DOI:10.11721/cqnuj20180111

一类多元 copula 和拟 copula 的构造*

马子淇，白晓东
(大连民族大学 理学院，辽宁 大连 116600)

摘要:【目的】研究了具有共同对角面函数的一类多元 copula 和拟 copula 的构造。【方法】将已有文献中对角面的概念加以推广，然后定义了一种“⨁”运算，基于这种运算建立了构造多元 copula 和拟 copula 的方法。【结果】给出了一类具有共同对角面函数的多元 copula 和拟 copula，以及这些 copula 的性质。【结论】为相关统计建模和金融分析提供了描述某种相依结构的框架。

关键词:copula;拟 copula;Lipschitz 条件;密度函数

中图分类号:O211.9　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2018)01-0077-07

随机变量之间的相依性是概率论与数理统计中研究的最广泛的内容之一，但是传统的相依性指标对相依性的刻画有较大局限性。近些年来利用 copula 刻画随机变量间相依性的理论越来越受到人们的关注。事实上，copula 不但在相依性的研究中扮演着重要角色，而且还可以用来构造多元的分布函数族。如果有一族 copula，那么根据 Sklar 定理[1]，可以构造出任何指定边缘分布的二元或多元联合分布函数，而这些分布函数族在建模与模拟方面是非常有用的。因此在给定条件下构造 copula 族是非常重要的，它揭示了一定条件下的多种相依关系。

目前文献中较为常见的是二元 copula 的构造。Nelsen[1] 系统总结了构造二元 copula 的各种方法，如：借助于 Sklar 定理的反演法、几何构造法、代数构造法等等，然而这些方法很难推广到多元情形。到目前为止，文献中也没有系统、成熟的多元 copula 的构造方法，大部分是特殊情形下的特殊构造。Joe[2-3] 曾利用二元 copula 为边际分布构造三元 copula，或三元以上的 copula，但是利用低维 copula 为边际分布构造高维 copula 的思想却受到相容性问题的限制，而相容性问题到目前为止仍然是没有解决的公开问题，可见多元 copula 的构造是极其困难的。本文主要讨论了具有共同对角面函数的一类多元 copula 和拟 copula 的构造。由于可以利用对角面函数研究尾部相依参数 λ_U 和 λ_L，而尾部相依参数 λ_U 和 λ_L 在金融和风险管理中有重要研究意义[4-12]，因此这样的构造也具有一定的实际意义。为避免复杂的符号处理，仅在 3 维情形下展开论述，但是不难将此方法推广到一般 n 元情形中。下文的 copula 和拟 copula 如无特殊说明，一般指的是三元 copula 和三元拟 copula。

1 定义和推广

n 元 copula 是一个 n 元联合分布函数在 $\boldsymbol{I}^n$ 上的限制，其中它的一元边际分布为 $\boldsymbol{I}$ 上的均匀分布，这里 $\boldsymbol{I}=[0,1]$，$\boldsymbol{I}^n=[0,1]\times[0,1]\times\cdots\times[0,1]$。它的等价定义如下。

定义 1　n 元 copula 是满足如下两个条件的一个 n 元函数 $C:\boldsymbol{I}^n\to\boldsymbol{I}$：

C1) 边界条件：$\forall \boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in\boldsymbol{I}^n$，若 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 至少有一个为 0，则 $C(\boldsymbol{u})=0$；若 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 除了 u_k 外全为 1，则 $C(\boldsymbol{u})=u_k$，$k=1,2,\cdots,n$；

C2) n 增条件：$\forall \boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\boldsymbol{I}^n$，而且 $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$，即 $a_i<b_i$，$i=1,2,\cdots,n$，都有 $V_C([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}])=\sum(-1)^{\kappa(c)}\Delta C(\boldsymbol{c})\geqslant 0$，其中$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$为 n 元闭区$[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$，$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$为该区间的顶点，即 c_k 或者等于 a_k，或者等于 b_k，$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{c})$ 为 c_k 等于 a_k 的个数。

称 $V_C([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}])$为 n 元闭区间$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$的“$C$-体积”。实际上，$V_C([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}])$为一个 n 阶差分，即 $V_C([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}])=$

* **收稿日期**:2016-11-16　　**修回日期**:2017-11-27　　**网络出版时间**:2018-01-18 15:21

资助项目:辽宁省自然科学基金面上项目(No.201602188);国家级大学生创新创业训练计划(No.G201612026032)

第一作者简介:马子淇，男，研究方向为概率论与数理统计，E-mail:hzz_dlnu@163.com;**通信作者**:白晓东，教授，E-mail:baixd518@126.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180118.1521.022.html

