DOI:10.11721/cqnuj20180112

一类非局部问题正解的存在性与多重性*

蔡志鹏，储昌木，雷春雨
(贵州民族大学 数据科学与信息工程学院，贵阳 550025)

摘要:【目的】研究一类非局部问题在无界域上的可解性，探索其正解的存在性和多重性条件。【方法】利用 Ekeland's 变分原理和山路引理等变分方法，分析该问题对应泛函的几何结构。【结果】获得了两个正解的存在性，其中一个是负能量解和一个是正能量解。【结论】结果表明，该类非局部问题具有变分结构，可以通过变分法技巧加以研究。此外，相关结果对相关领域的数学模型提供了理论支撑。

关键词:非局部问题;Ekeland's 变分原理;山路引理;正解

中图分类号:O176.91 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2018)01-0084-04

1 主要结果

1883 年，Kirchhoff[1]将数学模型 $u_{tt}-\left(a+b\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=f(x,u)$ 用于描述弹性梁在横向振动过程中的长度变化。该模型与 Kirchhoff 型椭圆方程

$$\begin{cases}-\left(a+b\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=\lambda f(x,u),x\in\Omega\\ u=0,x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{1}$$

密切相关，其中 $a,b>0$ 为常数，Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 上的一个有界光滑区域。自 Lions[2] 介绍该问题的一个抽象框架后，Kirchhof 方程引起了广大学者的关注。文献[3-6]利用变分的方法获得了问题(1)正解的存在性，文献[7-8]讨论了无界区域情形。此外，文献[9]利用下降流的不变集理论讨论了该类问题的变号解的存在性。

最近，Yin 等人[10]研究了非局部问题

$$\begin{cases}-\left(a-b\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=|u|^{p-2}u,x\in\Omega,\\ u=0,x\in\partial\Omega。\end{cases}\tag{2}$$

其中 $a,b>0$ 为常数，Ω 是在 $\mathbf{R}^N$ 上的一个有界光滑区域，$2<p<2^*$(当 $N\geqslant3$ 时，$2^*=\frac{2N}{N-2}$;当 $N=1,2$ 时，$2^*=\infty$)，并利用山路引理获得了问题(2)一个非平凡非负解和一个非平凡非正解的存在性。然而，在无界域上尚未有文献考虑该类问题。因此，受文献[10]的启发，本文考虑方程

$$\begin{cases}-\left(a-b\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=\lambda f(x)u^{q-1},x\in\mathbf{R}^3\\ u\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)\end{cases}\tag{3}$$

正解的存在性与多重性，其中 $a,b>0,1<q<2,\lambda>0,f>0$，且 $f\in L^{\frac{6}{6-q}}(\mathbf{R}^3)$。

在 Sobolev 空间 $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 中取范数 $\|u\|=\left(\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$，且 $L^p(\mathbf{R}^3)$ 中的范数记为 $|\cdot|_p$，则问题(3)对应的能量泛函为 $I_\lambda(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{\lambda}{q}\int_{\mathbf{R}^3}f(x)(u^+)^q\mathrm{d}x,u\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$。若对任意的 $v\in$

* **收稿日期:**2017-03-24 **修回日期:**2017-11-20 **网络出版时间:**2018-01-18 15:21
资助项目:国家自然科学基金(No.11661021);贵州省教育厅创新群体重大研究项目(黔科合 KY 字[2016]029);贵州民族大学科研基金(No.16yjsxm042)
第一作者简介:蔡志鹏，男，研究方向为非线性分析，E-mail:136577802@qq.com;**通信作者:**储昌木，教授，E-mail:gzmychuchangmu@sina.com
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180118.1521.024.html

$D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$，均有$(a-b\|u\|^2)\int_{\mathbf{R}^3}(\nabla u,\nabla v)\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbf{R}^3}f(x)(u^+)^{q-1}v\mathrm{d}x=0$，则称 u 是问题(3)的一个弱解。

本文的主要结果是如下定理。

定理 1　若 $a,b>0,1<q<2,\lambda>0,f>0$ 且 $f\in L^{\frac{6}{6-q}}(\mathbf{R}^3)$，则 $\exists\lambda_*>0$，使得 $\forall\lambda\in(0,\lambda_*)$，问题(3)至少存在两个正解。

