2017 年度重庆市出版专项基金资助栏目　　DOI:10.11721/cqnuj20180201

运筹学与控制论

拓扑向量空间中向量极值问题的广义鞍点及对偶定理*

谢小凤[1,2]，李泽民[3]，周宗放[1]

(1. 电子科技大学 经济与管理学院，成都 611731；
2. 成都东软学院 基础教学部，成都 611844；3. 重庆大学 数学与统计学院，重庆 400044)

摘要:【目的】研究拓扑向量空间中向量极值问题的广义鞍点最优性条件及 Lagrange 对偶问题。【方法】引入拓扑向量空间中广义次似凸映射和择一定理，并以广义鞍点理论为分析基础。【结果】在刻画广义鞍点性质的基础上构建了拓扑空间中广义鞍点与向量极值问题弱 Pareto 最优解之间的关系及其对偶定理。【结论】理论分析结果表明向量极值问题的广义鞍点是弱 Pareto 最优解的必要不充分条件，给出了目标函数在其约束映射满足广义 Slater 约束规格条件下的 Lagrange 强、弱对偶定理。

关键词:拓扑向量空间；弱 Pareto 最优解；广义鞍点；Slater 约束规格；对偶定理

中图分类号:O224　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2018)02-0010-06

向量极值问题是通常的向量数值问题或者单目标优化问题的推广，在工程设计、经济管理、交通运输、环境治理等领域均有大量应用。鞍点、Lagrange 函数及其对偶问题始终是优化理论研究领域内能引起学界广泛关注的核心问题，它不仅在讨论优化问题的最优性条件、设计算法等方面有着重要的作用，而且与凸分析、非线性分析及单调算子理论等诸多方面都有着十分密切的联系。当前，许多学者在有限维线性空间的框架内对多目标优化及其相关的对偶问题进行了一系列的研究[1-5]，其中一个基本问题是如何刻画原问题的对偶问题，并建立相互之间解的关系，通常是通过对偶问题解的特征而得到原问题解的特征。本文在拓扑向量空间的框架内提出了向量极值问题的广义鞍点最优性条件及 Lagrange 对偶定理，首先建立拓扑向量空间中广义次似凸映射和择一定理；其次，定义了一类新的广义鞍点，并探讨了广义鞍点的相关性质，在此基础上构建了拓扑空间中广义鞍点与向量极值问题弱 Pareto 最优解之间的关系；最后给出目标函数在其约束映射满足广义 Slater 约束规格条件下的 Lagrange 对偶定理。

1 拓扑向量空间中广义次似凸映射和择一定理

设 X 是线性空间，Y,Z 是实线性拓扑向量空间(简称为线性拓扑空间)，$Y_+\subset Y$，$Z_+\subset Z$ 是 Y,Z 含有原点 $0_Y,0_Z$ 的点闭凸锥，且 Y_+,Z_+ 的拓扑内部非空。设 $M\subset Y$ 为非空集合，集合 $\mathrm{cl}(M)$，$\mathrm{co}(M)$，$\mathrm{cone}(M)$ 分别表示 M 的闭包，M 的凸包和 M 的生成锥。$\mathrm{cone}(M)=\{y\in Y: y=\lambda x,\lambda\geqslant 0,x\in M\}$。

设 V 是一个序线性拓扑空间，用 V^* 表示 V 的对偶空间，即 V^* 是 V 到 R 的线性连续泛函的全体。$Q_+\subset V$ 为一拓扑内部非空的正锥，$\mathrm{int}Q_+\neq\varnothing$，在 Q 中建立序关系：$q\geqslant q'\Leftrightarrow q-q'\in Q_+$，$q\leqslant q'\Leftrightarrow q'\geqslant q$；$q>q'\Leftrightarrow q-q'\in \mathrm{int}Q_+$，$q<q'\Leftrightarrow q'>q$。集合 $Q_+^*=\{q^*\in V^*:\langle q,q^*\rangle\geqslant 0,\forall q\in Q_+\}$ 为 Q_+ 的对偶锥，其中 $\langle q,q^*\rangle$ 表示线性连续泛函 q^* 在点 q 的值。

定义 1　称映射 $F:D\to Y$ 在 D 上是广义次似凸的，如果 $\exists u\in \mathrm{int}Y_+$，$\forall x,x'\in D$，$\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists z\in D$，$\exists r>0$，使 $\varepsilon u+\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)-rF(z)\in Y_+$。

引理 1　如果 Y 是一凸锥，则：i) $\mathrm{int}Y$ 是一凸锥；ii) $\mathrm{cl}Y+\mathrm{int}Y\subset\mathrm{int}Y$。