$\Delta_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}C(\boldsymbol{t})=\Delta_{a_n}^{b_n}\Delta_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\cdots\Delta_{a_1}^{b_1}C(\boldsymbol{t})$，其中 $\boldsymbol{t}\in\boldsymbol{I}^n$。

拟 copula 是 copula 概念的推广，由 Alsina 等人[8]引入；随后 Genest 等人[13]和 Cuculescu 等人[14]分别给出了二元拟 copula 和 n 元拟 copula 的等价性刻画。事实上，该等价性刻画具体操作起来更方便，因而已经成为拟 copula 的另一种定义方式。

定义 2 n 元拟 copula 是一个 n 元函数 $Q:\boldsymbol{I}^n\to\boldsymbol{I}$，除满足边界条件 C1)外，还满足：

Q1) Q 关于每个变元都不减；

Q2) 1-Lipschitz条件：$\forall \boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n),\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\in\boldsymbol{I}^n$，都有 $|Q(\boldsymbol{u})-Q(\boldsymbol{v})|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|u_i-v_i|$。

每个 copula 都是拟 copula，反之却不成立，即存在非 copula 的拟 copula，将这种拟 copula 称为纯粹拟 copula。

文献[1]和[15]给出了二元 copula(拟 copula)对角面 δ 的概念，并且指出两随机变量尾相依参数 λ_U 和 λ_L 可用对角面 δ 表示，即 $\lambda_U=2-\delta_C'(1^-)$，$\lambda_L=\delta_C'(0^+)$。事实上，在一些情况下 Kendall τ 系数也可用对角面 δ 表示[15]。下面将二元 copula(拟 copula)对角面的概念，推广到三元情形(n 元情形类似)。

定义 3 一个二元函数：$\delta:\boldsymbol{I}^2\to\boldsymbol{I}$，称为对角面函数，如果满足下列条件：

i) $\delta(1,u)=u$，$(u\in\boldsymbol{I})$；

ii) $\delta(u,w)\leqslant\min(u,w)$，$((u,w)\in\boldsymbol{I}^2)$；

iii) $0\leqslant\delta(u',w')-\delta(u,w)\leqslant 2(u'-u)+(w'-w)$，其中 $u'\geqslant u,w'\geqslant w,u,w,u',w'\in\boldsymbol{I}$。

不难看出，如果 $C(u,v,w)$ 是一个 copula(或者拟 copula)，那么 $\delta_C(u,w)=C(u,u,w)$ 就是一个对角面函数。此时，将 $\delta_C(u,w)$ 称 $C(u,u,w)$ 的对角面。相应地，$\delta_C(u,v)=C(u,v,u)$，$\delta_C(v,u)=C(u,v,v)$ 也都是 $C(u,v,w)$ 的对角面。copula $C(u,v,w)$ 的对角面函数 $\delta_C(u,w)$ 有明显的概率含义，例如：如果随机向量(U,V,W)的联合分布函数为一个 copula $C(u,v,w)$，那么 $\delta_C(u,w)$ 就是随机向量$(\max(U,V),W)$的联合分布函数在 $\boldsymbol{I}$ 上的限制。更一般地，如果随机向量(X,Y,Z)的联合分布函数为 $H(x,y,z)$，而且 $F(x),G(y),Z(z)$ 分别是它的一元边际分布，$C(u,v,w)$ 为相应的 copula，那么 $\delta_C(u,w)=P_r(X\leqslant F^{(-1)}(u),Y\leqslant G^{(-1)}(u),W\leqslant Z^{(-1)}(w))$，其中 $F^{(-1)}(u),G^{(-1)}(u),Z^{(-1)}(u)$ 分别为 $F(x),G(y),Z(z)$ 的拟逆[1]。另外，当 $w=1$ 时，$\delta_C(u,1)=C(u,u,1)$ 为 copula(或者拟 copula)$C(u,v,1)$ 的对角面。相应地，$\delta_C(u,1)=C(u,1,u)$ 和 $\delta_C(v,1)=C(1,v,v)$ 也都分别是 copula(或者拟 copula)$C(u,1,w)$ 和 $C(1,v,w)$ 的对角面。因此，对角面函数 $\delta(\cdot,\cdot)$ 可以表示二元向量的尾相依参数 λ_U 和 λ_L，甚至，也可以用来研究多元尾相依参数 λ_U^J 和 λ_L^J[7,10-11]。既然尾相依参数是 copula 对角面的属性，那么根据对角面来构造不同的 copula，就意味着假定随机变量尾相依的特性相同的情况下，构造不同的相依结构。

