DOI:10.11721/cqnuj20180109

一类 $2n$ 阶边值问题正解的存在性*

程 伟，徐家发
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】通过对一类 2n 阶边值问题的讨论,获得此类问题的正解的存在唯一性,并构建正解的迭代序列。【方法】对该边值问题运用不动点方法进行研究。【结果】将该问题转化为等价的积分方程,借助完备空间中的基本列必收敛的事实,在非线性项满足利普希茨条件下获得本文的主要结论。【结论】所得结论推广和完善了已有的一些结果。

关键词:边值问题;不动点;正解;迭代

中图分类号:O175.15 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2018)01-0066-04

1 基础知识

本文借助非线性泛函分析中的不动点方法研究以下 $2n$ 阶边值问题正解的存在性,并给出正解的迭代序列:

$$\begin{cases}(-1)^n u^{(2n)}=f(t,u,-u'',\cdots,(-1)^{n-1}u^{(2n-2)}),\\ \alpha_0 u^{(2i)}(0)-\beta_0 u^{(2i+1)}(0)=0, i=0,1,\cdots,n-1,\\ \alpha_1 u^{(2i)}(1)+\beta_1 u^{(2i+1)}=0, i=0,1,\cdots,n-1。\end{cases} \tag{1}$$

其中 $n\geqslant 2$ 是一给定的正整数,$f\in C([0,1]\times\mathbf{R}_+^n,\mathbf{R}_+)(\mathbf{R}_+=[0,+\infty))$,$\alpha_i,\beta_i\in\mathbf{R}_+$,且 $\alpha_0\alpha_1+\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0>0, i=0,1$。

当非线性项 f 依赖于各偶数阶导数时,诸多学者[1-5]运用不动点方法研究了如下 Lidstone 边值问题解的存在性:

$$\begin{cases}(-1)^n u^{(2n)}=f(t,u,-u'',\cdots,(-1)^{n-1}u^{(2n-2)}),\\ u^{(2i)}(0)=u^{(2i)}(1)=0, i=0,1,\cdots,n-1。\end{cases} \tag{2}$$

问题(1)显然是问题(2)的推广形式,文献[6]运用锥上的不动点定理,在相关算子的第一特征值条件下获得问题(1)正解的存在性和唯一性。文献[7]运用锥上的不动点指数理论,结合凹凸函数刻画方程间的耦合行为,获得问题(1)方程组正解的存在性。文献[8]运用 μ_0 正算子不动点定理获得如下分数阶积分边值问题正解的存在唯一性:

$$\begin{cases}D_{0+}^{p}x(t)+p(t)f(t,x(t))+q(t)=0, t\in(0,1),\\ x(0)=x'(0)=0, x(1)=\int_0^1 l(s)x(s)\mathrm{d}s。\end{cases}$$

其中 $D_{0+}^{p}x(t)$是 x 的 Riemann-Liouville 的分数阶导数。

受上述文献的启发,本文在 Lipschitz 条件下,运用完备空间 Cauchy 列的性质获得问题(1)正解的存在唯一性。

令 $E=C[0,1]$,$\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$,$P=\{u\in E: u(t)\geqslant 0,\forall t\in[0,1]\}$,则$(E,\|\cdot\|)$是一实 Banach 空间,$P$ 是其上的锥。

* **收稿日期**:2017-02-20 **修回日期**:2017-11-29 **网络出版时间**:2018-01-18 15:21
资助项目:重庆师范大学科研基金(No.15XLBO11;No.16XYY24)
第一作者简介:程伟,男,讲师,研究方向为拓扑动力系统及微分方程,E-mail:20130208@cqnu.edu.cn;**通信作者**:徐家发,副教授,E-mail:xujiafa292@sina.com
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180118.1521.018.html