* **收稿日期**:2017-07-07　**修回日期**:2018-02-11　**网络出版时间**:2018-03-23 15:54

资助项目:国家自然科学基金(No.71271043)；高等学校博士学科点专项科研基金(No.20110185110021)；四川省科技支撑项目(No.2012SZ0001)

第一作者简介:谢小凤，女，讲师，博士研究生，研究方向为最优化理论、金融工程，E-mail:xiexiaofeng@nsu.edu.cn

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180323.1553.004.html

引理 2　$Y_+ + \mathrm{int}Y_+ \subset \mathrm{int}Y_+$。

引理 3　令 Q_+^* 是 Q_+ 的对偶锥：1) 如果 $q^* \in Q_+^* \setminus \{0\}, q \in \mathrm{int}Q_+, \langle q, q^* \rangle > 0$；2) 如果 $q^* \in \mathrm{int}Q_+^*, q \in Q_+ \setminus \{0\}$，$\langle q, q^* \rangle > 0$。

定理 1　如果映射 F 在 D 上是广义次似凸的，则集合 $M = \mathrm{cone}F(D) + \mathrm{int}Y_+$ 是凸的。

证明　设 $m_1, m_2 \in M, \lambda \in [0,1]$，则 $\exists a \geqslant 0, b \geqslant 0$；$\exists x_1, x_2 \in D$；$\exists y_1, y_2 \in \mathrm{int}Y_+$ 使得：

$$m_1 = aF(x_1) + y_1, m_2 = bF(x_2) + y_2。$$

于是 $\lambda m_1 + (1-\lambda) m_2 = \lambda a F(x_1) + (1-\lambda) b F(x_2) + \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2$。

令 $y_0 = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2$，由 $\mathrm{int}Y_+$ 是凸锥，从而 $y_0 \in \mathrm{int}Y_+$，则：

$$\lambda m_1 + (1-\lambda) m_2 = \lambda a F(x_1) + (1-\lambda) b F(x_2) + y_0。$$

若 $\lambda a + (1-\lambda) b = 0$，则有 $\lambda a = (1-\lambda) b = 0$，从而 $\lambda m_1 + (1-\lambda) m_2 = y_0 \in \mathrm{int}Y_+$。

若 $\lambda a + (1-\lambda) b \neq 0$，令 $\lambda a + (1-\lambda) b = k$，$\lambda' = \dfrac{\lambda a}{k}$，则有：

$$\lambda m_1 + (1-\lambda) m_2 = k(\lambda' F(x_1) + (1-\lambda') F(x_2)) + y_0。\tag{1}$$

由 F 在 D 上是广义次似凸的，由定义可得，$\exists u \in \mathrm{int}Y_+$，$\forall x, x' \in D, \forall \lambda \in [0,1]$，$\forall \varepsilon > 0, \exists z \in D, \exists r > 0$，使：

$$\varepsilon u + \lambda F(x) + (1-\lambda) F(y) - rF(z) \in Y_+。\tag{2}$$

由于 $y_0 \in \mathrm{int}Y_+$，则对(2)式中的 u，存在实数 $\varepsilon_0 > 0$ 使 $y_0 + k\varepsilon u \in \mathrm{int}Y_+$，$\forall |\varepsilon| < \varepsilon_0$。

特别地，有：

$$y_0 - k\varepsilon_0 u \in \mathrm{int}Y_+。\tag{3}$$

于是，对(1)，(3)式中的 $x_1, x_2, \lambda', \varepsilon_0$，$\exists x_3 \in D, r' > 0, y' \in Y_+$，有 $\varepsilon_0 u + \lambda' F(x_1) + (1-\lambda') F(x_2) - r' F(x_3) = y'$。即：

$$\lambda' F(x_1) + (1-\lambda') F(x_2) = y' + r' F(x_3) - \varepsilon_0 u。\tag{4}$$

由(1)式和(4)式可得 $\lambda m_1 + (1-\lambda) m_2 = kr' F(x_3) + ky' - k\varepsilon_0 u + y_0$。

又由 Y_+ 是凸锥，则 $ky' \in Y_+$。从而由引理 2 和(3)式知：$ky' - k\varepsilon_0 u + y_0 \in \mathrm{int}Y_+$。故 $\lambda m_1 + (1-\lambda) m_2 \in \mathrm{cone}F(D) + \mathrm{int}Y_+$，因此 M 是凸集。　证毕

定理 2(择一定理)　设 D 是任一非空集合，Y 是序线性拓扑空间，具有内部非空的正锥 Y_+，若 $F: D \to Y$ 是广义次似凸的，则以下结论必有一个成立，但不能同时成立：

1) $\exists x_0 \in D$, s.t. $-F(x_0) \in \mathrm{int}Y_+$；

2) $\exists y^* \in Y_+^* \setminus \{0\}$，使 $\langle F(x), y^* \rangle \geqslant 0, \forall x \in D$。