2 Copula 和拟 copula 的构造

记号说明：$T_R=\{(u,v,w)|u\geqslant v,u,v,w\in\boldsymbol{I}\}$，$T_L=\{(u,v,w)|u\leqslant v,u,v,w\in\boldsymbol{I}\}$，$D=\{(u,v,w)|u=v,u,v,w\in\boldsymbol{I}\}$。显然，$T_R,T_L,D$ 是单位立方体的三部分。如果 $\delta(u,w)$ 为对角面函数，那么具有共同对角面 $\delta(u,w)$ 的 copula(或拟 copula)全体构成的集合记为 $\boldsymbol{C}_\delta$(或 $\boldsymbol{Q}_\delta$)，即

$$\boldsymbol{C}_\delta=\{C(u,v,w)\mid C(u,v,w)\text{ 为一个 copula，且 }\delta(u,w)=C(u,u,w)\},$$

$$\boldsymbol{Q}_\delta=\{C(u,v,w)\mid Q(u,v,w)\text{ 为一个拟 copula，且 }\delta(u,w)=Q(u,u,w)\}。$$

定义 4 设 f_1,f_2 分别是定义于 $\boldsymbol{I}^3$ 上的三元函数，则 f_1 与 f_2 的“$\oplus$”运算定义如下：

$$(f_1\oplus f_2)(u,v,w)=\begin{cases}f_1(u,v,w),\text{当}(u,v,w)\in T_R\text{ 时；}\\ f_2(u,v,w),\text{当}(u,v,w)\in T_L\backslash D\text{ 时。}\end{cases}$$

显然$(f_1\oplus f_2)(u,v,w)$仍然为 $\boldsymbol{I}^3$ 上的函数。

定理 1 设 $\delta(u,w)$ 为一个对角面函数，$Q_1,Q_2\in\boldsymbol{Q}_\delta$，则 $Q_1\oplus Q_2\in\boldsymbol{Q}_\delta$，即：集合 $\boldsymbol{Q}_\delta$ 相对于“$\oplus$”运算具有封闭性。

证明 显然 $Q_1\oplus Q_2$ 满足边界条件 C1)。由于 Q_1,Q_2 关于变元 w 都不减，因此 $Q_1\oplus Q_2$ 关于 w 也不减。下面证明 $Q_1\oplus Q_2$ 关于变元 u,v 都不减，而这只需要证明 $Q_1\oplus Q_2$ 关于 u 不减就可以了(关于变元 v 的情况类似)。设 $u',u,v,w\in\boldsymbol{I}$，而且 $u<u'$，要证明 $Q_1\oplus Q_2(u,v,w)\leqslant Q_1\oplus Q_2(u',v,w)$。如果$(u,v,w)$和$(u',v,w)$

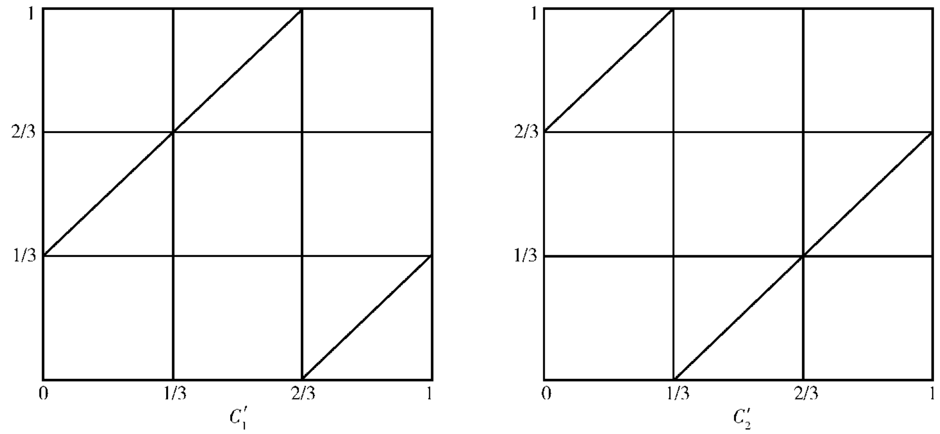

图 1　C_1' 和 C_2' 的概率质量分布

Tab. 1　Probability mass function for C_1' and C_2'