引理 1[6]　令 $\rho=\alpha_0\beta_0+\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0$，则对任意的 $g\in E$，边值问题 $\begin{cases}-u''=g(t)\\ \alpha_0u(0)-\beta_0u'(0)=0\\ \alpha_1u(1)+\beta_1u'(1)=0\end{cases}$ 等价于积分方程 $u(t)=\int_0^1k_1(t,s)g(s)\mathrm{d}s$，其中 $k_1(t,s)=\dfrac{1}{\rho}\begin{cases}(\beta_0+\alpha_0t)(\alpha_1+\beta_1-\alpha_1s),0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1\\ (\beta_0+\alpha_0s)(\alpha_1+\beta_1-\alpha_1t),0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$。

令 $k_i(t,s)=\int_0^1k_1(t,\gamma)k_{i-1}(\gamma,s)\mathrm{d}\gamma,i=2,3,\cdots$，取 $v(t)=(-1)^{n-1}u^{(2n-2)}(t)$，则可知问题(1)等价于以下积分方程：

$$v(t)=\int_0^1k_1(t,s)f\left(s,\int_0^1k_{n-1}(s,\gamma)v(\gamma)\mathrm{d}\gamma,\cdots,\int_0^1k_1(s,\gamma)v(\gamma)\mathrm{d}\gamma,v(s)\right)\mathrm{d}s。\tag{3}$$

根据计算可知，若 $\mu\in C^{2n}[0,1]\cap p$ 是问题(1)的正解等价于 $v=(-1)^{n-1}u^{(2n-2)}$ 是问题(3)的正解。由此定义算子 $A:P\to P$ 如下：

$$(Av)(t)=\int_0^1k_1(t,s)f\left(s,\int_0^1k_{n-1}(s,\gamma)v(\gamma)\mathrm{d}\gamma,\cdots,\int_0^1k_1(s,\gamma)v(\gamma)\mathrm{d}\gamma,v(s)\right)\mathrm{d}s。$$

从而问题(1)正解的存在性等价于算子 A 正不动点的存在性。根据 f 和 $k_i(t,s)(i=1,2,3,\cdots,n-1)$ 的连续性可知 A 是定义在 P 上的全连续算子。

引理 2　令 $k=\int_0^1k_1(\gamma,\gamma)\mathrm{d}\gamma$，则 $k_i(t,s)\leqslant k^{i-1}k_1(s,s),\forall t,s\in[0,1],i=1,2,\cdots,n$。

证明　运用数学归纳法证明。根据一次函数的性质和 $k_1(t,s)$ 的定义，显然有 $k_1(t,s)\leqslant k_1(s,s),t,s\in[0,1]$。假设 $k_i(t,s)\leqslant k^{i-1}k_1(s,s),\forall t,s\in[0,1],i\in\mathbf{N}$，下证 $k_{i+1}(t,s)\leqslant k^ik_1(s,s),\forall t,s\in[0,1]$。事实上，由假设条件和 $k_i(t,s)$ 的定义知，

$$k_{i+1}(t,s)=\int_0^1k_1(t,\gamma)k_i(\gamma,s)\mathrm{d}\gamma\leqslant\int_0^1k_1(\gamma,\gamma)k^{i-1}k_1(s,s)\mathrm{d}\gamma=k^ik_1(s,s)。$$

证毕

由引理 2，得不等式 $\int_0^1k_i(t,s)k_1(t,t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1k^{i-1}k_1(s,s)k_1(t,t)\mathrm{d}t=k^ik_1(s,s),\forall t,s\in[0,1],i=1,2,\cdots,n$。

2 主要结论

以下是本文的主要结论。

定理 1　若以下条件成立：

H1) 存在 $\mu\in(0,1)$ 使得对任意 $t\in[0,1],x_i,y_i\in\mathbf{R}_+(i=0,1,\cdots,n-1)$，有：

$$|f(t,x_{n-1},x_{n-2},\cdots,x_0)-f(t,y_{n-1},y_{n-2},\cdots,y_0)|\leqslant\mu\lambda\sum_{i=0}^{n-1}|x_i-y_i|,$$

其中 $\lambda=\min\{1,k^{-1}\}\dfrac{1-k}{1-k^n}$。

H2) $f(t,\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n})\neq 0,\forall t\in[0,1]$。则问题(1)存在唯一的正解 u^*，并存在 $v^*=(-1)^{n-1}(u^*)^{(2n-2)}$，且对任意给定的不恒等于 0 的初值 $v_0\in E$，迭代序列 $v_{m+1}=Av_m,\forall m\in\mathbf{N}$ 收敛到 v^*。