证明　若结论 1)，2)同时成立。由结论 2)可知，$y^* \in Y_+^* \setminus \{0\}$。由引理 3 及结论 1)得 $\langle F(x_0), y^* \rangle < 0$，此与结论 2)矛盾，故结论 1)，2)不能同时成立。

假定结论 1)不成立，即不存在 $x_0 \in D$，s.t. $-F(x_0) \in \mathrm{int}Y_+$。由凸锥的性质，从而 $\forall \alpha > 0$，也不存在 $x_0 \in D$，s.t. $-\alpha F(x_0) \in \mathrm{int}Y_+$，即 $-\mathrm{cone}F(D) \cap \mathrm{int}Y_+ = \varnothing$。于是，由引理 2 得 $-(\mathrm{cone}F(D) + \mathrm{int}Y_+) \cap Y_+ = \varnothing$。

令 $M = -(\mathrm{cone}F(D) + \mathrm{int}Y_+)$，$M' = M$，则 $M \cap Y_+ = \varnothing$，$M' = \mathrm{cone}F(D) + \mathrm{int}Y_+$。

由定理 1 及已知得，M' 是凸集，从而 M 是凸集。又 Y_+ 是凸集，$\mathrm{int}Y_+ \neq \varnothing$，并注意上面的式子，利用拓扑空间中的凸集分离定理，存在 $y^* \in Y^* \setminus \{0\}$，使得 $\langle y, y^* \rangle \leqslant 0 \leqslant \langle y', y^* \rangle, \forall y \in M, y' \in Y_+$。

因此，$y^* \in Y_+^*$。且 $\forall x \in D, t \in \mathrm{int}Y_+$，有 $\langle -F(x) - t, y^* \rangle \leqslant 0$，即 $\langle F(x) + t, y^* \rangle \geqslant 0, \forall x \in D, t \in \mathrm{int}Y_+$，取 $t_0 \in \mathrm{int}Y_+$，$\lambda_n > 0$ 且 $\lambda_n \to 0$，则 $\langle F(x) + \lambda_n t_0, y^* \rangle \geqslant 0, \forall x \in D, n \in N$。令 $n \to \infty$，于是得到 $\langle F(x), y^* \rangle \geqslant 0$，$\forall x \in D$。　证毕

2 拓扑向量空间中的广义鞍点

考虑向量最优化问题(TP)：$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.t.}\ -g(x) \in Z_+ \end{cases}$，$f: X \to Y, g: X \to Z$，$X$ 是实线性空间，Y, Z 是实线性拓扑空间，$Y_+ \subset Y, Z_+ \subset Z$ 是 Y, Z 含有原点 $0_Y, 0_Z$ 的点闭凸锥。(TP)的约束集合 $A = \{x \in X: -g(x) \in Z_+\}$。

定义 2　设 $y_0^* \in Y_+^*$，$(x_0, z_0^*) \in X \times Z_+^*$，称为(TP)关于 y_0^* 的鞍点，如果对任意 $x \in X, z^* \in Z_+^*$，有：

$$\langle y_0^*, f(x_0)\rangle + \langle z^*, g(x_0)\rangle \leqslant \langle y_0^*, f(x_0)\rangle + \langle z_0^*, g(x_0)\rangle \leqslant \langle y_0^*, f(x)\rangle + \langle z_0^*, g(x)\rangle。\tag{5}$$

注 当$(y_0^*, z_0^*) \in Y_+^* \times Z_+^* \setminus \{0,0\}$,则上述定义正好是向量优化问题的F-J鞍点,若$y_0^* \neq 0$,则称为K-T鞍点。

定义3 设$\overline{x} \in X$,W是线性拓扑空间,$t \in R$,$\varphi: X \to W$为一映射,若极限$\varphi'_{\overline{x}}(x) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\varphi(\overline{x}+tx) - \varphi(\overline{x})}{t}$存在,称此$\varphi$在$\overline{x}$是Gateaux可微的。由Gateaux可微的定义易知对任意实数α,$\varphi'_{\overline{x}}(\alpha x) = \alpha\varphi'_{\overline{x}}(x)$。

定理3 1) 设$x_0 \in A$,若$(y_0^*, z_0^*) \in Y_+^* \times Z_+^*$,使得:

$$\langle y_0^*, f(x) - f(x_0)\rangle + \langle z_0^*, g(x)\rangle \geqslant 0, \forall x \in X。\tag{6}$$

则(x_0, z_0^*)为(TP)关于y_0^*的鞍点。

2) 若$y_0^* \in Y_+^*$,$(x_0, z_0^*) \in X \times Z_+^*$,称为(TP)关于$y_0^*$的鞍点,则(6)式成立,且有$\langle z_0^*, g(x_0)\rangle = 0$,及$x_0 \in A$。