都属于 T_R 或都属于 T_L，那么上面不等式显然成立。如果$(u,v,w)\in T_L$，$(u',v,w)\in T_R$，那么 $Q_1\oplus Q_2(u,v,w)=Q_2(u,v,w)\leqslant Q_2(v,v,w)=\delta(v,w)=Q_1(v,v,w)\leqslant Q_1(u',v,w)=Q_1\oplus Q_2(u',v,w)$，因而函数 $Q_1\oplus Q_2$ 满足条件 Q1)。为了证明 $Q_1\oplus Q_2$ 满足 1-Lipschitz 条件，只需证明 $Q_1\oplus Q_2$ 关于每个变元分别满足 1-Lipschitz 条件就可以了。因为如果 $Q_1\oplus Q_2$ 关于每个变元分别满足 1-Lipschitz 条件，那么，任取(u',v',w')，$(u,v,w)\in \boldsymbol{I}^3$ 就得

$$
\begin{gathered}
| Q_1\oplus Q_2(u',v',w')-Q_1\oplus Q_2(u,v,w)|\leqslant \\
| Q_1\oplus Q_2(u',v',w')-Q_1\oplus Q_2(u,v',w')|+ \\
| Q_1\oplus Q_2(u,v',w')-Q_1\oplus Q_2(u,v,w')|+| Q_1\oplus Q_2(u,v,w')- \\
Q_1\oplus Q_2(u,v,w)|\leqslant| u'-u|+| v'-v|+| w'-w|。
\end{gathered}
$$

$Q_1\oplus Q_2$ 关于变元 w 的 1-Lipschitz 性是显然的。

下面证明 $Q_1\oplus Q_2$ 关于变元 u 的 1-Lipschitz 性(对变元 v 的 1-Lipschitz 性类似证明)。设 $u',u,v,w\in\boldsymbol{I}$，不失一般性，令 $u\leqslant u'$，由于 Q_1，Q_2 满足 1-Lipschitz 条件，所以，只需证明$(u,v,w)\in T_L\backslash D$，$(u',v,w)\in T_R$ 的情形就可以了。此时，

$$
\begin{gathered}
| Q_1\oplus Q_2(u',v,w)-Q_1\oplus Q_2(u,v,w)|=Q_1\oplus Q_2(u',v,w)-Q_1\oplus Q_2(u,v,w)= \\
Q_1(u',v,w)-Q_2(u,v,w)=Q_1(u',v,w)-Q_1(v,v,w)+Q_2(v,v,w)-Q_2(u,v,w)\leqslant \\
u'-v+v-u=u'-u=| u'-u|。
\end{gathered}
$$

证毕

由定理 1 得到，$\boldsymbol{Q}_\delta$ 相对于“$\oplus$”运算封闭，“$\oplus$”满足结合率，而且是幂等的，但不满足交换律。因此($\boldsymbol{Q}_\delta$，“$\oplus$”)为一非交换幂等半群。然而，“$\oplus$”运算关于 $\boldsymbol{C}_\delta$ 并不封闭。

例 1　两 copula 的“$\oplus$”运算结果可以为纯粹拟 copula。

首先按照所谓“Shuffles of M”[1]方法构造两个二元 copula。设 $C_1'(u,v)$和 $C_2'(u,v)$分别是概率质量均匀分布于图 1 所示的两线段上的 copula，则显然它们是两个“Shuffles of M”，而且 $C_2'(u,v)=C_1'(v,u)$，其表达式为：

$$
C_1'(u,v)=\begin{cases} W(u,v)，当(u,v)\in([0,2/3]\times[0,1/3]\times[0,1])\cup([2/3,1]\times[1/3,1]\times[0,1])时； \\ \max(\min(u,v-1/3),\min(u-2/3,v))，当(u,v)\in 其他时；\end{cases}
$$

$$
C_2'(u,v)=\begin{cases} W(u,v)，当(u,v)\in([0,1/3]\times[0,2/3]\times[0,1])\cup([1/3,1]\times[2/3,1]\times[0,1])时； \\ \max(\min(u,v-2/3),\min(u-1/3,v))，当(u,v)\in 其他时。\end{cases}
$$

其中，$W(u,v)=\max(u+v-1,0)$。然后，令 $C_1(u,v,w)=C_1'(u,v)\cdot w$，$C_2(u,v,w)=C_2'(u,v)\cdot w$，则 $C_1(u,v,w)$和 $C_2(u,v,w)$都是三元 copula，而且具有共同的对角面函数 $\delta_{C_1}(u,v)=\delta_{C_2}(u,v)=\max(0,u-1/3,2u-1)\cdot w$，但是 $C_1\oplus C_2$ 却为纯粹拟 copula，因为

$$
(C_1\oplus C_2)(u,v,w)=\begin{cases} W(u,v)\cdot w，当(u,v,w)\in([0,1/3]^2\times[0,1])\cup([{}^{2/3},1]2\times[0,1])时； \\ \max(\min(u,v-2/3),\min(u-2/3,v))\cdot w，当(u,v,w)\in 其他。\end{cases}
$$