2 预备知识

引理 1　若 $a,b>0,1<q<2,\lambda>0,f>0$ 且 $f\in L^{\frac{6}{6-q}}(\mathbf{R}^3)$，则 I_λ 满足(PS)条件。

证明　令$\{u_n\}$是 I_λ 的一个(PS)序列，则存在 $c>0$ 使得对任意$\{u_n\}\subset D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$，有：

$$I_\lambda(u_n)\to c,I'_\lambda(u_n)\to 0,n\to\infty。\tag{4}$$

根据(4)式有 $b\|u_n\|^4=a\|u_n\|^2-\lambda\int_{\mathbf{R}^3}f(x)(u_n^+)^q\mathrm{d}x+o(1)\leqslant a\|u_n\|^2-\lambda\int_{\mathbf{R}^3}f(x)(u_n^+)^q\mathrm{d}x$。由于 $1<q<2,f>0,f\in L^{\frac{6}{6-q}}(\mathbf{R}^3)$，所以$\{u_n\}$在 $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$有界。因此存在$\{u_n\}$的一个收敛子列，不妨仍记为$\{u_n\}$。则当 $n\to\infty$时，

$$\begin{cases}u_n\rightharpoonup u_*,u_*\in L^6(\mathbf{R}^3),\\ u_n\to u_*,u_*\in L^s_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^3),1\leqslant s<2^*,\\ u_n(x)\to u_*(x),\mathrm{a.e.}\mathbf{R}^3。\end{cases}\tag{5}$$

根据(4)式，当 $n\to\infty$时，有：

$$\langle I'_\lambda(u_n)-I'_\lambda(u_*),u_n-u_*\rangle\to 0,\tag{6}$$

并且

$$\begin{aligned}\langle I'_\lambda(u_n)-I'_\lambda(u_*),u_n-u_*\rangle=&(a-b\|u_n\|^2)\int_{\mathbf{R}^3}\nabla u_n\cdot\nabla(u_n-u_*)\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbf{R}^3}f(x)(u_n^+)^{q-1}(u_n-u_*)\mathrm{d}x-\\ &(a-b\|u_*\|^2)\int_{\mathbf{R}^3}\nabla u_*\cdot\nabla(u_n-u_*)\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbf{R}^3}f(x)(u_*^+)^{q-1}(u_n-u_*)\mathrm{d}x=\\ &a\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla(u_n-u_*)|^2\mathrm{d}x-b\|u_n\|^2\int_{\mathbf{R}^3}\nabla u_n\cdot\nabla(u_n-u_*)\mathrm{d}x+b\|u_*\|^2\int_{\mathbf{R}^3}\nabla u_*\cdot\nabla(u_n-u_*)\mathrm{d}x-\\ &\lambda\int_{\mathbf{R}^3}f(x)((u_n^+)^{q-1}-(u_*^+)^{q-1})(u_n-u_*)\mathrm{d}x=a\|u_n-u_*\|^2-b\|u_n\|^2\int_{\mathbf{R}^3}\nabla u_n\cdot\nabla(u_n-u_*)\mathrm{d}x+\\ &b\|u_*\|^2\int_{\mathbf{R}^3}\nabla u_*\cdot\nabla(u_n-u_*)\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbf{R}^3}f(x)((u_n^+)^{q-1}-(u_*^+)^{q-1})(u_n-u_*)\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{7}$$

由 $u_n\rightharpoonup u_*,u_*\in L^6(\mathbf{R}^3)$和$\{u_n\}$在 $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$有界，故

$$b\|u_n\|^2\int_{\mathbf{R}^3}\nabla u_n\cdot\nabla(u_n-u_*)\mathrm{d}x\to 0,\tag{8}$$

$$b\|u_*\|^2\int_{\mathbf{R}^3}\nabla u_*\cdot\nabla(u_n-u_*)\mathrm{d}x\to 0。\tag{9}$$

对任意的 $\rho>0$，有

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbf{R}^3}f(x)((u_n^+)^{q-1}-(u_*^+)^{q-1})(u_n-u_*)\mathrm{d}x\right|=&\left|\int_{|x|>\rho+1}f(x)((u_n^+)^{q-1}-(u_*^+)^{q-1})(u_n-u_*)\mathrm{d}x\right|+\\ &\left|\int_{|x|\leqslant\rho+1}f(x)((u_n^+)^{q-1}-(u_*^+)^{q-1})(u_n-u_*)\mathrm{d}x\right|,\end{aligned}\tag{10}$$

