}{n+1}}\mathrm{d}S(u)\right)^{\frac{n-i}{n}}\left(\int_{S^{n-1}}f_L(u)^{\frac{n}{n+1}}\mathrm{d}S(u)\right)^{\frac{i}{n}}=\left(\int_{S^{n-1}}f_K(u)^{\frac{n-i}{n+1}\times\frac{n}{n-i}}\mathrm{d}S(u)\right)^{\frac{n-i}{n}}\times$$

$$\left(\int_{S^{n-1}}f_L(u)^{\frac{i}{n+1}\times\frac{n}{i}}\mathrm{d}S(u)\right)^{\frac{i}{n}}\leqslant c_1\int_{S^{n-1}}f_K(u)^{\frac{n-i}{n+1}}f_L(u)^{\frac{i}{n+1}}\mathrm{d}S(u)=c_1\Omega_i(K,L)。$$

证毕

推论1　若 $K,L\in F^n$，c_1 同定理1，当 $i=1$ 时，则 $c_1\Omega_1(K,L)\geqslant\Omega(K)^{\frac{n-1}{n}}\Omega(L)^{\frac{1}{n}}$。

引理2[7]　设 $f_i(x)(i=1,2)$ 为可测闭集 X 上满足 $m_i\leqslant f_i(x)\leqslant M_i$ 的正值连续函数。若 $p>1$，并记 $N_1=\max\{T_{\left(p,\frac{p}{p-1}\right)}(m_1,m_3^{p-1},M_1,M_3^{p-1},X_1,X_3),T_{\left(p,\frac{p}{p-1}\right)}(m_2,m_3^{p-1},M_2,M_3^{p-1},X_2,X_3)\}$，$m_3=\min\sum_{i=1}^{2}f_i(x)$，$M_3=\max\sum_{i=1}^{2}f_i(x)$，$X_3=\left\|\sum_{i=1}^{2}f_i(x)\right\|_{p-1}^{p-1}$，则：

$$N_1\left\|\sum_{i=1}^{2}f_i(x)\right\|_p\geqslant\sum_{i=1}^{2}\|f_i(x)\|_p,\tag{11}$$

且当 $p<1(p\neq 0)$ 时，不等式(11)反向。

运用引理2，可以得到关于仿射表面积的逆 Brunn-Minkowski 型不等式。

定理2　若 $K,L\in F^n$，$i<-1$，N_1 同引理2，则

$$N_1\Omega_i(K\tilde{+}L)^{\frac{n+1}{n-i}}\geqslant\Omega_i(K)^{\frac{n+1}{n-i}}+\Omega_i(L)^{\frac{n+1}{n-i}},\tag{12}$$

当 $i>-1$ 时，不等式(12)反向。

推论2　若 $K,L\in F^n$，N_1 同上，当 $i=0$ 时，则 $N_1\Omega(K\tilde{+}L)^{\frac{n+1}{n}}\leqslant\Omega(K)^{\frac{n+1}{n}}+\Omega(L)^{\frac{n+1}{n}}$。

引理3[8]　(Beckenbach-Dresher's 不等式)设 $f_i(x)(i=1,2)$ 为 $[a,b]$ 上的正值连续函数。若 $0\leqslant\beta\leqslant 1\leqslant\alpha(\beta\neq\alpha)$，则 $\left(\dfrac{\int_{[a,b]}[f_1(x)+f_2(x)]^\alpha\mathrm{d}x}{\int_{[a,b]}[f_1(x)+f_2(x)]^\beta\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}\leqslant\left(\dfrac{\int_{[a,b]}f_1(x)^\alpha\mathrm{d}x}{\int_{[a,b]}f_1(x)^\beta\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}+\left(\dfrac{\int_{[a,b]}f_2(x)^\alpha\mathrm{d}x}{\int_{[a,b]}f_2(x)^\beta\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$。

