有限长直线电荷等电势线和电力线的求解与描绘*

卢林芳，胡先权，周　林，廖海峰
(重庆师范大学 物理学与信息技术学院，重庆 400047)

摘　要：采用积分换元法与计算技术工具软件 Mathematica 5.0 相结合,利用电力线与等势线正交的性质对有限长直线电荷周围空间的电势函数及电力线函数进行了统一描述,严格地求出了电势函数和电力线函数,作出了相应的相互正交的等势线簇图形和电力线簇图形,并且进行了必要的讨论。

关键词：泊松方程；精确解；等势线簇图形；电力线簇图形
中图分类号：O441.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2008)03-0066-04

某些三维静电场可以简化为二维平面场边值问题[1-6]，对于细长的条形带电体,只要宽度远小于长度,条形带电体中部周围的三维静电场可以看作二维平面场。这样,电势满足的三维拉普拉斯方程就简化为二维拉普拉斯方程,细长的条形带电体中部周围的三维静电场也就可以简化为有限长直线电荷的二维平面场。鉴于现有的电磁学教材和参考资料很少有人对有限长直线电荷的等电势线和电力线的求解与描绘进行研究与讨论,本文作了这方面的工作。由于在实际生活、生产中接触到的带电导体不可能是无限长的,只要带电导体的长度远大于其宽度,就可以将其简化为有限长的线电荷模型进行研究。采用积分换元法首先求解二维平面场空间的电势分布所满足的泊松方程,然后利用电力线与等势线正交的性质,以及隐函数作图法与计算技术工具软件 Mathematica 5.0 相结合,对有限长直线电荷周围空间的电势函数及电力线函数进行统一描述,严格地求出电势函数和电力线函数,作出相应的相互正交等势线簇图形和电力线簇图形,进行了必要的讨论。

1 有限长直线电荷电势函数的求解

设有一宽度为 $2l$ 的无限长面电荷,坐标 z 轴垂直于 $2l$,并且位于带电平面上,坐标原点在 $2l$ 的中点,则空间电势的分布与 z 坐标无关。上述三维静电场问题可简化为二维平面场问题,xoy 平面坐标系如图 1 所示,其中坐标 x 轴与 $2l$ 线段重合。xoy 平面上的电势满足如下泊松方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-\frac{\lambda}{\varepsilon_0}\delta(y) \tag{1}$$

其中 λ 为线电荷 $2l$ 的电荷密度。

除了线电荷 $2l$ 外的空间,电势分布具有有限性,选择无限远点为电势零点,这样,电势分布具有唯一性；又由于库仑静电势满足泊松方程[7] 和遵循叠加原理,因此可以采用微元分析和定积分求解(1)式。

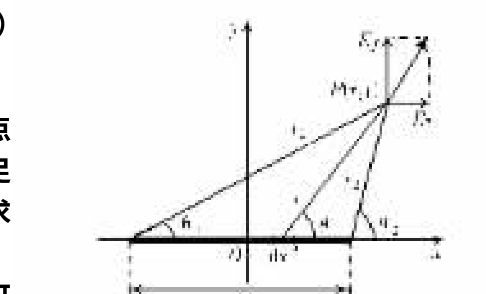

图 1　细长的条形带电面可简化为平面场

在 $2l$ 上任取一微元 dx',则 dx' 在周围空间所激发的电势 du 可看作由点电荷在周围空间所激发的电势。

$$du=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx'}{\sqrt{y^2+(x-x')^2}} \tag{2}$$

* 收稿日期：2007-12-11　　修回日期：2008-01-18
资助项目：重庆市教委基础理论研究基金(No. KJ060812)
作者简介：卢林芳(1984-),女,硕士研究生,研究方向为电磁场理论学习与研究。通讯作者：胡先权,Email：huxquan2003@yahoo.com.cn

采用积分换元法对(2)式进行积分

$$u=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l}\frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{y^2+(x-x')^2}}=\frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l}\frac{\mathrm{d}(x-x')}{\sqrt{y^2+(x-x')^2}} \tag{3}$$