从而,$V_{C_1\oplus C_2}([1/3,2/3]^2\times[0,1])=-1/3$。

下面的定理给出了 $\boldsymbol{C}_\delta$ 相对于"$\oplus$"运算封闭的条件。

定理2 设 $\delta(u,v)$ 为一个对角面函数,C_1,C_2 是两个以 $\delta(u,v)$ 为对角面的copula,则 $C_1\oplus C_2$ 是以 $\delta(u,v)$ 为对角面的copula的充分必要条件为:

$$C_1(v,u,w')+C_2(u,v,w')-C_1(v,u,w)-C_2(u,v,w)\leqslant \delta(v,w')+\delta(u,w')-\delta(v,w)-\delta(u,w), \tag{1}$$

其中,(u,v,w),$(u,v,w')\in T_L$,$w'>w$。类似地,$C_1\oplus C_2$ 是以 $\delta(u,v)$ 为对角面的copula的充分必要条件为:

$$C_1(u,v,w')+C_2(v,u,w')-C_1(u,v,w)-C_2(v,u,w)\leqslant \delta(u,w')+\delta(v,w')-\delta(u,w)-\delta(v,w), \tag{2}$$

其中,(u,v,w),$(u,v,w')\in T_R$,$w'>w$。

证明 仅需要考虑 n 增性就可以了。如果闭区间 S 包含于 T_L,或者包含于 T_R,那么根据 $C_1\oplus C_2$ 的定义可知 $V_{C_1\oplus C_2}(S)\geqslant 0$。如果闭区间 S 不包含于 T_L(或者 T_R),那么 S 可以分割为包含于 T_L(或者 T_R)的闭区间,与形如 $[u,v]^2\times[w,w']$ 的闭区间的并,其中 (u,v,w),$(u,v,w')\in T_L$。因此,$C_1\oplus C_2$ 的 n 增性等价于 $V_{C_1\oplus C_2}([u,v]^2\times[w,w'])\geqslant 0$。而

$$V_{C_1\oplus C_2}([u,v]^2\times[w,w'])=\Delta_w^{w'}\Delta_u^v\Delta_u^v((C_1\oplus C_2)(x,y,z))=\delta(v,w')+\delta(u,w')-\delta(v,w)-\delta(u,w)-C_1(v,u,w')-C_2(u,v,w')+C_1(v,u,w)+C_2(u,v,w),$$

于是定理成立,第二部分的证明类似第一部分的证明。 证毕

设 $C(u,v,w)$ 为一个copula,$C^t(u,v,w)=C(v,u,w)$,称 $C(v,u,w)$ 关于 u,v 对称,当且仅当 $C^t(u,v,w)=C(u,v,w)$。观察(1),(2)两式结构,得到如下推论。

推论1 设 $\delta(u,v)$ 是一个对角面函数,C_1,C_2 是两个以 $\delta(u,v)$ 为对角面的copula,而且关于变元 u,v 对称,则 $C_1\oplus C_2$ 和 $C_2\oplus C_1$ 都是copula的充分必要条件为(1)式成立。

例2 设定义于 $\boldsymbol{I}^2$ 上的非负二元函数 g_1,g_2,g_3 均为 g-函数[16],而且

$$C(u,v,w)=\int_0^1 g_1(u,t)\cdot g_2(v,t)\cdot g_3(w,t)\mathrm{d}t,C^t(u,v,w)=\int_0^1 g_1(v,t)\cdot g_2(u,t)\cdot g_3(w,t)\mathrm{d}t。$$

则由文献[16]知,$C(u,v,w)$ 和 $C^t(u,v,w)$ 是具有共同对角面的copula。如果 $w'>w$ 时,有

$$g_1(v,t)\cdot g_2(v,t)+g_1(u,t)\cdot g_2(u,t)-2g_1(v,t)\cdot g_2(u,t)\geqslant 0。$$

成立。那么,根据定理2知 $C\oplus C^t$ 为copula。进一步,如果 $g_1(u,t)\cdot g_2(v,t)=g_1(v,t)\cdot g_2(u,t)$,那么,由推论1知 $C\oplus C^t$ 和 $C^t\oplus C$ 均为copula。