证明　对任意给定的不恒等于 0 的初值 $v_0\in E$，令 $v_{m+1}=Av_m,\forall m\in\mathbf{N}$。根据 A 的全连续性，$v_m\in E$，并且对任意的 $m\in\mathbf{N}$，有：

$$\begin{aligned}&|v_{m+1}(t)-v_m(t)|=|(Av_m)(t)-(Av_{m-1})(t)|=\\&\left|\int_0^1k_1(t,s)f\left(s,\int_0^1k_{n-1}(s,\gamma)v_m(\gamma)\mathrm{d}\gamma,\cdots,\int_0^1k_1(s,\gamma)v_m(\gamma)\mathrm{d}\gamma,v_m(s)\right)\mathrm{d}s-\right.\\&\left.\int_0^1k_1(t,s)f\left(s,\int_0^1k_{n-1}(s,\gamma)v_{m-1}(\gamma)\mathrm{d}\gamma,\cdots,\int_0^1k_1(s,\gamma)v_{m-1}(\gamma)\mathrm{d}\gamma,v_{m-1}(s)\right)\mathrm{d}s\right|\leqslant\\&\int_0^1k_1(t,s)\left|f\left(s,\int_0^1k_{n-1}(s,\gamma)v_m(\gamma)\mathrm{d}\gamma,\cdots,\int_0^1k_1(s,\gamma)v_m(\gamma)\mathrm{d}\gamma,v_m(s)\right)-\right.\\&\left.f\left(s,\int_0^1k_{n-1}(s,\gamma)v_{m-1}(\gamma)\mathrm{d}\gamma,\cdots,\int_0^1k_1(s,\gamma)v_{m-1}(\gamma)\mathrm{d}\gamma,v_{m-1}(s)\right)\right|\mathrm{d}s\leqslant\end{aligned}$$

$$\mu\lambda\int_0^1 k_1(s,s)\left(\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^1 k_i(s,\gamma)\,|v_m(\gamma)-v_{m-1}(\gamma)|\,\mathrm{d}\gamma+|v_m(s)-v_{m-1}(s)|\right)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\mu\lambda\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^1 k_1(s,s)\int_0^1 k_i(s,\gamma)\,|v_m(\gamma)-v_{m-1}(\gamma)|\,\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}s+\mu\lambda\int_0^1 k_1(s,s)\,|v_m(s)-v_{m-1}(s)|\,\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\mu\lambda\sum_{i=0}^{n-1}k^i\int_0^1 k_1(t,t)\,|v_m(t)-v_{m-1}(t)|\,\mathrm{d}t=\mu\lambda\,\frac{1-k^n}{1-k}\int_0^1 k_1(t,t)\,|v_m(t)-v_{m-1}(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\mu\int_0^1 k_1(t,t)\,|v_m(t)-v_{m-1}(t)|\,\mathrm{d}t=\mu\int_0^1 k_1(t,t)\,|(Av_{m-1})(t)-(Av_{m-2}(t))|\,\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\mu\int_0^1 k_1(t,t)\int_0^1 k_1(t,s)\left|f\left(s,\int_0^1 k_{n-1}(s,t)v_{m-1})(\gamma)\mathrm{d}\gamma,\cdots,\int_0^1 k_1(s,\gamma)v_{m-1}(\gamma)\mathrm{d}\gamma,v_{m-1}(s)\right)-\right.$$

$$\left.f\left(s,\int_0^1 k_{n-1}(s,\gamma)v_{m-2}(\gamma)\mathrm{d}\gamma,\cdots,\int_0^1 k_1(s,\gamma)v_{m-2}(\gamma)\mathrm{d}\gamma,v_{m-2}(s)\right)\right|\mathrm{d}s\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\mu k\int_0^1 k_1(s,s)\left|f\left(s,\int_0^1 k_{n-1}(s,t)v_{m-1}(\gamma)\mathrm{d}\gamma,\cdots,\int_0^1 k_1(s,\gamma)v_{m-1}(\gamma)\mathrm{d}\gamma,v_{m-1}(s)\right)-\right.$$