先考虑场点 $P(x,y)$ 位于第一象限,并且设 $x-x'=y\tan\beta$,显然 β,θ 互为余角。$\mathrm{d}x'=y\sec^2\beta\mathrm{d}\beta$,代入(3)式得

$$u=\frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sec\beta\mathrm{d}\beta=\frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}\bigg|_{\beta_1}^{\beta_2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sec\beta_1+\tan\beta_1}{\sec\beta_2+\tan\beta_2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\cot\theta_1+\csc\theta_1}{\cot\theta_2+\csc\theta_2} \tag{4}$$

为了便于隐函数作图,将(4)式中的 $\cot\theta$,$\csc\theta$ 用直角坐标表出,得

$$u=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\frac{x+l}{y}+\frac{r_1}{y}}{\frac{x-l}{y}+\frac{r_2}{y}}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{x+l+\sqrt{(x+l)^2+y^2}}{x-l+\sqrt{(x-l)^2+y^2}} \tag{5}$$

电势分布函数(5)式可用多种求解方法得出,上述积分换元法是其中的一种。考虑到左半平面和右半平面电势分布的对称性,上半平面和下半平面电势分布的对称性,(5)式不仅适用于第一象限,同样适用于其它象限。

2 电力线函数的求解

对于互相正交的两曲线簇 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 而言,它们在相交点的切线向量必定互相垂直。对曲线簇 $u(x,y)$,曲线上各点的切线方程为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y}=\tan\alpha$,其中 $\tan\alpha$ 为切线的斜率。曲线簇 $v(x,y)$,由于与曲线簇 $u(x,y)$ 正交,因而曲线上过相应点的切线方程为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial y}=-\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{\partial u/\partial y}{\partial u/\partial x}$。对电势分布函数 $u(x,y)$,其负梯度为电场强度 $\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}u=-\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y=E_x\boldsymbol{e}_x+E_y\boldsymbol{e}_y$,因而可通过求出电场强度的分量 E_x,E_y,进而求电力线满足的微分方程的解而获得电力线函数。

$$E_x=-\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-l)^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+l)^2+y^2}}\right]=$$
$$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{(x+l)^2+y^2}-\sqrt{(x-l)^2+y^2}}{\sqrt{(x-l)^2+y^2}\sqrt{(x+l)^2+y^2}}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r_1r_2}(r_1-r_2) \tag{6}$$

$$E_y=-\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial y}\left[\ln\left(x+l+\sqrt{(x+l)^2+y^2}\right)-\ln\left(x-l+\sqrt{(x-l)^2+y^2}\right)\right]-$$
$$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{y}{\left(x+l+\sqrt{(x+l)^2+y^2}\right)\sqrt{(x+l)^2+y^2}}-\frac{y}{\left(x-l+\sqrt{(x-l)^2+y^2}\right)\sqrt{(x-l)^2+y^2}}\right]=$$
$$\frac{\lambda y}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(x-l)\sqrt{(x-l)^2+y^2}+(x-l)^2+y^2}-\frac{1}{(x+l)\sqrt{(x+l)^2+y^2}+(x+l)^2+y^2}\right]=$$
$$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\left[\frac{1}{\frac{(x-l)r_2}{y^2}+\frac{r_2^2}{y^2}}-\frac{1}{\frac{(x+l)r_1}{y^2}+\frac{r_1^2}{y^2}}\right]=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\left[\frac{1}{\cot\theta_2\csc\theta_2+\csc^2\theta_2}-\frac{1}{\cot\theta_1\csc\theta_1+\csc^2\theta_1}\right]=$$
$$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\left[\sin^2\frac{\theta_2}{2}-\sin^2\frac{\theta_1}{2}\right]=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}[\cos\theta_1-\cos\theta_2]=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\left[\frac{x+l}{r_1}-\frac{x-l}{r_2}\right] \tag{7}$$

