2017 年度重庆市出版专项基金资助栏目 DOI:10.11721/cqnuj20180219

运筹学与控制论

一类鲁棒多目标优化问题的标量化性质*

张晓青，赵克全
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】对多目标优化问题的鲁棒有效解和鲁棒弱有效解的一些性质进行研究。【方法】对鲁棒标量化问题的最优解与多目标优化问题的鲁棒有效解与鲁棒弱有效解之间的关系进行研究，建立了鲁棒弱有效解的一些充分与必要条件，鲁棒有效解的一个充分条件。对提出的鲁棒标量化问题与两类经典的鲁棒标量化问题最优解之间的关系进行讨论，并利用具体例子对主要结果进行解释。【结果】将确定性多目标优化问题的标量化模型推广到鲁棒情形，提出了一类新的鲁棒标量化问题。【结论】所得的结果是对最近一些研究工作的改进与推广。

关键词:鲁棒多目标优化问题;鲁棒标量化问题; 鲁棒弱有效解; 鲁棒有效解
中图分类号:O221.6 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2018)02-0016-05

1 预备知识

近年来，关于多目标优化的理论、方法及应用研究已取得大量成果。特别地，标量化方法作为研究多目标优化问题非常重要的方法之一受到许多学者的关注[1-4]。最近，针对具有不连通可行集的多目标优化问题，Burachik 等人[5]通过将经典的加权标量化方法和约束法相结合提出了处理多目标优化问题的一个新的标量化方法，进而获得多目标优化问题有效解和弱有效解的一些标量化性质。

众所周知，许多的实际问题可能都具有一些不确定性因素，而处理具有不确定性因素的常见方法包括随机规划方法与鲁棒优化方法[6-7]。特别地，最近一些学者对鲁棒多目标优化问题开展了一系列研究，提出了鲁棒多目标优化问题的各类解的定义，获得了各类解的一些基本性质[8-12]。其中，Zamani 等人[11]考虑了目标函数具有扰动项的多目标优化问题，针对这类问题提出了新的鲁棒有效解概念，并在非光滑意义下研究了这类问题的鲁棒有效解和真有效解的一些最优性必要条件和充分条件;Köbis[12]利用标量化方法研究了数值鲁棒优化问题与无约束多目标优化问题之间的一些关系。

受文献[5,7-8,12] 等研究工作的启发，本文主要将文献[5] 中的结果推广到鲁棒多目标情形，利用标量化方法建立了鲁棒弱有效解的一个充要条件与鲁棒有效解的一个充分条件，讨论了本文所提出的鲁棒标量化问题与两类经典的鲁棒标量化问题最优解之间的关系。

考虑如下多目标优化问题:

$$\text{(MOP)}\quad \min\,(f_1(x,\mu_1),f_2(x,\mu_2),\cdots,f_p(x,\mu_p)),$$
$$\text{s.t.}\ x\in F_1=\{x\in\mathbf{R}^n\,|\,g_j(x,\nu_j)\leqslant 0,j=1,2,\cdots,l\},$$

其中 $f_i:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{m_i}\to\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,p)$ 与 $g_j:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{m_j}\to\mathbf{R}(j=1,2,\cdots,l)$ 均为连续函数，$\mu_i\in\mathcal{U}_i\subseteq\mathbf{R}^{m_i}$，$\nu_j\in\mathcal{V}_j\subseteq\mathbf{R}^{m_j}$ 且 $\mathcal{U}_i$ 与 $\mathcal{V}_j$ 均为紧集。考虑(MOP)的如下鲁棒多目标问题:

$$\text{(RMOP)}\quad \min\left(\max_{\mu_1\in\mathcal{U}_1}f_1(x,\mu_1),\max_{\mu_2\in\mathcal{U}_2}f_2(x,\mu_2),\cdots,\max_{\mu_p\in\mathcal{U}_p}f_p(x,\mu_p)\right),$$
$$\text{s.t.}\ x\in F_2=\left\{x\in\mathbf{R}^n\,\middle|\,\max_{\nu_j\in\mathcal{V}_j}g_j(x,\nu_j)\leqslant 0,j=1,2,\cdots,l\right\}。$$