$$\left.f\left(s,\int_0^1 k_{n-1}(s,\gamma)v_{m-2}(\gamma)\mathrm{d}\gamma,\cdots,\int_0^1 k_1(s,\gamma)v_{m-2}(\gamma)\mathrm{d}\gamma,v_{m-2}(s)\right)\right|\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\mu k\mu\lambda\,\frac{1-k^n}{1-k}\int_0^1 k_1(t,t)\,|v_{m-1}(t)-v_{m-2}(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\mu^2\int_0^1 k_1(t,t)\,|v_{m-1}(t)-v_{m-2}(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\cdots\leqslant$$

$$\mu^m\int_0^1 k_1(t,t)\,|v_1(t)-v_0(t)|\,\mathrm{d}t。\tag{4}$$

另一方面,在 H1)中令 $y_i=0$,则存在 $d_1>0,d_2>0$ 使得:

$$f(t,x_{n-1},x_{n-2},\cdots,x_0)\leqslant d_1\sum_{i=0}^{n-1}x_i+d_2,\ \forall\, t\in[0,1],x_i\in\mathbf{R}_+。$$

从而有:

$$v_1(t)=(Av_0)(t)=\int_0^1 k_1(t,s)f\left(s,\int_0^1 k_{n-1}(s,\tau)v_0(\tau)\mathrm{d}\tau,\cdots,\int_0^1 k_1(s,\tau)v_0(\tau)\mathrm{d}\tau,v_0(s)\right)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$d_1\int_0^1 k_1(t,s)\left[\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^1 k_i(s,\tau)v_0(\tau)\mathrm{d}\tau+v_0(s)\right]\mathrm{d}s+d_2\int_0^1 k_1(t,s)\mathrm{d}s。$$

将上式带入(4)式得到:

$$\int_0^1 k_1(t,t)\,|\,v_1(t)-v_0(t)\,|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 k_1(t,t)v_1(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 k_1(t,t)v_0(t)\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\int_0^1 k_1(t,t)\left[d_1\int_0^1 k_1(t,s)\left[\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^1 k_i(s,\tau)v_0(\tau)\mathrm{d}\tau+v_0(s)\right]\mathrm{d}s+d_2\int_0^1 k_1(t,s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t+\int_0^1 k_1(t,t)v_0(t)\mathrm{d}t=\gamma_0。$$

结合(4)式容易得到 $|v_{m+1}(t)-v_m(t)|\leqslant\mu^m\gamma_0$。

由此,对任意的 $m\in\mathbf{N}$,对任意给定的 $p\in\mathbf{N}$ 可得:

$$|\,v_{m+p}(t)-v_m(t)\,|=|\,v_{m+p}(t)-v_{m+p-1}(t)+v_{m+p-1}(t)-v_{m+p-2}(t)+\cdots+v_{m+1}(t)-v_m(t)\,|\leqslant$$

$$|\,v_{m+p}(t)-v_{m+p-1}(t)\,|+|\,v_{m+p-1}(t)-v_{m+p-2}(t)\,|+\cdots+|\,v_{m+1}(t)-v_m(t)\,|\leqslant$$

$$(\mu^{m+p-1}+\mu^{m+p-2}+\cdots+\mu^m)\gamma_0\leqslant\mu^m\,\frac{1-\mu^p}{1-\mu}\gamma_0\leqslant\frac{\mu^m}{1-\mu}\gamma_0。$$

令 $m\to\infty$,注意到 $\mu\in(0,1)$,有 $|v_{m+p}(t)-v_m(t)|\to 0$, $\forall\, t\in[0,1]$, $p\in\mathbf{N}$,则 $\{v_m\}$ 是 E 中的 Cauchy 列,从而由 E 的完备性,存在 $v^*\in E$ 使得 $\lim\limits_{m\to\infty}v_m=v^*$。进一步,根据 A 的全连续性,在迭代序列 $v_{m+1}=Av_m$。两边取极限得 $v^*=Av^*$。再根据 H2)知 $v^*(t)\neq 0$, $\forall\, t\in[0,1]$,所以 v^* 是 A 的正不动点,从而问题(1)至少存在一个正解。