引理4[9]　(逆 Beckenbach-Dresher's 不等式)设 $f_i(x)(i=1,2)$ 为可测闭集 X 上满足 $m_i\leqslant f_i(x)\leqslant M_i$ 的正值连续函数，$\mu(X)$ 为 X 的勒贝格测度，若 $0\leqslant\beta\leqslant 1\leqslant\alpha(\beta\neq\alpha)$ 且 $f_i(x)^\alpha$，$f_i(x)^\beta$ 都可积，N_1 同上，并记 $N_2=T_{\left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta},\frac{\alpha}{\beta}\right)}\left(sT^{\frac{-\beta}{\alpha}},\left(\frac{st}{S}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}},St^{\frac{-\beta}{\alpha}},\left(\frac{ST}{s}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}},1,1\right)$，$s=\mu(X)^{\frac{1}{\alpha}}a$，$t=\mu(X)^{\frac{1}{\beta}}a$，$S=\mu(X)^{\frac{1}{\alpha}}A$，$T=\mu(X)^{\frac{1}{\beta}}A$，$a=\min\{m_1,m_2\}$，$A=\max\{M_1,M_2\}$，则：

$$(N_1N_2)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}\left(\frac{\int_{[a,b]}[f_1(x)+f_2(x)]^\alpha\mathrm{d}x}{\int_{[a,b]}[f_1(x)+f_2(x)]^\beta\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}\geqslant\left(\frac{\int_{[a,b]}f_1(x)^\alpha\mathrm{d}x}{\int_{[a,b]}f_1(x)^\beta\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}+\left(\frac{\int_{[a,b]}f_2(x)^\alpha\mathrm{d}x}{\int_{[a,b]}f_2(x)^\beta\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}。$$

由引理4，可以得到关于仿射表面积的逆 Beckenbach-Dresher's 型不等式：

定理4　若 $K,L\in F^n$ 且 i,j 满足 $i\leqslant -1\leqslant j<n(i\neq j)$，$c_3=(N_1N_2)^{\frac{n+1}{j-i}}$，$N_1$，$N_2$ 同引理4，则：

$$c_3\left(\frac{\Omega_i(K\tilde{+}L)}{\Omega_j(K\tilde{+}L)}\right)^{\frac{n+1}{j-i}}\geqslant\left(\frac{\Omega_i(K)}{\Omega_j(K)}\right)^{\frac{n+1}{j-i}}+\left(\frac{\Omega_i(L)}{\Omega_j(L)}\right)^{\frac{n+1}{j-i}}。$$

参考文献：

[1] BLASCHKE W.Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Affine Differentialgeometrie[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1923.

[2] LUTWAK E.Mixed affine surface area[J].J Math Anal Appl,1999,231:568-587.

[3] LUTWAK E.The Brunn-Minkowski-Firey theory II:affine and geominimal surface areas[J].Adv in Math,1996,118:244-296.

[4] PETTY C.Geominimal surface area[J].Geom Dedicate,1974,3:77-97.

[5] 朱保成.极小几何表面积与对偶 Orlicz-Brunn-Minkowski 理论[D].重庆:西南大学,2014.
ZHU B C.Geominimal surface area and dualOrlicz-Brunn-Minkowski theory[D].Chongqing: Southwest University, 2014.

[6] BONNESEN T,FENCHEL W.Theorie der konvexen Korper[M].Berlin:Springer-Verlag,1934.

[7] 杨林,罗淼,侯林波.逆的对偶 Brunn-Minkowski 不等式[J].西南大学学报(自然科学版),2016,38(4):85-89.
YANG L,LUO M,HOU L B.Reverse dual Brunn-Minkowski inequality[J].Journal of Southwest University(Natural Science Edition),2016,38(4):85-89.

[8] Beckenbach E F,Bellman R.Inequalities[M].Berlin:Springer,1961.

[9] 杨林.几类 Brunn-Minkowski 不等式[D].重庆:西南大学,2016.
YANG L. Some class of Brunn-Minkowski inequalities[D].Chongqing:Southwest University,2016.

Brunn-Minkowski Style Inequality on Affine Surface Areas

HOU Linbo[1], YANG Lin[2], LUO Miao[3]

(1. School of Nationalities, Huanghe Science and Technology College, Zhengzhou 450063;
2. Institute of Information Technology, Tongren Polytechnic College, Tongren Guizhou, 554300;
3. School of Mathematics Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China)

Abstract: [**Purposes**]In order to get the reverse Brunn-Minkowski style inequality of the affine surface area.[**Methods**]By applying Beckenbach-Dresher's inequality and reverse Beckenbach-Dresher's inequality of analytic inequalities.[**Findings**]Set up the reverse Minkowski style inequality and reverse Brunn-Minkowski style inequality and the Brunn-Minkowski style inequality.[**Conclusions**] The reverse Brunn-Minkowski style inequality is not only enriched the content of the affine surface area, but also provides ideas for the study of L_p affine surface area.

Keywords: affine surface area; Beckenbach-Dresher's inequality; Brunn-Minkowski style inequality

(责任编辑　许　甲)