* 收稿日期:2017-11-02 修回日期:2018-01-01 网络出版时间:2018-03-23 15:54
资助项目:国家自然科学基金重点项目(No.11431004);国家自然科学基金面上项目(No.11671062;No.11271391);重庆市基础与前沿研究计划项目(No.cstc2015jcyjA00027)
第一作者简介:张晓青，女，研究方向为多目标优化理论与方法，E-mail:947134548@qq.com;通信作者:赵克全，教授，E-mail:kequanz@163.com
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180323.1553.002.html

定义 1[7]　i) 称(RMOP)的可行解 $x\in F_2$ 为(MOP)的鲁棒可行解；ii) 如果 $\overline{x}\in F_2$ 为(RMOP)的弱有效解，则称 $\overline{x}$ 为(MOP)的鲁棒弱有效解；iii) 如果 $\overline{x}\in F_2$ 为(RMOP)的有效解，则称 $\overline{x}$ 为(MOP)的鲁棒有效解。

令 $W^{+}=\left\{\omega\in\mathbf{R}^p \,\middle|\, \omega_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{p}\omega_i=1\right\}$，$W^{++}=\left\{\omega\in\mathbf{R}^p \,\middle|\, \omega_i>0,\sum_{i=1}^{p}\omega_i=1\right\}$。基于 Burachik 等人[5] 提出的处理确定性多目标优化问题的标量化方法，对于固定的 $k\in\{1,2,\cdots,p\}$ 与 $\omega\in W^{++}$，本文引入如下鲁棒标量化问题：

$$(\mathrm{RSP}_1^k)\quad \min\ \omega_k\max_{\mu_k\in\mathcal{U}_k}f_k(x,\mu_k),$$

$$\text{s.t. } x\in F_\omega^k=\left\{x\in F_2 \,\middle|\, \omega_i\max_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(x,\mu_i)\leqslant\omega_k\max_{\mu_k\in\mathcal{U}_k}f_k(x,\mu_k),i=1,2,\cdots,p,i\neq k\right\}。$$

引理 1　对每一个固定的 $\omega\in W^{++}$，$F_2=\bigcup_{k=1}^{p}F_\omega^k$。

证明　由 F_ω^k 的定义可知，$F_\omega^k\subseteq F_2$，故 $\bigcup_{k=1}^{p}F_\omega^k\subseteq F_2$。反之，对任意给定的 $x\in F_2$，可取 $k\in\{1,2,\cdots,p\}$ 满足 $\omega_k\max_{\mu_k\in\mathcal{U}_k}f_k(x,\mu_k)=\max_{1\leqslant i\leqslant p}\omega_i\max_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(x,\mu_i)$。因此，$x\in F_\omega^k$，即 $F_2\subseteq\bigcup_{k=1}^{p}F_\omega^k$。　　证毕

2 鲁棒多目标优化的标量化性质

类似于文献[5]中的思想，不失一般性，本部分假定 $\min_{1\leqslant i\leqslant p}\left\{\min_{x\in F_2}\max_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(x,\mu_i)\right\}>0$。下面主要利用鲁棒标量化问题($\mathrm{RSP}_1^k$)给出(MOP)的鲁棒(弱)有效解的一些标量化性质。

定理 1　$\overline{x}\in F_2$ 为(MOP)的鲁棒弱有效解当且仅当存在 $\overline{\omega}\in W^{++}$ 使得对任意的 $1\leqslant k\leqslant p$，$\overline{x}$ 为(RSP_1^k)的最优解。

证明　假定 $\overline{x}\in F_2$，存在 $\overline{\omega}\in W^{++}$ 使得对任意的 $1\leqslant k\leqslant p$，$\overline{x}$ 为(RSP_1^k)的最优解且 $\overline{x}$ 不是(MOP)的鲁棒弱有效解。则存在 $\tilde{x}\in F_2$ 使得对任意的 $1\leqslant i\leqslant p$，有：

$$\max_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\tilde{x},\mu_i)<\max_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\overline{x},\mu_i)。\tag{1}$$