3 $C_1\oplus C_2$ 的绝对连续性

绝对连续copula的构造,在copula的构造中占有重要地位。下面研究 $C_1\oplus C_2$ 的绝对连续性。

引理1 如果 $c(u,v,w)$ 是一个支撑为 $\boldsymbol{I}^3$ 的密度函数,那么,$c(u,v,w)$ 是某一copula的密度函数的充分必要条件为下面三式同时成立:

$$\int_0^1\int_0^1 c(u,v,w)\mathrm{d}w\mathrm{d}v=1,其中\ u\in\boldsymbol{I}, \tag{3}$$

$$\int_0^1\int_0^1 c(u,v,w)\mathrm{d}w\mathrm{d}u=1,其中\ v\in\boldsymbol{I}, \tag{4}$$

$$\int_0^1\int_0^1 c(u,v,w)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=1,其中\ w\in\boldsymbol{I}。 \tag{5}$$

证明 一方面,如果 $c(u,v,w)$ 是某个copula $C(u,v,w)$ 的密度函数,那么:

$$u=C(u,1,1)=\int_0^u\int_0^1\int_0^1 c(t,v,w)\mathrm{d}w\mathrm{d}v\mathrm{d}t, \tag{6}$$

$$v=C(1,v,1)=\int_0^v\int_0^1\int_0^1 c(u,t,w)\mathrm{d}w\mathrm{d}u\mathrm{d}t, \tag{7}$$

$$w=C(1,1,w)=\int_0^w\int_0^1\int_0^1 c(u,v,t)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}t,\tag{8}$$

其中，上面的积分换序问题，可由富比尼定理保证。将(6)，(7)和(8)式的两边分别关于 u,v,w 积分，就分别得到(3)，(4)和(5)式。另一方面，如果 $C(u,v,w)$ 是密度为 $c(u,v,w)$ 的分布函数，那么：

$$C(u,v,w)=\int_0^u\int_0^v\int_0^w c(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x\text{，其中，}(u,v,w)\in \boldsymbol{I}^3\text{。}$$

由(3)，(4)和(5)式，以及富比尼定理得 $C(u,1,1)=u$，$C(1,v,1)=v$，$C(1,1,w)=w$。其中，$(u,v,w)\in\boldsymbol{I}^3$。因此 $C(u,v,w)$ 的边际分布是 $\boldsymbol{I}$ 上的均匀分布。故 $C(u,v,w)$ 为一个 copula。　　证毕

定理 3　如果 $\delta(u,w)$ 是一个对角函数，$C_1(u,v,w)$ 和 $C_2(u,v,w)$ 均为具有共有对角面 $\delta(u,w)$ 的绝对连续 copula，它们的密度函数为 $c_1(u,v,w)$ 和 $c_2(u,v,w)$，而且满足：

$$\int_0^u\int_0^w c_1(u,v,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}v=\int_0^u\int_0^w c_2(u,v,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}v\text{，其中 }u,v,w\in\boldsymbol{I}\text{，}\tag{9}$$

$$\int_0^1\int_0^u c_1(u,v,w)\mathrm{d}v\mathrm{d}u+\int_0^1\int_0^v c_2(u,v,w)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=1\text{，其中 }u,v,w\in\boldsymbol{I}\text{，}\tag{10}$$

那么，$C_1\oplus C_2$ 为绝对连续的 copula，而且密度函数为 $c_1\oplus c_2$。

证明　在(9)式中，令 $w=1$，并且两边关于 u，从 0 到 1 积分得，

$$\int_0^1\int_0^u\int_0^1 c_1(u,v,w)\mathrm{d}w\mathrm{d}v\mathrm{d}u=\int_0^1\int_0^u\int_0^1 c_2(u,v,w)\mathrm{d}w\mathrm{d}v\mathrm{d}u,$$

即 $\iiint_{T_R}c_1(u,v,w)\mathrm{d}V=\iiint_{T_R}c_2(u,v,w)\mathrm{d}V$，从而 $\iiint_{T_L}c_1(u,v,w)\mathrm{d}V=\iiint_{T_L}c_2(u,v,w)\mathrm{d}V$。

于是，$\iiint_{\boldsymbol{I}^3}(c_1\oplus c_2)(u,v,w)\mathrm{d}V=1$。所以 $c_1\oplus c_2$ 为 $\boldsymbol{I}^3$ 上的密度函数。因为 $\delta(u,w)$ 是 $C_1(u,v,w)$ 和 $C_2(u,v,w)$ 共同的对角面，所以对于 $i=1,2$ 成立：

$$\begin{aligned}\delta(u,w)=C_i(u,u,w)=&\int_0^u\int_0^u\int_0^w c_i(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\\ &\int_0^u\int_0^x\int_0^w c_i(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_0^u\int_x^u\int_0^w c_i(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\\ &\int_0^u\int_0^x\int_0^w c_i(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_0^u\int_0^y\int_0^w c_i(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

