DOI:10.11721/cqnuj20180211

偏序度量空间上 ρ 或 σ-拟收缩的两个映射的公共不动点*

朴 勇 杰
(延边大学 理学院,吉林 延吉 133002)

摘要:【目的】在偏序的度量空间上讨论两个映射的公共不动点的存在问题。【方法】研究在具有偏序的实度量空间上满足由两个实函数 ρ 和 σ 决定的拟收缩条件的两个映射的性质。【结果】得到了这两个映射在连续或非连续条件下具有唯一公共不动点的存在定理,同时给出了不动点存在定理。【结论】所得结果推广和改进了已有文献中的相应结论。

关键词:映射 ρ;映射 σ;拟收缩;公共不动点

中图分类号:O177.91;O189.11 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2018)02-0071-06

Banach 收缩原理是非线性分析中的一个强有力的工具。不少作者通过减弱和推广 Banach 收缩映射得到了不动点和公共不动点定理[1-11],从而推广和改进了 Banach 不动点定理。而且有些作者通过利用特殊实函数讨论并得到偏序的实度量空间上满足收缩条件的自映射的不动点存在问题,其中的典型定理有:

定理 1[12] 设 $(X,\sqsubseteq)$ 是偏序集且 (X,d) 是度量空间。如果 $f:X\to X$ 是连续的非递减的映射使得对任何 $x,y\in X$ 且 $y\sqsubseteq x$,$d(fx,fy)\leqslant d(x,y)-\psi(d(x,y))$,其中 $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续的非递减函数且使得 ψ 在 $(0,\infty)$ 是正的,$\psi(0)=0$,$\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t)=\infty$。如果存在 $x_0\in X$ 使得 $x_0\sqsubseteq fx_0$,则 f 有一个不动点。

定理 2[13] 设 $(X,\sqsubseteq)$ 是偏序集且 (X,d) 是度量空间。如果 $f:X\to X$ 是连续的非递减的映射使得对任何 $x,y\in X$ 且 $y\sqsubseteq x$,$\psi(d(fx,fy))\leqslant\psi(d(x,y))-\psi_1(d(x,y))$,其中 $\psi,\psi_1:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 都是连续的非递减的,$\psi(t)=0\Leftrightarrow t=0$ 及 $\psi_1(t)=0\Leftrightarrow t=0$。如果存在 $x_0\in X$ 使得 $x_0\sqsubseteq fx_0$,则 f 有一个不动点。

定理 3[14] 设 $(X,\sqsubseteq)$ 是偏序集且 (X,d) 是度量空间。如果 $f:X\to X$ 是连续的非递减的映射使得对任何 $x,y\in X$ 且 $y\sqsubseteq x$,$\psi(d(fx,fy))\leqslant\psi_1(d(x,y))$,其中 $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续的非递减的且 $\psi(t)=0\Leftrightarrow t=0$,而 $\psi_1:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续的且满足 $\psi(t)>\psi_1(t)$,$\forall t>0$。如果存在 $x_0\in X$ 使得 $x_0\sqsubseteq fx_0$,则 f 有一个不动点。

上述 3 个结果都是满足由特殊实连续函数决定的收缩条件的映射的不动点存在定理。

本文则利用两个非连续的实函数,考虑满足两种拟收缩条件而不是收缩条件的两个映射,讨论两个映射在连续及非连续的条件下存在唯一公共不动点的存在性问题,并给出若干不动点存在定理。

设 $(X,\sqsubseteq)$ 是一个偏序集。下面实例说明存在 X 的自映射 f 满足对任何 $x\in X$ 存在 $y\in X$ 满足 $x=fy$ 且 $x\sqsubseteq y$。

例 1 设 $X=\mathbf{R}$ 是具有通常偏序关系 $\leqslant$ 的实数集合。定义函数 $f:X\to X$ 为:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2},\text{如果 } x\leqslant 1,\\ 1-\dfrac{x}{2},\text{如果 } 1<x\leqslant 2,\\ 3x-6,\text{如果 } 2<x\leqslant 3,\\ \dfrac{x}{3}+2,\text{如果 } x>3。\end{cases}$$

考虑两个实函数 ρ 和 σ。$\rho:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 为非递减的且满足 (ρ_1):$\rho(0)=0$;(ρ_2):$0<\rho(t)<t$,$\forall t>0$;(ρ_3):$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\rho^n(t)<\infty$,$\forall t>0$。

* **收稿日期**:2016-12-28 **修回日期**:2017-11-28 **网络出版时间**:2018-03-23 15:54
资助项目:国家自然科学基金(No.11361064)
第一作者简介:朴勇杰,男,教授,研究方向为非线性分析及不动点理论,E-mail:sxpyj@ybu.edu.cn
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180323.1554.022.html