因为 $\tilde{x}\in F_2$，则由引理 1 知，存在 $i_0\in\{1,2,\cdots,p\}$ 使得 $\tilde{x}\in F_{\overline{\omega}}^{i_0}$。由(1)式可知

$$\max_{\mu_{i_0}\in\mathcal{U}_{i_0}}f_{i_0}(\tilde{x},\mu_{i_0})<\max_{\mu_{i_0}\in\mathcal{U}_{i_0}}f_{i_0}(\overline{x},\mu_{i_0})。$$

由于 $\overline{\omega}\in W^{++}$，故 $\overline{\omega}_{i_0}\max_{\mu_{i_0}\in\mathcal{U}_{i_0}}f_{i_0}(\tilde{x},\mu_{i_0})<\overline{\omega}_{i_0}\max_{\mu_{i_0}\in\mathcal{U}_{i_0}}f_{i_0}(\overline{x},\mu_{i_0})$。这与对任意的 $1\leqslant k\leqslant p$，$\overline{x}$ 为(RSP_1^k)的最优解矛盾。

假定 $\overline{x}\in F_2$ 为(MOP)的鲁棒弱有效解。因为 $\min_{1\leqslant i\leqslant p}\left\{\min_{x\in F_2}\max_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(x,\mu_i)\right\}>0$，所以可取：

$$\overline{\omega}_i=\frac{1/\max_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\overline{x},\mu_i)}{\sum_{j=1}^{p}1/\max_{\mu_j\in\mathcal{U}_j}f_j(\overline{x},\mu_j)}>0,i=1,2,\cdots,p。\tag{2}$$

假设存在 $i_0\in\{1,2,\cdots,p\}$ 使得 $\overline{x}$ 不是(RSP_1^k)的最优解，则存在 $\tilde{x}\in F_{\overline{\omega}}^{i_0}$ 使得：

$$\overline{\omega}_{i_0}\max_{\mu_{i_0}\in\mathcal{U}_{i_0}}f_{i_0}(\tilde{x},\mu_{i_0})<\overline{\omega}_{i_0}\max_{\mu_{i_0}\in\mathcal{U}_{i_0}}f_{i_0}(\overline{x},\mu_{i_0})。\tag{3}$$

由 $\tilde{x}\in F_{\overline{\omega}}^{i_0}$ 可得：

$$\overline{\omega}_i\max_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\tilde{x},\mu_i)\leqslant\overline{\omega}_{i_0}\max_{\mu_{i_0}\in\mathcal{U}_{i_0}}f_{i_0}(\tilde{x},\mu_{i_0}),i=1,2,\cdots,p,i\neq i_0。\tag{4}$$

由(2)～(4)式可得：

$$\max_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\tilde{x},\mu_i)<\frac{\overline{\omega}_{i_0}}{\overline{\omega}_i}\max_{\mu_{i_0}\in\mathcal{U}_{i_0}}f_{i_0}(\overline{x},\mu_{i_0})=\max_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\overline{x},\mu_i),i=1,2,\cdots,p,i\neq i_0。\tag{5}$$

由(2)，(3)和(5)式可知，对任意的 $1\leqslant i\leqslant p$，$\max_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\tilde{x},\mu_i)<\max_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\overline{x},\mu_i)$。这与 $\overline{x}\in F_2$ 为(MOP)的鲁棒弱有效解产生矛盾。　　证毕

注1 令 S_{ω}^{k} 为 (RSP_1^k) 的最优解集。注意到定理1中,若存在 $\overline{\omega}\in W^{++}$ 使得对任意的 $1\leqslant k\leqslant p$,$\overline{x}$ 为 (RSP_1^k) 的最优解,即 $\overline{x}\in\bigcap_{k=1}^{p}S_{\overline{\omega}}^{k}$,则 $\overline{\omega}$ 取法唯一且可表示为(2)式的形式。