进而 $\dfrac{\partial\delta(u,w)}{\partial u}=\int_0^u\int_0^w c_i(u,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y+\int_0^u\int_0^w c_i(x,u,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$。

于是得

$$\int_0^u\int_0^w c_1(u,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y+\int_0^u\int_0^w c_1(x,u,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\int_0^u\int_0^w c_2(u,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y+\int_0^u\int_0^w c_2(x,u,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\text{，}\tag{11}$$

将(9)式代入(11)式得，

$$\int_0^u\int_0^w c_1(x,u,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\int_0^u\int_0^w c_2(x,u,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\text{。}\tag{12}$$

应用引理 1 和(12)式，以及 $c_1(u,v,w)$ 为 $C_1(u,v,w)$ 的密度函数，得

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1(c_1\oplus c_2)(u,v,w)\mathrm{d}w\mathrm{d}u=&\int_0^v\int_0^1(c_1\oplus c_2)(u,v,w)\mathrm{d}w\mathrm{d}u+\int_v^1\int_0^1(c_1\oplus c_2)(u,v,w)\mathrm{d}w\mathrm{d}u=\\ &\int_0^v\int_0^1 c_2(u,v,w)\mathrm{d}w\mathrm{d}u+\int_v^1\int_0^1 c_1(u,v,w)\mathrm{d}w\mathrm{d}u=\\ &\int_0^v\int_0^1 c_1(u,v,w)\mathrm{d}w\mathrm{d}u+\int_v^1\int_0^1 c_1(u,v,w)\mathrm{d}w\mathrm{d}u=1\text{，(对任意的 }v\in\boldsymbol{I}\text{)}\end{aligned}\tag{13}$$

同理由(9)式和引理 1 得，对于任意的 $u\in\boldsymbol{I}$ 成立，

$$\int_0^1\int_0^1(c_1\oplus c_2)(u,v,w)\mathrm{d}w\mathrm{d}u=1\text{。}\tag{14}$$

而且由(10)式得，对于任意的 $w\in\boldsymbol{I}$ 成立，

$$\int_0^1\int_0^1 (c_1 \oplus c_2)(u,v,w)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^1\int_0^v (c_1 \oplus c_2)(u,v,w)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \int_0^1\int_v^1 (c_1 \oplus c_2)(u,v,w)\mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$
$$\int_0^1\int_0^v c_2(u,v,w)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \int_0^1\int_0^u c_1(u,v,w)\mathrm{d}v\mathrm{d}u = 1。\tag{15}$$

由(13),(14)和(15)式以及引理1得,$c_1 \oplus c_2$ 是某一 copula 的密度函数。进一步,当$(u,v,w)\in T_R$ 时,由(12)式得

$$\int_0^u\int_0^v\int_0^w (c_1 \oplus c_2)(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^v\int_0^v\int_0^w (c_1 \oplus c_2)(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x +$$
$$\int_v^u\int_0^v\int_0^w (c_1 \oplus c_2)(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^v\int_0^x\int_0^w (c_1 \oplus c_2)(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x +$$
$$\int_0^v\int_x^v\int_0^w (c_1 \oplus c_2)(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_v^u\int_0^v\int_0^w (c_1 \oplus c_2)(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$
$$\int_0^v\int_0^x\int_0^w c_1(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_0^v\int_0^y\int_0^w c_2(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_v^u\int_0^v\int_0^w c_1(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$
$$\int_0^v\int_0^x\int_0^w c_1(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_0^v\int_0^y\int_0^w c_1(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_v^u\int_0^v\int_0^w c_1(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$
$$\int_0^u\int_0^v\int_0^w c_1(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = C_1(u,v,w)。$$

类似地,当$(u,v,w)\in T_L$ 时,由(9)式可以有

$$\int_0^u\int_0^v\int_0^w (c_1 \oplus c_2)(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^u\int_0^v\int_0^w c_2(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = C_2(u,v,w),$$

故 $(C_1 \oplus C_2)(u,v,w) = \int_0^u\int_0^v\int_0^w (c_1 \oplus c_2)(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$。如果$c(u,v,w)$是一个copula$C(u,v,w)$的密度函数,那么$\frac{\partial C}{\partial u}(u,u,w) = \int_0^u\int_0^w c(u,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y$,于是有以下推论。