证明 1) 在(6)式中令$x = x_0$,可得到$\langle z_0^*, g(x)\rangle \geqslant 0$。又由已知有$x_0 \in A$,$z_0^* \in Z_+^*$,有$\langle z_0^*, g(x_0)\rangle \leqslant 0$,因此:

$$\langle z_0^*, g(x_0)\rangle = 0。\tag{7}$$

由(6)式和(7)式可得$\langle y_0^*, f(x_0)\rangle + \langle z_0^*, g(x_0)\rangle \leqslant \langle y_0^*, f(x)\rangle + \langle z_0^*, g(x)\rangle$。

再由(7)式及对任意的$z_0^* \in Z_+^*$,有$\langle z^*, g(x)\rangle \leqslant 0$。由此可得:

$$\langle y_0^*, f(x_0)\rangle + \langle z^*, g(x_0)\rangle \leqslant \langle y_0^*, f(x_0)\rangle + \langle z_0^*, g(x_0)\rangle,$$

则(x_0, z_0^*)为(TP)关于y_0^*的鞍点。

2) 设$x_0 \in X$满足(5)式,即:

$$\langle y_0^*, f(x_0)\rangle + \langle z^*, g(x_0)\rangle \leqslant \langle y_0^*, f(x_0)\rangle + \langle z_0^*, g(x_0)\rangle \leqslant \langle y_0^*, f(x)\rangle + \langle z_0^*, g(x)\rangle。\tag{8}$$

在第一个不等式中令$z^* = 0$,得$\langle z_0^*, g(x_0)\rangle \geqslant 0$。再由第二个不等式得:

$$\langle z_0^*, g(x_0)\rangle \leqslant \langle y_0^*, f(x) - f(x_0)\rangle + \langle z_0^*, g(x)\rangle。$$

由上面两个不等式得,$\langle y_0^*, f(x) - f(x_0)\rangle + \langle z_0^*, g(x)\rangle \geqslant 0$。用前面结论1)的证明方法可推出$\langle z_0^*, g(x_0)\rangle = 0$。

要证明$x_0 \in A$,只需要证明$-g(x_0) \in Z_+$即可。事实上,对任意的$z^* \in Z_+^*$和$\alpha > 0$,由(8)式的第一个不等式可得$\langle \alpha z^*, g(x_0)\rangle \leqslant \langle z_0^*, g(x_0)\rangle = 0$。

因为上式对任意的$\alpha > 0$都成立,所以必有$\langle z^*, g(x_0)\rangle \leqslant 0$。因为$Z_+$是闭锥,故有$-g(x_0) \in Z_+$。 证毕

定理4 若$y_0^* \in Y_+^*$,$(x_0, z_0^*) \in X \times Z_+^*$,称为(TP)关于$y_0^*$的鞍点,并且$f$和$g$在$x_0 \in X$处是Gateaux可微的,则有$\langle y_0^*, f'_{x_0}(x)\rangle + \langle z_0^*, g'_{x_0}(x)\rangle = 0, \forall x \in X$。

证明 由于(x_0, z_0^*)是(TP)关于y_0^*的鞍点,由定理3可得(6)式成立,且有$\langle z_0^*, g(x_0)\rangle = 0$及$x_0 \in A$。因此$\langle y_0^*, f(x) - f(x_0)\rangle + \langle z_0^*, g(x) - g(x_0)\rangle \geqslant 0, \forall x \in X$。

由x的任意性,因此对任意的$x \in X$和$t > 0$,有:

$$\langle y_0^*, f(x_0 + tx) - f(x_0)\rangle + \langle z_0^*, g(x_0 + tx) - g(x_0)\rangle \geqslant 0。$$

两边同除以t有:$\langle y_0^*, f(x_0 + tx) - f(x_0)/t\rangle + \langle z_0^*, g(x_0 + tx) - g(x_0)/t\rangle \geqslant 0$。令$t \to 0$,得:

$$\langle y_0^*, f'_{x_0}(x)\rangle + \langle z_0^*, g'_{x_0}(x)\rangle \geqslant 0, \forall x \in X。$$

上式中取$-x$。得$\langle y_0^*, f'_{x_0}(x)\rangle + \langle z_0^*, g'_{x_0}(x)\rangle \leqslant 0, \forall x \in X$。因此$\langle y_0^*, f'_{x_0}(x)\rangle + \langle z_0^*, g'_{x_0}(x)\rangle = 0, \forall x \in X$。

证毕

定理5 设$x_0 \in A$,1) 若$y_0^* \in \mathrm{int}Y_+^*$,$z_0^* \in Z_+^*$,使得$(x_0, z_0^*)$为(TP)关于$y_0^*$的鞍点,则有:

$$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}[(f(x_0), 0) - W - Y_+ \times Z_+]) \cap (Y_+ \times \{0\}) = (0, 0)。\tag{9}$$