事实上,若存在 $\hat{\omega}$ 使得 $\overline{x}\in\bigcap_{k=1}^{p}S_{\hat{\omega}}^{k}$,则对任意的 $1\leqslant k\leqslant p,i\neq k$,$\hat{\omega}_i\max\limits_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\overline{x},\mu_i)=\hat{\omega}_k\max\limits_{\mu_k\in\mathcal{U}_k}f_k(\overline{x},\mu_k)$。而由 $\overline{x}\in\bigcap_{k=1}^{p}S_{\overline{\omega}}^{k}$ 可知,对任意的 $1\leqslant k\leqslant p,i\neq k$,$\overline{\omega}_i\max\limits_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\overline{x},\mu_i)=\overline{\omega}_k\max\limits_{\mu_k\in\mathcal{U}_k}f_k(\overline{x},\mu_k)$。故有 $\dfrac{\overline{\omega}_i}{\overline{\omega}_k}=\dfrac{\max\limits_{\mu_k\in\mathcal{U}_k}f_k(\overline{x},\mu_k)}{\max\limits_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\overline{x},\mu_i)}=\dfrac{\hat{\omega}_i}{\hat{\omega}_k}$,$i=1,2,\cdots,p,\ i\neq k$。

因为 $\sum\limits_{i=1}^{p}\overline{\omega}_i=\sum\limits_{i=1}^{p}\hat{\omega}_i=1$,所以 $\dfrac{1}{\overline{\omega}_k}=1+\sum\limits_{i\neq k}\dfrac{\overline{\omega}_i}{\overline{\omega}_k}=1+\sum\limits_{i\neq k}\dfrac{\max\limits_{\mu_k\in\mathcal{U}_k}f_k(\overline{x},\mu_k)}{\max\limits_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\overline{x},\mu_i)}=1+\sum\limits_{i\neq k}\dfrac{\hat{\omega}_i}{\hat{\omega}_k}=\dfrac{1}{\hat{\omega}_k}$,则对任意的 $1\leqslant k\leqslant p$,$\overline{\omega}_k=\hat{\omega}_k$,即 $\overline{\omega}=\hat{\omega}$。

注2 定理1中 $\overline{x}\in F_2$ 为(MOP)的鲁棒弱有效解不能加强为鲁棒有效解。

例1 令 $f_1=x_1-2+\mu_1$,$f_2=x_2+1+\mu_2$,$g_1=(x_1-1.5)(x_2-1.5)+\nu_1$,且:$\mu_1\in\mathcal{U}_1=[-0.5,2]$,$\mu_2\in\mathcal{U}_2=[-3,-1]$,$\nu_1\in\mathcal{V}_1=[-1,0]$。

取 $\overline{x}=(1.5,1.25)$,$\omega_1=\dfrac{5}{11}$,$\omega_2=\dfrac{6}{11}$。可验证 $\overline{x}$ 为标量化问题 $(\mathrm{RSP}_1^k)(k=1,2)$ 的最优解。显然,$\overline{x}$ 是(MOP)的鲁棒弱有效解但不是鲁棒有效解。

下面在适当的凸性条件下加强定理1的结果到鲁棒有效解的情形。

定理2 假定 F_2 为凸集且 $f_i(\cdot,\mu_i)(i=1,2,\cdots,p)$ 为定义在 F_2 上的严格凸函数,则(MOP)的鲁棒弱有效解集与鲁棒有效解集相同。

证明 假定 $\overline{x}\in F_2$ 为(MOP)的鲁棒弱有效解。仅需证明 $\overline{x}$ 是(MOP)的鲁棒有效解。若不然,则存在 $\tilde{x}\in F_2$ 使得对任意的 $1\leqslant i\leqslant p$,$\max\limits_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\tilde{x},\mu_i)\leqslant\max\limits_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\overline{x},\mu_i)$,且存在 $i_0\in\{1,2,\cdots,p\}$ 使得:

$$\max_{\mu_{i_0}\in\mathcal{U}_{i_0}}f_{i_0}(\tilde{x},\mu_{i_0})<\max_{\mu_{i_0}\in\mathcal{U}_{i_0}}f_{i_0}(\overline{x},\mu_{i_0})。$$