对(10)式等号右边第一项运用 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}&\left|\int_{|x|>\rho}f(x)((u_n^+)^{q-1}-(u_*^+)^{q-1})(u_n-u_*)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{|x|>\rho}f(x)(|u_n|^q+|u_*|^q+|u_n|^{q-1}|u_*|+\\ &|u_*|^{q-1}|u_n|)\mathrm{d}x=\left(\int_{|x|>\rho}f(x)^{\frac{6}{6-q}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{6-q}{6}}\left(|u_n|_6^q+|u_*|_6^q+\left||u_n|^{q-1}|u_*|\right|_6^q+\left||u_*|^{q-1}|u_n|\right|_6^q\right)\leqslant\\ &4C\left(\int_{|x|>\rho}f(x)^{\frac{6}{6-q}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{6-q}{6}}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}。\end{aligned}\tag{11}$$

其中 $\varepsilon>0$,ρ 充分大。因为$\{u_n\}$ 在 $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 有界,所以存在一个常数 $M>0$,使得$\left(\int_{|x|\leqslant\rho+1}|u_n|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{6}}\leqslant M$。

令 $\Omega=\{x\in\mathbf{R}^3:|x|\leqslant\rho+1\}$,$E\subset\Omega$,由$\int_E|f(x)|^{\frac{6}{6-q}}\mathrm{d}x$ 的等度连续性知,对任意的 $\eta>0$,存在 $\delta>0$,当 $m(E)<\delta$ 时,有

$$\int_E f(x)(u_n^+)^q\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)|u_n|^q\mathrm{d}x\leqslant|u_n|_6^q\left(\int_E|f(x)|^{\frac{6}{6-q}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{6-q}{6}}<M^q\eta,$$

则根据 Vitali 收敛定理得:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x|\leqslant\rho+1}f(x)(u_n^+)^q\mathrm{d}x=\int_{|x|\leqslant\rho+1}f(x)(u_*^+)^q\mathrm{d}x。\tag{12}$$

结合(11)和(12)式,当 $n\to\infty$时 $\left|\int_{\mathbf{R}^3}f(x)((u_n^+)^{q-1}-(u_*^+)^{q-1})(u_n-u_*)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$,即:

$$\left|\int_{\mathbf{R}^3}f(x)((u_n^+)^{q-1}-(u_*^+)^{q-1})(u_n-u_*)\mathrm{d}x\right|\to0。\tag{13}$$

结合(7),(8),(9)和(13)式有:

$$\langle I_\lambda'(u_n)-I_\lambda'(u_*),u_n-u_*\rangle=a\|u_n-u_*\|^2。\tag{14}$$

由(6),(14)式得 $\|u_n-u_*\|\to0$,即 $u_n\to u_*$。因此,$I_\lambda(u)$满足(PS)条件。 证毕

引理2 若 $a,b>0,1<q<2,\lambda>0,f>0$,且 $f\in L^{\frac{6}{6-q}}(\mathbf{R}^3)$,则存在 $r,\rho,\Lambda_0>0$,使得对任意 $\lambda\in(0,\Lambda_0)$,$I_\lambda(u)$满足 $\inf\limits_{u\in\overline{B_{\mathbf{R}}(0)}}I_\lambda(u)<0<\rho<\inf\limits_{u\in\partial B_{\mathbf{R}}(0)}I_\lambda(u)$。

证明 对任意的 $u\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$,由 Poincaré 不等式知:

$$I_\lambda(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{\lambda}{q}\int_{\mathbf{R}^3}f(x)(u^+)^q\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{b}{4}\|u\|^4-$$

$$\frac{\lambda}{q}\int_{\mathbf{R}^3}f(x)|u|^q\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{\lambda}{q}|f|_{\frac{6}{6-q}}\left(\int_{\mathbf{R}^3}u^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{6}}=\frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{b}{4}\|u\|^4-$$

$$\frac{\lambda c}{q}|f|_{\frac{6}{6-q}}\|u\|^q=\|u\|^q\left(\frac{a}{2}\|u\|^{2-q}-\frac{b}{4}\|u\|^{4-q}-\frac{\lambda c}{q}|f|_{\frac{6}{6-q}}\right)。$$