下证算子 A 不动点的唯一性。若存在 $x_0,y_0\in E$ 使得 $Ax_0=x_0,Ay_0=y_0$,则对于任意的 $m\in\mathbf{N}$ 有:

$$|\,x_0(t)-y_0(t)\,|=|\,(A^m x_0)(t)-(A^m y_0)(t)\,|=|\,A(A^{m-1}x_0)(t)-A(A^{m-1}y_0)(t)\,|\leqslant$$

$$\mu\int_0^1 k_1(t,t)\,|\,(A^{m-1}x_0)(t)-(A^{m-1}y_0)(t)\,|\,\mathrm{d}t=\mu\int_0^1 k_1(t,t)\,|\,A(A^{m-2}x_0)(t)-A(A^{m-2}y_0)(t)\,|\,\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\mu^2 \int_0^1 k_1(t,t) \mid (A^{m-2}x_0)(t) - (A^{m-2}y_0)(t) \mid \mathrm{d}t \leqslant \cdots \leqslant$$

$$\mu^{m-1} \int_0^1 k_1(t,t) \mid (Ax_0)(t) - (Ay_0)(t) \mid \mathrm{d}t = \mu^{m-1} \int_0^1 k_1(t,t) \mid x_0(t) - y_0(t) \mid \mathrm{d}t,$$

从而$\| x_0 - y_0 \| \leqslant \mu^{m-1} \| x_0 - y_0 \| \int_0^1 k_1(t,t)\mathrm{d}t$。

由于$\mu \in (0,1)$，所以$\mu^{m-1} \to 0 (m \to \infty)$。从而存在$M \in \mathbf{N}$，当$m > M$时，有$\mu^{m-1} \int_0^1 k_1(t,t)\mathrm{d}t < 1$。这表明$x_0(t) = y_0(t)$，$\forall t \in [0,1]$。所以$A$有唯一的不动点，即问题(1)有唯一的正解。　　证毕

参考文献：

[1] AGARWAL R, WONG P. Lidstone polynomials and boundary value problems[J]. Comput Math Appl, 1989, 17: 1397-1421.

[2] BAI Z, GE W. Solutions of 2nth Lidstone boundary value problems and dependence on higher order derivatives[J]. J Math Anal Appl, 2003, 279: 442-450.

[3] DAVIS J, ELOE P, HENDERSON J. Triple positive solutions and dependence on higher order derivatives[J]. J Math Anal Appl, 1999, 237: 710-720.

[4] MA Y. Existence of positive solutions of Lidstone boundary value problems[J]. J Math Aanal Appl, 2006, 314: 97-108.

[5] WANG Y. On 2nth-order Lidstone boundary value problems[J]. J Math Anal Appl, 2005, 312: 383-400.

[6] YANG Z. Existence and uniqueness of positive solutions for a higher order boundary value problem[J]. Comput Math Appl, 2007, 54: 220-228.

[7] XU J, YANG Z. Positive solutions for a system of generalized Lidstone problems[J]. J Appl Math Comput, 2011, 37: 13-35.

[8] QIAO Y, ZHOU Z F. Existence and uniqueness of positive solutions for a fractional differential equation with integral boundary conditions[J]. Advances in Difference Equations 2016(2016): 1-8.

Existence of Positive Solutions for a Class of $2n$-Order Boundary Value Problems

CHENG Wei, XU Jiafa

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**] A $2n$-order differential equation with Sturm-Liouville boundary value problems is considered, and the existence and uniqueness of positive solutions are obtained for this problem. Moreover, the iterative sequence of positive solutions is also given. [**Methods**] The fixed point methods are used to study the boundary value problems. [**Findings**] The problem is transformed into its equivalent integral equation, then use the convergence of Cauchy sequences in complete spaces to obtain our main theorems under the Lipschitz nonlinear term. [**Conclusion**] The results here extend the existing study.

Keywords: boundary value problems; fixed point; positive solution; iteration

(责任编辑　黄　颖)