因为 F_2 为凸集,所以对任意的 $\lambda\in(0,1)$,$\hat{x}=\lambda\tilde{x}+(1-\lambda)\overline{x}\in F_2$。从而由 $f_i(\cdot,\mu_i)$ 在 F_2 上的严格凸性可知,对任意的 $1\leqslant i\leqslant p$,有:

$$f_i(\hat{x},\mu_i)=f_i(\lambda\tilde{x}+(1-\lambda)\overline{x},\mu_i)<\lambda f_i(\tilde{x},\mu_i)+(1-\lambda)f_i(\overline{x},\mu_i)\leqslant$$
$$\lambda\max_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\tilde{x},\mu_i)+(1-\lambda)\max_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\overline{x},\mu_i)\leqslant\lambda\max_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\overline{x},\mu_i)+(1-\lambda)\max_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\overline{x},\mu_i)=\max_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\overline{x},\mu_i)。$$

从而对任意的 $1\leqslant i\leqslant p$,$\max\limits_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\hat{x},\mu_i)<\max\limits_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\overline{x},\mu_i)$。这与 $\overline{x}$ 是(MOP)的鲁棒弱有效解矛盾。 证毕

定理1表明:若存在 $\hat{\omega}$ 使得 $\overline{x}\in\bigcap_{k=1}^{p}S_{\hat{\omega}}^{k}$,即 $\bigcap_{k=1}^{p}S_{\hat{\omega}}^{k}\neq\varnothing$,则可以找到(MOP)的鲁棒弱有效解。下面的结果在 $\bigcap_{k=1}^{p}S_{\hat{\omega}}^{k}$ 可能为空的条件下给出鲁棒有效解的一个充分条件。

定理3 设存在 $\omega\in W^{++}$ 使得对任意的 $1\leqslant j\leqslant p$,$S_{\omega}^{j}\neq\varnothing$。若存在 $k\in\{1,2,\cdots,p\}$,$\overline{x}_k\in S_{\omega}^{k}$ 使得对任意的 $m\neq k$,存在 $\overline{x}_m\in S_{\omega}^{m}$ 且满足 $\max\limits_{\mu_m\in\mathcal{U}_m}f_m(\overline{x}_m,\mu_m)\geqslant\max\limits_{\mu_m\in\mathcal{U}_m}f_m(\overline{x}_k,\mu_m)$,则 $\overline{x}_k$ 为(MOP)的鲁棒弱有效解。

证明 不失一般性,假设 $k=1$,即 $\overline{x}_1\in S_{\omega}^{1}$。假定 $\overline{x}_1$ 不是(MOP)的鲁棒弱有效解,则存在 $\hat{x}\in F_2=\bigcup_{i=1}^{p}F_{\omega}^{i}$ 使得对任意的 $1\leqslant j\leqslant p$,$\max\limits_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\hat{x},\mu_i)<\max\limits_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\overline{x}_1,\mu_i)$。

i) 若 $\hat{x}\in F_{\omega}^{1}$,则由 $\omega\in W^{++}$ 可知,$\omega_1\max\limits_{\mu_1\in\mathcal{U}_1}f_1(\hat{x},\mu_1)<\omega_1\max\limits_{\mu_1\in\mathcal{U}_1}f_1(\overline{x}_1,\mu_1)$。这与 $\overline{x}_1\in S_{\omega}^{1}$ 矛盾。