2) 若$y_0^* \in Y_+^* \setminus \{0\}$,$z_0^* \in Z_+^*$,使得$(x_0, z_0^*)$为(TP)关于$y_0^*$的鞍点,则有:

$$\mathrm{cone}[(f(x_0), 0) - W - Y_+ \times Z_+] \cap (\mathrm{int}Y_+ \times \{0\}) = \varnothing。\tag{10}$$

证明 1) 假设存在$y_0^* \in \mathrm{int}Y_+^*$,$z_0^* \in Z_+^*$,使得$(x_0, z_0^*)$为(TP)关于$y_0^*$的鞍点,根据鞍点的定义有(5)式成

立，又由定理 3 有 $\langle z_0^*, g(x_0)\rangle = 0$。

若(9)式不成立，则应有 $\bar{y}\in Y_+$，$\bar{y}\neq 0$，且 $(\bar{y},0)\in \mathrm{cl}(\mathrm{cone}[(f(x_0),0)-W-Y_+\times Z_+])\cap(Y_+\times\{0\})$。

由(5)式的第二个不等式，并注意 $y_0^*\in \mathrm{int}Y_+^*$，$\bar{y}\neq 0$，有：$\langle y_0^*,\bar{y}\rangle+\langle z_0^*,o\rangle=\langle y_0^*,\bar{y}\rangle>0$。

由于泛函 y_0^*，z_0^* 的连续性，必存在 $(y',z')\in \mathrm{cone}[(f(x_0),0)-W-Y_+\times Z_+]$，使得：$\langle y_0^*,y'\rangle+\langle z_0^*,z'\rangle>0$。此即是存在 $\alpha>0$，$x_1\in X$ 及 $(m_1,n_1)\in Y_+\times Z_+$ 使得：

$$\langle y_0^*,\alpha(f(x_0)-f(x_1)-m_1)\rangle+\langle z_0^*,\alpha(-g(x_1)-n_1\rangle>0。$$

由于 $\langle y_0^*,-m_1\rangle\leqslant 0$，$\langle z_0^*,-n_1\rangle\leqslant 0$，所以 $\alpha(\langle y_0^*,f(x_0)-f(x_1)\rangle+\langle z_0^*,-g(x_1)\rangle)>0$。也即有

$$\langle y_0^*,f(x_0)\rangle>\langle y_0^*,f(x_1)\rangle+\langle z_0^*,g(x_1)\rangle。$$

由 $\langle z_0^*,g(x_0)\rangle=0$，故有 $\langle y_0^*,f(x_0)\rangle+\langle z_0^*,g(x_0)\rangle>\langle y_0^*,f(x_1)\rangle+\langle z_0^*,g(x_1)\rangle$。这与(5)式矛盾。故 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}[(f(x_0),0)-W-Y_+\times Z_+])\cap(Y_+\times\{0\})=(0,0)$。

2) 若 $y_0^*\in Y_+^*\backslash\{0\}$，$z_0^*\in Z_+^*$，使得 (x_0,z_0^*) 为(TP)关于 y_0^* 的鞍点，假设(10)式不成立，则必有 $\bar{y}\in\mathrm{int}Y_+$，使 $(\bar{y},0)\in\mathrm{cone}[(f(x_0),0)-W-Y_+\times Z_+]\cap(\mathrm{int}Y_+\times\{0\})$。从而 $\langle y_0^*,\bar{y}\rangle+\langle z_0^*,o\rangle=\langle y_0^*,\bar{y}\rangle>0$。

用结论 1)的证明方法可得到上式与(5)式矛盾。　　证毕

定理 6　设 $x_0\in A$，1) 若 $y_0^*\in\mathrm{int}Y_+^*$，$z_0^*\in Z_+^*$，使得 (x_0,z_0^*) 为(TP)关于 y_0^* 的鞍点，则有：

$$\mathrm{cl}(\mathrm{co}[(f(x_0),0)-W-Y_+\times Z_+])\cap(Y_+\times\{0\})=(0,0)。\tag{11}$$

2) 若 $y_0^*\in Y_+^*\backslash\{0\}$，$z_0^*\in Z_+^*$，使得 (x_0,z_0^*) 为(TP)关于 y_0^* 的鞍点，则有：

$$\mathrm{co}[(f(x_0),0)-W-Y_+\times Z_+]\cap(\mathrm{int}Y_+\times\{0\})=\varnothing。\tag{12}$$

证明　结论 1)，2)的证明方法与定理 5 类似。假设存在 $y_0^*\in\mathrm{int}Y_+^*$，$z_0^*\in Z_+^*$，使得 (x_0,z_0^*) 为(TP)关于 y_0^* 的鞍点，根据鞍点的定义有(5)式成立，又由定理 3 有 $\langle z_0^*,g(x_0)\rangle=0$。