由(6)、(7)式可得电力线满足的微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{Ey}{Ex}=\frac{r_2(x+l)-r_1(x-l)}{y(r_1-r_2)}$,即 $y(r_1-r_2)\mathrm{d}y=r_2(x+l)\mathrm{d}x-r_1(x-l)\mathrm{d}x$,也即 $r_2[(x+l)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y]=r_1[(x-l)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y]$,进而有 $\frac{\mathrm{d}r_2^2}{r^2}=\frac{\mathrm{d}r_1^2}{r_1}$,积分上式可得 $\sqrt{(x+l)^2+y^2}-\sqrt{y^2+(x-l)^2}=C$,其中 C 为积分常数,于是求得与(5)式电势函数 $u(x,y)$ 相对应的电力线函数 $v(x,y)=$

$\sqrt{(x+l)^2+y^2}-\sqrt{y^2+(x-l)^2}$。

3 电力线和等势线图形的描绘与讨论

令(5)式中

$$u(x,y)=C \tag{8}$$

(8)式即为所求的等势线簇函数,C取不同的值对应不同的等势线。由于(5)中的λ,ε_0,l均为固定值,等势线簇函数可等价表示为

$$\frac{x+l+\sqrt{(x+l)^2+y^2}}{x-l+\sqrt{(x-l)^2+y^2}}=C_1 \tag{9}$$

在(8)式中令$v(x,y)=C_2$(常数),可得

$$\sqrt{(x+l)^2+y^2}-\sqrt{y^2+(x-l)^2}=C_2 \tag{10}$$

(10)式即为所求的电力线簇函数。

由于(8)、(10)式均为二元变量(x,y)所满足的隐函数方程,本文采用 Mathematica 5.0 绘图函数库[8]中的 ImplicitPlot 命令直接就可绘制出相应的二维隐函数图形[9],得到的电力线簇和等势线簇图形如图 2 所示。实线代表电力线,虚线代表等势线。

1)在图形绘制中,取$l=1$,令等势线常数C_1取 10 个不同的值,在图 2 中绘制出了 10 条等势线曲线;令电力线常数C_2取 10 个不同的值,在图 2 中绘制出了 10 条电力线曲线。

2)从图 2 中可以看出等势线簇和电力线簇左半平面和右半平面是对称分布的,上半平面和下半平面也是对称分布的,说明求得的电势分布具有左右对称性和上下对称性,这和实际电场分布的对称性相一致。

3)图 2 中的等势线簇为椭圆曲线簇而非圆曲线簇。兹以具体的一条等势线加以说明。

令(9)式中的$l=1$,$C_1=2$,有$\frac{x+1+\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{x-1+\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=2$,化简上式,可得$9y^4-72y^2+8x^2y^2=0$,即有

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2}=1 \tag{11}$$

(11)式说明等势线簇是以坐标原点为几何图形中心的正椭圆曲线簇。

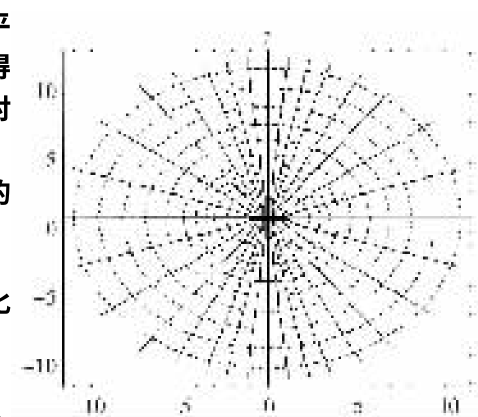

图 2　相互正交的等势线簇与电力线簇

4)关于线电荷长度l变化对电场分布影响的讨论。

采用蒙特卡洛法可分析计算出等势线函数随l的变化趋势。表 1 中列出了通过xoy平面中的点($x=3.0$,$y=0.0$)的椭圆等势线随l的变化情况。

表 1　通过点($x=3.0$,$y=0.0$)的椭圆等势线随l的变化情况

l	u	椭圆方程	a	b	ε
0.5	1.4	$x^2/3^2+y^2/2.985^2=1$	3.000	2.958	0.167
1.0	2.0	$x^2/3^2+y^2/2.985^2=1$	3.000	2.958	0.333
1.5	5.0	$x^2/3^2+y^2/2.236^2=1$	3.000	2.236	0.667