其中 c 是与 u 无关的常数。令 $g(t)=\frac{a}{2}t^{2-q}-\frac{b}{4}t^{4-q}$,则存在一个正常数 $r=\left(\frac{2a(2-q)}{b(4-q)}\right)^{\frac{1}{2}}$,使得$\max\limits_{t>0}g(t)=g(r)$,且 $g(r)>0$。取 $\rho=\frac{r^qg(r)}{2}$,记 $\Lambda_0=\frac{qg(r)}{2c\,|f(x)|_{\frac{6}{6-q}}}$,对任意的 $\lambda\in(0,\Lambda_0)$,有$I_\lambda(u)|_{u\in\partial B_r(0)}>\rho$。

因为 $f>0$,所以存在 $\varphi_0\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)\subset D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$,使得$\frac{\lambda}{q}\int_{\mathbf{R}^3}f(x)(\varphi_0^+)^q\mathrm{d}x>0$。又对 $t>0$,由 $I_\lambda(t\varphi_0)=\frac{at^2}{2}\|\varphi_0\|^2-\frac{bt^4}{4}\|\varphi_0\|^4-\frac{\lambda t^q}{q}\int_{\mathbf{R}^3}f(x)(\varphi_0^+)^q\mathrm{d}x$,且 $1<q<2$ 可知,存在 $t_0>0$,使得 $I_\lambda(t_0\varphi_0)<0$,因此 $\inf\limits_{u\in\overline{B_{\mathbf{R}}(0)}}I_\lambda(u)<0$。 证毕

引理3 假设 $\forall\lambda\in(0,\Lambda_0)$,对于给定的 r,能量泛函 I_λ 满足条件:1) 若 $u\in S_{\mathbf{R}}$,有 $I_\lambda(u)>0$。2) $\exists e\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$,当$\|e\|>r$ 时,使得 $I_\lambda(u)<0$。

证明 1) 当 $\lambda<\Lambda_0$ 时,由引理2得 $I_\lambda(u)>0$。

2) 对 $u\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)\backslash\{0\}$,有 $I_\lambda(tu)=\frac{a}{2}\|tu\|^2-\frac{b}{4}\|tu\|^4-\frac{\lambda}{q}\int_{\mathbf{R}^3}f(x)(tu^+)^q\mathrm{d}x\leqslant\frac{at^2}{2}\|u\|^2-\frac{bt^4}{4}\|u\|^4$。所以当 $t\to+\infty$,$I_\lambda(tu)\to-\infty$。因此可以找到 $e\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$,使得当 $\|e\|>r$ 时,有 $I_\lambda(u)<0$。 证毕

3 定理1的证明

1) **证明** (第1个解)记 $d=\inf\limits_{u\in\overline{B_r(0)}}I_\lambda(u)$,在$\overline{B_r(0)}$运用 Ekeland's 变分原理知,存在 $I_\lambda(u)$一个极小化序列 $\{u_n\}\subset\overline{B_r(0)}$,使得 $I_\lambda(u_n)\leqslant\inf\limits_{u\in\overline{B_r(0)}}I_\lambda(u)+\frac{1}{n}$,且 $\forall v\subset\overline{B_r(0)}$有 $I_\lambda(v)\geqslant I_\lambda(u_n)-\frac{1}{n}\|v-u_n\|$。

于是当 $n\to\infty$时，$I_\lambda'(u_n)\to 0$，$I_\lambda(u_n)\to d$。因为$\{u_n\}$有界且$\overline{B_r(0)}$是闭凸集，所以存在 $u_\lambda\in\overline{B_r(0)}\subset D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 和$\{u_n\}$一个子序列，仍记为$\{u_n\}$，使得当 $n\to\infty$，有 $u_n\rightharpoonup u_\lambda$。因为 $I_\lambda(|u_n|)=I_\lambda(u_n)$，根据引理 1，知在 $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 有 $u_n\to u_\lambda$，根据(4)式有 $\|u_\lambda^-\|=\langle I_\lambda'(u_\lambda),-u_\lambda^-\rangle=0$，这表明 $u_\lambda\geqslant 0$，又当 $n\to\infty$时，$d=I_\lambda(u_n)=I_\lambda(u_\lambda)<0=I_\lambda(0)$，则 $u_\lambda\neq 0$。由嵌入定理知 $u_\lambda\in L^6(\mathbf{R}^3)$，又 $f\in L^{\frac{6}{6-q}}(\mathbf{R}^3)$，通过弱解的正则性得 $u_\lambda\in W^{2,\frac{6}{q}}(\mathbf{R}^3)$，再运用嵌入定理有 $u_\lambda\in C^{1,\alpha}(\mathbf{R}^3)$，运用 Harnack 不等式得到 $u_\lambda>0$，a.e.$u_\lambda\in\mathbf{R}^3$。