ii) 若 $\hat{x}\in F_{\omega}^{s}$,$s\neq1$,则有 $\omega_s\max\limits_{\mu_s\in\mathcal{U}_s}f_s(\hat{x},\mu_s)<\omega_s\max\limits_{\mu_s\in\mathcal{U}_s}f_s(\overline{x}_1,\mu_s)$。由条件可知,对任意的 $s\neq1$,存在 $\overline{x}_s\in S_{\omega}^{s}$ 满足 $\omega_s\max\limits_{\mu_s\in\mathcal{U}_s}f_s(\hat{x},\mu_s)<\omega_s\max\limits_{\mu_s\in\mathcal{U}_s}f_s(\overline{x}_1,\mu_s)\leqslant\omega_s\max\limits_{\mu_s\in\mathcal{U}_s}f_s(\overline{x}_s,\mu_s)$。从而有 $\omega_s\max\limits_{\mu_s\in\mathcal{U}_s}f_s(\hat{x},\mu_s)<\omega_s\max\limits_{\mu_s\in\mathcal{U}_s}f_s(\overline{x}_s,\mu_s)$,这与 $\overline{x}_s\in S_{\omega}^{s}$ 矛盾。 证毕

注 3　当紧集$\mathcal{U}_i$ 和$\mathcal{V}_i$ 均退化为单点集时，本节所建立的定理 1～定理 3 分别退化为 Burachik 等人[5]所建立的定理 3.1、命题 3.1 和命题 3.3。

3 几类鲁棒标量化问题最优解之间的关系

最近，Ehrgott 等人[8]引入了如下两类鲁棒标量化问题，并获得了一些标量化性质。

$$(\mathrm{RSP}_2)\quad \min_{x\in F_2}\sum_{i=1}^{p}\omega_i \max_{\mu_i\in\mathcal{U}_i} f_i(x,\mu_i);$$

$$(\mathrm{RSP}_3^j)\quad \min_{x\in F_2}\max_{\mu_j\in\mathcal{U}_j} f_j(x,\mu_j)$$

$$\text{s.t.} f_i(x,\mu_i)\leqslant\varepsilon_i,\ \forall\mu_i\in\mathcal{U}_i,\varepsilon_i>0,i=1,2,\cdots,p,i\neq j。$$

下面主要讨论本文提出的鲁棒标量化问题(RSP_1^k)与(RSP_2)和(RSP_3^k)的最优解之间的一些关系。

定理 4　若存在 $\omega\in W^+$ 使得 $\bar{x}$ 为(RSP_2)的最优解，则存在 $\gamma\in W^{++}$ 使得对任意的 $1\leqslant i\leqslant p$，$\bar{x}$ 为(RSP_1^k)的最优解。

证明　假定存在 $\omega\in W^+$ 使得 $\bar{x}$ 为(RSP_2)的最优解。首先证明 $\bar{x}$ 是(MOP)的鲁棒弱有效解。若不然，则存在 $\hat{x}\in F_2$ 使得对任意的 $1\leqslant i\leqslant p$，$\max\limits_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\hat{x},\mu_i)<\max\limits_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\bar{x},\mu_i)$。由 $\omega\in W^+$ 可得：

$$\sum_{i=1}^{p}\omega_i\max_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\hat{x},\mu_i)<\sum_{i=1}^{p}\omega_i\max_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\bar{x},\mu_i)。$$

这与 $\bar{x}$ 为(RSP_2)的最优解矛盾。所以 $\bar{x}$ 为(MOP)的鲁棒弱有效解。进而由定理 1 可知，存在 $\gamma\in W^{++}$ 使得任意的 $1\leqslant i\leqslant p$，$\bar{x}$ 为(RSP_1^k)的最优解。　　证毕

注 4　下面的例子表明定理 4 的逆定理不一定成立。

例 2　令 $f_1=x_1-0.3+\mu_1$，$f_2=x_2+\sqrt{2}+\mu_2$，且 $g_1=-x_1+\nu_1$，$g_2=-x_2+\nu_2$，$g_3=-x_1^2-x_2^2+1+\nu_3$。$\mu_1\in\mathcal{U}_1=[0.25,0.3]$，$\mu_2\in\mathcal{U}_2=[-\sqrt{3},-\sqrt{2}]$，$\nu_1\in\mathcal{V}_1=[-0.5,0]$，$\nu_2\in\mathcal{V}_2=[-1,0]$，$\nu_3\in\mathcal{V}_3=[-1.5,1]$。取 $\gamma_1=\gamma_2=0.5$。可验证(1,1)为(RSP_1^k)($k=1,2$)的最优解，但不存在 $\omega\in W^+$ 使(1,1)为(RSP_2)的最优解。