从表 1、图 2 及(9)式可以看出,随着l的减小,椭圆等势线偏心率ε愈来愈小;相反,随着l的增大,椭圆等势线偏心率ε愈来愈大。当$l\to 0$,$\varepsilon\to 0$,等势线将变成圆周闭曲线,与点电荷的等势线相一致,这时有限长直线电荷的电场将退化为点电荷的电场;当$l\to\infty$,其等势线将变成平行x轴的直线,与无限长直线电荷的等势线相一致,反过来说明有限长直线电荷的电势是介于点电荷的圆周闭曲线与无限长直线电荷的直线二者之间的椭圆曲线。

5）如果从可视性的三维空间角度研究有限长直线电荷的电场，则其电势分布具有轴对称性，正椭圆曲线簇变为旋转椭球曲面簇，其隐函数方程为$\frac{x+l+\sqrt{(x+l)^2+y^2+z^2}}{x-l+\sqrt{(x-l)^2+y^2+z^2}}=C_3$，由（8）式得到的电力线簇，围绕 x 轴旋转不同的角度，可得到与三维空间旋转椭球曲面簇正交的电力线簇。

参考文献：

[1] 赵凯华. 电磁学[M]. 北京：高等教育出版社，1999. 65-67.

[2] 胡先权，胡文江，马勇. 偏心圆柱面与分离圆柱面带电导体等势面的统一描述[J]. 大学物理，2004，23（8）：20-23.

[3] 胡先权，胡文江，邓树申. 偏心圆柱面静电场的求解[J]. 重庆师范学院学报，1999，16（3）：5-10.

[4] 张志国. 二平行载流圆柱上的电荷分布[J]. 大学物理，1994，13（9）：5-9.

[5] 李旭，胡先权，胡文江. 电介质椭球内极化场强方向的研究[J]. 大学物理，2004，23（10）：28-31.

[6] 胡先权，蒋明宇. 直线电荷与带电导体圆柱电场和电力线簇研究[J]. 重庆师范大学学报（自然科学版），2005，22（2）：44-46.

[7] J. D. 杰克逊. 经典电动力学[M]. 朱培豫译. 北京：人民教育出版社，1984. 42-43.

[8] BLEANEY B I，BLEANEY B. Electricity and Magnetism[M]. 3rd ed. Great Britain：Oxford University Press，1975. 49-55.

[9] 洪维恩. 数学运算大师-Mathematica 5[M]. 魏宝琛改编. 北京：人民邮电出版社，2002. 229-249.

Solution and Representation of the Equipotential Lines and Power Lines in the System of an Finite Line Charge

LU Lin-fang, *HU Xian- quan*, *ZHOU Lin*, *LIAO Hai-feng*

(College of Physics and Information Technical, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: The uniform representation of the potential function and power line function in the system of an finite line charge is obtained. In real life and production, mankind physically comes in contact with electric conductor is impossibly infinite long. Being limited long, as long as the length of electric conductor to be far larger than its width, it can be simplified in limited length of the line electric charge model being carried on a research. As a result, the textual research has important theories meaning and physically applies value. There is a few teaching materials and reference materials in study of the equipotential lines and power lines in the system of an finite line charge. According to the characteristics that the equipotential line and the power line are orthogonal each other. By means of combination of integral-transform method and software package facility of Mathematica 5.0, we have obtained the exact solution of electrical potential functions and power line functions in the system of an finite line charge and plotted the relative equipotential line maps and power line maps. Meanwhile, we have made the necessary discussions.

Key words: the equation of poisson; exact solution; equipotential line maps; power line maps

（责任编辑 欧红叶）