2) **证明** (第 2 个解)让 $\lambda_*=\min(0,\Lambda_0)$，那么当 $0<\lambda<\lambda_*$ 时，由引理 1～引理 3 和山路引理[11]知，存在一个序列$\{u_n\}\subset D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$，使得 $I_\lambda(u_n)\to c$，$I_\lambda'(u_n)\to 0$，其中

$$c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}I_\lambda(\gamma(t)),\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],D^{1,2}(\mathbf{R}^3)):\gamma(0)=u_\lambda,\gamma(1)=e\}。$$

由引理 1，$\{u_n\}$有一个收敛的子列，仍记为$\{u_n\}$，因此存在 $v_\lambda\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$，使得在 $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$中，有 $u_n\to v_\lambda$。可得 v_λ 是问题(3)的一个非负弱解，并且 $I_\lambda(v_\lambda)=\lim\limits_{n\to+\infty}I_\lambda(u_n)=c>0$。因此与第一个解的证明类似推出 $v_\lambda\neq 0$，所以 $v_\lambda>0$，a.e.$v_\lambda\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$。 证毕

参考文献：

[1] KIRCHHOFF G.Mechanik[M].Leipzig:Teuhner,1883.
[2] LIONS J L.On Some questions in boundary value problems of mathematical physics[J]. North-Holland Mathematics Studies,1978,30:284-346.
[3] ZHANG Z,PERERA K.Sign changing solutions of Kirchhoff type problems via invariant sets of descent flow[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications,2006,317(2):456-463.
[4] FIGUEIREDO G M.Existence of a positive solution for a Kirchhoff problem type with critical growth via truncation argument[J].Journal of Mathematical Analysis & Applications,2013,401(2):706-713.
[5] NAIMEN D.The critical problem of Kirchhoff type elliptic equations in dimension four[J].Journal of Differential Equations,2014,257(4):1168-1193.
[6] FIGUEIREDO G M,PIMENTA M T O.Multiplicity of solutions for a biharmonic equation with subcritical or critical growth[J].Differential & Integral Equations,2012,25(25):853-868.
[7] CHEN S J, LI L. Multiple solutions for the nonhomogeneous Kirchhoff equation on $\mathbf{R}^N$[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications,2013,14(3):1477-1486.
[8] LIANG S,SHI S.Soliton solutions to Kirchhoff type problems involving the critical growth in $\mathbf{R}^N$[J].Nonlinear Analysis,2013,81(37):31-41.
[9] MAO A, LUAN S. Sign-changing solutions of a class of nonlocal quasilinear elliptic boundary value problems [J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications,2011,383(1):239-243.
[10] YIN G,LIU J.Existence and multiplicity of nontrivial solutions for a nonlocal problem[J].Boundary Value Problems,2015,2015(1):1-7.
[11] AMBROSETTI A,RABINOWITZ P H.Dual variational methods in critical point theory and application[J].Journal of Functional Analysis,1973,14(4):349-381.

Existence and Multiplicity of Positive Solutions for a Class of Nonlocal Problems

CAI Zhipeng, CHU Changmu, LEI Chunyu
(School of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025, China)

Abstract: [**Purposes**]Consider the solvability of a class of nonlocal problems on unbounded domain and discuss the existence and multiplicity conditions of its positive solutions. [**Methods**]The geometric structure of the associated functional was analyzed by using the variational method of Ekeland's variational principle and Mountain pass lemma, and so on. [**Findings**]The existence of two positive solutions is obtained, which are a negative energy solution and a positive energy solution. [**Conclusion**]It is shown that these nonlocal problems have a variational structure. Therefore, they may be studied by some variational methods. In addition, the relevant results could provide a theoretical support for some mathematical models in related field.

Keywords: nonlocal problems; Ekeland's variational principle; mountain pass lemma; positive solution

(责任编辑 黄 颖)