定理 5　i) 对任意固定的 k_0，若存在 $\omega\in W^{++}$ 使得 $\bar{x}$ 为($\mathrm{RSP}_1^{k_0}$)的最优解，则存在 ε 使得 $\bar{x}$ 为($\mathrm{RSP}_3^{k_0}$)的最优解；

ii) 若存在 ε 使得 $\bar{x}$ 为($\mathrm{RSP}_3^{k_0}$)的最优解，则存在 $\omega\in W^{++}$ 使得对任意的 $1\leqslant i\leqslant p$，$\bar{x}$ 为(RSP_1^i)的最优解。

证明　i) 假定存在 $\omega\in W^{++}$ 使得 $\bar{x}$ 为($\mathrm{RSP}_1^{k_0}$)的最优解，则对任意的 $x\in F_2$ 有 $\omega_{k_0}\max\limits_{\mu_{k_0}\in\mathcal{U}_{k_0}}f_{k_0}(\bar{x},\mu_{k_0})\leqslant\omega_{k_0}\max\limits_{\mu_{k_0}\in\mathcal{U}_{k_0}}f_{k_0}(x,\mu_{k_0})$，且满足 $\omega_i\max\limits_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\bar{x},\mu_i)\leqslant\omega_{k_0}\max\limits_{\mu_{k_0}\in\mathcal{U}_{k_0}}f_{k_0}(\bar{x},\mu_{k_0})$，$i=1,2,\cdots,p$，$i\neq i_0$。

因为 $\omega\in W^{++}$，所以对任意的 $x\in F_2$ 都有

$$\max_{\mu_{k_0}\in\mathcal{U}_{k_0}}f_{k_0}(\bar{x},\mu_{k_0})\leqslant\max_{\mu_{k_0}\in\mathcal{U}_{k_0}}f_{k_0}(x,\mu_{k_0}),\tag{6}$$

$$f_i(\bar{x},\mu_i)\leqslant\max_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\bar{x},\mu_i)\leqslant\frac{\omega_{k_0}}{\omega_i}\max_{\mu_{k_0}\in\mathcal{U}_{k_0}}f_{k_0}(\bar{x},\mu_{k_0}),i=1,2,\cdots,p,i\neq k_0。\tag{7}$$

取 $\varepsilon_i=\dfrac{\omega_{k_0}}{\omega_i}\max\limits_{\mu_{k_0}\in\mathcal{U}_{k_0}}f_{k_0}(\bar{x},\mu_{k_0})$，则由(6)，(7)式可知，$\bar{x}$ 为($\mathrm{RSP}_3^{k_0}$)的最优解。

ii) 假定 $\bar{x}$ 为($\mathrm{RSP}_3^{k_0}$)的最优解，则对任意的 $x\in F_2$ 都有 $\max\limits_{\mu_{k_0}\in\mathcal{U}_{k_0}}f_{k_0}(\bar{x},\mu_{k_0})\leqslant\max\limits_{\mu_{k_0}\in\mathcal{U}_{k_0}}f_{k_0}(x,\mu_{k_0})$，且对任意的 $\mu_i\in\mathcal{U}_i$，$1\leqslant i\leqslant p$，$i\neq k_0$，$f_i(\bar{x},\mu_i)\leqslant\varepsilon_i$。进而对任意的 $1\leqslant i\leqslant p$，$i\neq k_0$，$\max\limits_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\bar{x},\mu_i)\leqslant\varepsilon_i$。下证 $\bar{x}$ 为(MOP)的鲁棒弱有效解。若不然，则存在 $\hat{x}\in F_2$ 使得对任意的 $1\leqslant i\leqslant p$，$\max\limits_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\hat{x},\mu_i)<\max\limits_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\bar{x},\mu_i)$。故有 $\max\limits_{\mu_{k_0}\in\mathcal{U}_{k_0}}f_{k_0}(\hat{x},\mu_{k_0})<\max\limits_{\mu_{k_0}\in\mathcal{U}_{k_0}}f_{k_0}(\bar{x},\mu_{k_0})$ 且 $\max\limits_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\hat{x},\mu_i)<\max\limits_{\mu_i\in\mathcal{U}_i}f_i(\bar{x},\mu_i)\leqslant\varepsilon_i$，$i=1,2,\cdots,p$，$i\neq k_0$。这与 $\bar{x}$ 为($\mathrm{RSP}_3^{k_0}$)的最优解矛盾。从而由定理 1 可知结论成立。　　证毕