若(11)式不成立，则应有 $\bar{y}\in Y_+$，$\bar{y}\neq 0$，且 $(\bar{y},0)\in\mathrm{cl}(\mathrm{co}[(f(x_0),0)-W-Y_+\times Z_+])\cap(Y_+\times\{0\})$。此时就有 $\langle y_0^*,\bar{y}\rangle+\langle z_0^*,o\rangle=\langle y_0^*,\bar{y}\rangle>0$。

由泛函 y_0^*，z_0^* 的连续性，必存在 $(y',z')\in\mathrm{co}[(f(x_0),0)-W-Y_+\times Z_+]$，使得 $\langle y_0^*,y'\rangle+\langle z_0^*,z'\rangle>0$。即存在 $\alpha,\beta>0$，$x_1,x_2\in X$ 及 $(m_1,n_1),(m_2,n_2)\in Y_+\times Z_+$ 使得：

$$\langle y_0^*,\alpha(f(x_0)-f(x_1)-m_1)\rangle+\langle z_0^*,\alpha(-g(x_1)-n_1\rangle+$$
$$\langle y_0^*,\beta(f(x_0)-f(x_2)-m_2)\rangle+\langle z_0^*,\beta(-g(x_2)-n_2\rangle>0。$$

由于 $\langle y_0^*,-m_1-m_2\rangle\leqslant 0$，$\langle z_0^*,-n_1-n_2\rangle\leqslant 0$，所以：

$$\alpha(\langle y_0^*,f(x_0)-f(x_1)\rangle+\langle z_0^*,-g(x_1)\rangle)+\beta(\langle y_0^*,f(x_0)-f(x_2)\rangle+\langle z_0^*,-g(x_2)\rangle)>0。$$

上式必有一项大于零。不妨设 $\alpha(\langle y_0^*,f(x_0)-f(x_1)\rangle+\langle z_0^*,-g(x_1)\rangle)>0$，所以有

$$\langle y_0^*,f(x_0)\rangle>\langle y_0^*,f(x_1)\rangle+\langle z_0^*,g(x_1)\rangle。$$

由 $\langle z_0^*,g(x_0)\rangle=0$，故有 $\langle y_0^*,f(x_0)\rangle+\langle z_0^*,g(x_0)\rangle>\langle y_0^*,f(x_1)\rangle+\langle z_0^*,g(x_1)\rangle$，这与(5)式矛盾。故：

$$\mathrm{cl}(\mathrm{co}[(f(x_0),0)-W-Y_+\times Z_+])\cap(Y_+\times\{0\})=(0,0)。$$

证毕

3 广义鞍点与有效解的关系

定义 4　称(TP)满足 Slater 条件，若存在 $x_0\in K$，使 $g(x_0)<0$。

定理 7　假设：i) $x_0\in A$ 是(TP)的弱 Pareto 最优解；ii) $(f-f(x_0),g)$ 在 X 上是广义次似凸的。则存在 $(y_0^*,z_0^*)\in Y_+^*\times Z_+^*\backslash\{0,0\}$，$(x_0,z_0^*)\in X\times Z_+^*$，称为(TP)关于 y_0^* 的 F-J 鞍点。

证明　由条件 i)知，不存在 $x\in A$，s.t. $f(x)-f(x_0)<0$。从而不存在 $x\in X$，使 $f(x)-f(x_0)<0$，$g(x)<0$。

于是，由条件 ii)及定理 2 知 $(y_0^*,z_0^*)\in Y_+^*\times Z_+^*\backslash\{0,0\}$，使得 $\langle f(x)-f(x_0),y_0^*\rangle+\langle g(x),z_0^*\rangle\geqslant 0$，$\forall x\in X$。

由定理 3 及 $(y_0^*,z_0^*)\neq(0,0)$，易得 $(x_0,z_0^*)\in X\times Z_+^*$ 称为(TP)关于 y_0^* 的 F-J 鞍点。　　证毕

推论 1　假设：i) $x_0\in A$ 是(TP)的弱 Pareto 最优解；ii) $(f-f(x_0),g)$ 在 X 上是广义次似凸的；iii) (TP)满足 Slater 条件。则存在 $(y_0^*,z_0^*)\in Y_+^*\times Z_+^*\backslash\{0,0\}$，$(x_0,z_0^*)\in X\times Z_+^*$ 称为(TP)关于 y_0^* 的 K-T 鞍点。