推论2 将定理3中(9)式替换为

$$\frac{\partial C_1}{\partial u}(u,u,w) = \frac{\partial C_2}{\partial u}(u,u,w), u,v \in \boldsymbol{I},\tag{16}$$

而其他条件不变,则该定理仍然成立。

显然(16)式比(9)式更方便计算。

例3 设 $C_\theta(u,v,w) = \{uv[1-\theta(u-v)^2] + \theta|u-v|(uv - \min(u_2,v_2))\}\cdot w$,其中$(u,v)\in \boldsymbol{I}^2$,$\theta\in[-3,1]$。经验算可知这是一个绝对连续 copula 族,它们有共同的对角面 $\delta(u,w) = u^2 w$。应用推论2可算得:$\forall \theta_1,\theta_2 \in [-3,1]$,都有 $C_{\theta_1}\oplus C_{\theta_2}$ 为绝对连续 copula。

4 结束语

由于 copula(拟 copula)能为统计分析和金融分析提供描述某种相依结构的框架,所以近些年来发展迅速。目前二元 copula(拟 copula)的研究较为成熟,多元 copula(拟 copula)的研究相对较少,特别是多元 copula(拟 copula)的构造是研究中的难点。本文提供了一种构造多 copula 的方法。该方法形式简单,而且有明确的应用背景,因而不失为一种好的方法。

参考文献:

[1] NELSEN R.An Introduction to copulas[M].2nd ed.NewYork:Springer,2006.

[2] JOE H.Multivariate models and dependenceconcepts[M].London:Chapman & Hall,1997.

[3] JOE H.Dependence modeling with copula[M].NewYork:CRC Press,2014.

[4] DENUIT M,DHAENE J,GOOVAERTS M,et al.Actuarial theory for dependence risk:measures orders and models[M].Hoboken:JohnWiley&Sons,2005.

[5] ANE T, KHAROUBI C. Depedence structure and risk measure[J].Journal of Business,2003,76(3):411-438.

[6] MALEVERGNE Y, SORNETTE D. Extreme financial

risk: from dependence to risk management [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[7] CHAN Y, LI H. Tail dependence for multivariate t-copulas and its monotonicity[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42(2): 763-770.

[8] ALSINA C, NELSEN R B. On the characterization of a class of binary operations on distribution functions [J]. Statistics & Probability Letters, 1993, 17(2): 85-89.

[9] FURMAN E, KUZNETSOV A, SU J, et al. Tail dependence of the Gaussian copula revisited[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2016, 69: 97-103.

[10] FERNANDEZ-SANCHEZ J, NELSEN R, QUESADA - MOLINA, et al. Independence results for multivariate tail dependence coeffecients [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2015, 284: 129-137.

[11] AMO E, MEYER H, CARRILLO M, et al. Characterization of copulas with given diagonal and opposite diagonal sections[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2014, 284: 63-77.

[12] BERNARDINO E, RULLIÈRE D. On tail dependence coeffecients of transformed multivariate Archimedean copulas[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2016, 284: 89-112.

[13] GENEST C, MOLINA J, SEMPI C. A characerization of quasi-copulas[J]. Journal of Multivariate Analysis, 1999, 69(2): 193-205.

[14] CUCULESCU I, THEODORESCU R. Copulas: diagonals and tracks[J]. Rev Roumaine Math Pures Appl, 2001, 46: 731-742.

[15] NELSEN R, MOLINA J, LALLENA J, et al. Best-possible bounds on sets of bivariate distribution functions[J]. Journal of Multivariate Analysis, 2004, 90(2): 348-358.

[16] 曾霞，何平.基于 g 函数的多元 copula 的构造[J].数理统计与管理，2008，27(5)：843-849.
ZENG X, HE P. Construction of n-copula dependence on g function[J]. Appliction of Statistics and Management, 2008, 27(5): 843-849.

A Class of the Construction of Multivariate Copulas and Quasi-copulas

MA Ziqi, BAI Xiaodong

(School of Science, Dalian Minzu University, Liaoning Dalian 116600, China)

Abstract: [**Purposes**] In this paper, The construction of a class of multivariate copulas and quasi-copulas is investigated with the common diagonal section function. [**Methods**] The notion of diagonal section on the former literature is generalized, and an operation is put forward which is denoted by "$\oplus$". Then based on this operation, a method of the construction of multivariate copulas and quasi-copulas is studied. [**Findings**] A class of multivariate copulas and quasi-copulas with the common diagonal section function is given, and its properties is discussed. [**Conclusions**] These provide some dependence frame for statistical modeling and financial analysis.

Keywords: copula; quasi-copula; Lipschitz condition; density function

(责任编辑　许　甲)