参考文献：

[1] EHRGOTT M.Multicriteria optimization[M].New York:Springer,1999.

[2] YANG X M,YANG X Q,CHEN G Y.Theorems of the alternative and optimization with set-valued maps[J].Journal of Optimization Theory and Applications,2000,107(3):627-640.

[3] YANG X M,LI D,WANG S Y.Near-subconvexlikeness in vector optimization with set-valued functions[J].Journal of Optimization Theory and Applications,2001,110(2):413-427.

[4] LUC D T,PHONG T Q,VOLLE M.Scalarizing functions for generating the weakly efficient solution set in convex multiobjective problems[J].SIAM Journal on Optimization,2005,15(4):987-1001.

[5] BURACHIK R S,KAYA C Y,RIZVI M M.A new scalarization technique to approximate pareto fronts of problems with disconnected feasible sets[J].Journal of Optimization Theory and Applications,2014,162(2):428-446.

[6] KLAMROTH K,KÖBIS E,SCHÖBEL A,et al.A unified approach for different concepts of robustness and stochastic programming via nonlinear scalarizing functionals[J].Optimization,2013,62(5):649-671.

[7] KUROIWA D,LEE G M.On robust multiobjective optimization[J].Vietnam Journal of Mathematics,2012,40(2):305-317.

[8] EHRGOTT M,IDE J,SCHÖBEL A.Minmax robustness for multi-objective optimization problems[J].European Journal of Operational Research,2014,239(1):17-31.

[9] GEORGIEV P G,LUC D T,PARDALOS P M.Robust aspects of solutions in deterministic multiple objective linear programming[J].European Journal of Operational Research,2013,229(1):29-36.

[10] GOBERNA M A,JEYAKUMAR V,LI G,et al.Robust solutions to multi-objective linear programs with uncertain data[J].European Journal of Operational Research,2015,242(3):730-743.

[11] ZAMANI M,SOLEIMANI-DAMANEH M,KABGANI A.Robustness in nonsmooth nonlinear multi-objective programming[J].European Journal of Operational Research,2015,247(2):370-378.

[12] KÖBIS E.On robust optimization:relations between scalar robust optimization and unconstrained multicriteria optimization[J].Journal of Optimization Theory and Applications,2015,167(3):969-984.

Operations Research and Cybernetics

Scalarization Characterizations for a Class of Robust Multi-Objective Optimization Problems

ZHANG Xiaoqing, ZHAO Kequan

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]Some properties of robust efficient solutions and robust weakly efficient solutions for multi-objective optimization problems are studied. [**Methods**]The relationship was studied among optimal solutions of robust scalarization problems and the robust efficient solutions, robust weakly solutions of multi-objective optimization problems, then some necessary and sufficient conditions for robust weakly efficient solution and also a sufficient condition for robust efficient solution were established. Moreover, the relationship is discussed for optimal solutions among the proposed robust scalarization problem and two classical robust scalarization problems, and then some concrete examples was proposed to explain the main results. [**Findings**] The scalarization model for deterministic multi-objective optimization problem is generalized to the robust case and a new class of robust scalarization problems is proposed. [**Conclusions**]The results are the improvement and generalization of some recent research work.

Keywords: robust multi-objective optimization problems; robust scalarization optimization problems; robust weakly efficient solutions; robust efficient solutions

（责任编辑 黄 颖）