证明 由定理7可得$(x_0,z_0^*)\in X\times Z_+^*$称为(TP)关于$y_0^*$的F-J鞍点。现只需要证明$y_0^*\neq 0$即可。假设$y_0^*=0$,则由则由Fritz-John鞍点的定义,$\forall x\in X,\forall z^*\in Z_+^*$,有:

$$\langle z^*,g(x_0)\rangle\leqslant\langle z_0^*,g(x_0)\rangle\leqslant\langle z_0^*,g(x)\rangle,z_0^*\neq 0。$$

取$z^*\neq 0$代入上式,有:

$$\langle z_0^*,g(x)\rangle\geqslant 0,\forall x\in X。\tag{13}$$

由条件iii)知,$\exists x_0\in D$,使$g(x_0)<0$。从而有$\langle z_0^*,g(x_0)\rangle<0$。与(13)式矛盾,故$y_0^*\neq 0$。则$(x_0,z_0^*)\in X\times Z_+^*$称为(TP)关于$y_0^*$的K-T鞍点。 证毕

4 强弱对偶定理

设$n\in \mathrm{int}Y_+^*$,定义如下的向量Lagrange映射:$L(x,z^*)=f(x)+\langle g(x),z^*\rangle n$,其中$(x,z^*)\in X\times Z_+^*$。

定义5 称x_0为极值问题$\min\limits_{x\in X}L(x,z^*)$的弱Pareto最优解,若不存在$x\in X$,使$L(x,z^*)-L(x_0,z^*)\in -\mathrm{int}Y_+$。

用$W(z^*)$表示极值问题$\begin{cases}\min L(x,z^*)\\ \mathrm{s.t.}x\in X\end{cases}$的弱Pareto最优解集。设$H(z^*)=\{L(x,z^*):x\in W(z^*)\}$,则(TP)相应的Lagrange对偶问题为(DTP)$\begin{cases}\max H(z^*)\\ \mathrm{s.t.}z^*\in Z_+^*\end{cases}$。

定义6 称$m_0\in\bigcup\limits_{z^*\in Z_+^*}H(z^*)$为(DTP)的弱Pareto最优解集,如果不存在$m\in\bigcup\limits_{z^*\in Z_+^*}H(z^*)$,s.t. $m-m_0\in\mathrm{int}Y_+$。

定理8(弱对偶定理) 对任意的$x\in A,m\in\bigcup\limits_{z^*\in Z_+^*}H(z^*)$有$m-f(x)\notin\mathrm{int}Y_+$。

证明 由于$m\in\bigcup\limits_{z^*\in Z_+^*}H(z^*)$,则存在$z_0^*\in Z_+^*$,使得$m\in H(z_0^*)$。于是,由$H(z_0^*)$的定义知,不存在$x\in X$,使得:

$$m-L(x,z_0^*)\in\mathrm{int}Y_+。\tag{14}$$

显然对任意的$x\in A$,有$-g(x)\in Z_+$,从而由$z_0^*\in Z_+^*,n\in\mathrm{int}Y_+^*$,得:

$$\langle g(x),z_0^*\rangle n\leqslant 0,\ \forall x\in A。\tag{15}$$

假设$\exists x'\in A$,使得$m>f(x')$,结合(14)式可得$m>f(x')+\langle g(x),z_0^*\rangle n$。则$\exists x'\in A$,使得$m-L(x,z_0^*)\in\mathrm{int}Y_+$,与(13)式矛盾。故对任意的$x\in A,m-f(x)\notin\mathrm{int}Y_+$。 证毕

定理9(强对偶定理) 假设:i) $x_0\in A$是(TP)的弱Pareto最优解;ii) $(f-f(x_0),g)$在X上是广义次似凸的;iii) (TP)满足广义Slater条件。则$f(x_0)$是(DTP)的弱Pareto最优解。

证明 由题设条件和定理3及推论1的证明知:存在$(y_0^*,z_0^*)\in Y_+^*\times Z_+^*\backslash\{0,0\},y_0^*\neq 0$,使:

$$\langle y_0^*,f(x)-f(x_0)\rangle+\langle z_0^*,g(x)\rangle\geqslant 0,\forall x\in X,\tag{16}$$

$$\langle z_0^*,g(x_0)\rangle=0。\tag{17}$$

现证$f(x_0)$是优化问题(P1):$\begin{cases}\min f(x)+\langle g(x),z_0^*\rangle n\\ \mathrm{s.t.}x\in X\end{cases}$的弱Pareto最优解。假设$f(x_0)$不是(P1)的弱Pareto最优解,则$x'\in X$,使:

$$f(x_0)-f(x')+\langle g(x'),z_0^*\rangle n\in\mathrm{int}Y_+。\tag{18}$$

不失一般性,可以假定$\langle n,y_0^*\rangle=1$,否则,若$\langle n,y_0^*\rangle=k\neq 1$,由于$n\in\mathrm{int}Y_+^*,y_0^*\neq 0$,则必有$k>0$,在(16)和(17)式中取$(y_0^*,z_0^*)$为$\left(\frac{1}{k}y_0^*,\frac{1}{k}z_0^*\right)$,结论同样成立。于是,由(18)式,$y_0^*\neq 0$及引理3得:

$$\langle f(x')-f(x_0),y_0^*\rangle+\langle g(x'),z_0^*\rangle<0,$$

与(16)式矛盾,故$f(x_0)$是(P1)的弱Pareto最优解。

下证$f(x_0)$是(DTP)的弱Pareto最优解。若$f(x_0)$不是(DTP)的弱Pareto最优解,则$\exists m'\in\bigcup\limits_{z^*\in Z_+^*}H(z^*)$,s.t. $m'-f(x_0)\in\mathrm{int}Y_+$。于是,存在$z_1^*\in Z_+^*$,使得$m'\in H(z_1^*)$。

由于 $x_0 \in A$，即 $g(x_0) \leqslant 0$，而 $n \in \mathrm{int}Y_+^*$，则有 $\langle g(x_0), z_1^* \rangle n \leqslant 0$。

所以由 $m' > f(x_0)$，有 $f(x_0) + \langle g(x_0), z_1^* \rangle n \leqslant m'$。与 $m' \in H(z_1^*)$ 矛盾。因此，$f(x_0)$ 是(DTP)的弱 Pareto 最优解。 证毕

参考文献：

[1] LI Z M.The optimality conditions for vector optimization of set-valued maps[J].Journal of Mathematical Analysis and Applications,1999,237:413-424.

[2] 李泽民.线性拓扑空间中向量极值问题的广义 Kuhn-Tucher 条件[J].系统科学与数学,1990,10(1):78-83.
LI Z M.Generalized Kuhn-Tucker conditions of the vector extremum problem in the linear topological spaces[J].J Sys Sci & Math Scis,1990,10(1):78-83.

[3] 陈光亚.Banach 空间中向量极值问题的 Lagrange 定理及 Kuhn-Tucher 条件[J].系统科学与数学，1983,3(1):62-70.
CHEN G Y.Lagrange multiplier theorem and Kuhn-Tucker conditons for vector maximization problems in Banach space[J].J Sys Sci & Math Scis,1983,3(1):62-70.

[4] JEYAKUMAR V.A Generalization of a minimax theorem of fan via a theorem of the alternative[J].Journal of Optimization Theory and Application,1986,48(3):525-533.

[5] 黄永伟,李泽民.集值映射向量最优化的最优性条件[J].经济数学,2000,17(3):59-65.
HUANG Y W,LI Z M.Optimality conditions for vector optimization of set-valued maps[J].Mathematics Economics,2000,17(3):59-65.

[6] 申合帅,李泽民.线性等式约束非线性最优化问题的一个新算法[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2016,33(4):6-9.
SHEN H S,LI Z M.Descending dimension algorithm for nonlinear optimization problem with linear equality constraints[J].Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2016,33(4):6-9.

[7] 夏远梅,张万里,赵克全.向量优化中改进集的对偶性质[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2014,3(5):26-30.
XIA Y M,ZHANG W L,ZHAO K Q.Dual characterizations of improvement set in vector optimization[J].Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2014,3(5):26-30.

[8] Aleman A.On some generalizations of convex sets and convex functions[J].Anal Numer Theor Approx,1985,14(1):1-6.

[9] 江泽坚,孙善利.泛函分析[M].北京:高等教育出版社,1994.
JIANG Z J,SUN S L. Functional analysis[M]. Beijing: Higher Education Press,1994.

Operations Research and Cybernetics

Generalized Saddle Point and Duality Theorem of Vector Extremum Problems in Topological Vector Space

XIE Xiaofeng[1,3], LI Zemin[3], ZHOU Zongfang[1]

(1. School of Management and Economics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731;
2. Genenal Education Department, Chengdu Nesusoft University, Chengdu 611844;
3. School of Mathematical Statistics, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: [**Purposes**] The topological vector space is studied with vector extremum problems of generalized saddle point in the optimality conditions and lagrange dual problem. [**Methods**] The topological vector space is proposed in the generalized convex mapping and the theorem is chosen,and the properties of generalized saddle points are described. [**Findings**]The relationship is built between the topological space of generalized saddle points and the weak Paretooptimal solution of vector extremum problems and the Lagrange duality theorems. [**Conclusions**]The theoretical analysis results show that the generalized saddle point of vector extremum problem is a necessary and insufficient condition for the weak Pareto optimal solution,and the Lagrange strong and weak duality theorem of the objective function are given under the conditions of generalized Slater constraints..

Keywords: topological vector space; the weak Pareto optimal solution; generalized saddle point; the conditions of generalized Slater constraints; lagrange duality theorems

(责任编辑 黄 颖)