称 $\sigma:[0,\infty)\to[0,\infty)$为比较函数,如果 σ 满足:(σ_1):σ 是非递减的;(σ_2):$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma^n(t)=0$, $\forall t>0$。

注1 根据文献[15],如果 σ 是比较函数,则对任何 $t>0$, $0<\rho(t)<t$。

1 公共不动点定理

定理4 设$(X,\sqsubseteq,d)$是偏序的完备的度量空间,$f,g:X\to X$ 是两个映射使得 f 或 g 是连续的。若

i) 对任何可比较的 $x,y\in X$,

$$d(x,y)\leqslant\rho\left(\max\left\{d(fx,gy),d(x,fx),d(y,gy),\frac{d(x,gy)+d(y,fx)}{2}\right\}\right);$$

ii) 对任何 $x\in X$ 存在 $y_1,y_2\in X$ 满足 $x=fy_1$, $x=gy_2$ 且 x 分别与 y_1 及 y_2 可比较的。

则 f 和 g 有一个公共不动点。进一步,如果 $\mathrm{Fix}(f)\cap\mathrm{Fix}(g)$中任何两个元素是可比较的,则 f 和 g 有唯一公共不动点。

证明 任取 $x_0\in X$,根据ii)构造一个 X 中的序列$\{x_n\}$满足如下条件:$x_{2n}=fx_{2n+1}$, $x_{2n+1}=gx_{2n+2}$且满足 x_n 与 x_{n+1}是可比较的,$\forall n=0,1,2,\cdots$。

则对任何 $n=0,1,2,\cdots$,根据i)得到

$$d(x_{2n+1},x_{2n+2})\leqslant\rho\left(\max\left\{d(fx_{2n+1},gx_{2n+2}),d(x_{2n+1},fx_{2n+1}),d(x_{2n+2},gx_{2n+2}),\frac{d(x_{2n+1},gx_{2n+2})+d(x_{2n+2},fx_{2n+1})}{2}\right\}\right)=$$

$$\rho\left(\max\left\{d(x_{2n},x_{2n+1}),d(x_{2n+1},x_{2n+2}),\frac{d(x_{2n},x_{2n+2})}{2}\right\}\right)\leqslant$$

$$\rho\left(\max\left\{d(x_{2n},x_{2n+1}),d(x_{2n+1},x_{2n+2}),\frac{d(x_{2n},x_{2n+1})+d(x_{2n+1},x_{2n+2})}{2}\right\}\right)。$$

如果存在某一非负整数 n 使得 $d(x_{2n},x_{2n+1})<d(x_{2n+1},x_{2n+2})$,则 $d(x_{2n+1},x_{2n+2})>0$,于是根据(ρ_2)得 $d(x_{2n+1},x_{2n+2})\leqslant\rho(d(x_{2n+1},x_{2n+2}))<d(x_{2n+1},x_{2n+2})$,矛盾。于是对任何 $n=0,1,2,\cdots$,$d(x_{2n+1},x_{2n+2})\leqslant d(x_{2n},x_{2n+1})$,从而得到

$$d(x_{2n+1},x_{2n+2})\leqslant\rho(d(x_{2n},x_{2n+1})),n=0,1,2,\cdots。\tag{1}$$

类似地,在上面推理过程中把 x_{2n+1}换成 x_{2n+3},则得到

$$d(x_{2n+2},x_{2n+3})\leqslant\rho(d(x_{2n+1},x_{2n+2})),n=0,1,2,\cdots。\tag{2}$$

结合(1)式和(2)式得到

$$d(x_n,x_{n+1})\leqslant\rho(d(x_{n-1},x_n)),n=1,2,\cdots,\tag{3}$$

根据归纳得到

$$d(x_n,x_{n+1})\leqslant\rho^n(d(x_0,x_1)),n=1,2,\cdots,\tag{4}$$

于是对任何自然数 n,k,有 $d(x_n,x_{n+k})\leqslant\sum\limits_{i=k}^{n+k-1}d(x_i,x_{i+1})\leqslant\sum\limits_{i=k}^{n+k-1}\rho^i(d(x_0,x_1))$。因此根据$(\rho_3)$知$\{x_n\}$是柯西序列。由 X 的完备性可知存在 $u\in X$ 使得$\{x_n\}$收敛于 $u\in X$。

假设 f 是连续的。令 $n\to\infty$,则由 $x_{2n}=fx_{2n+1}$得到 $u=fu$。根据ii),相对于 $u\in X$ 存在 $y'\in X$ 使得 $u=gy'$ 且 u 与 y'是可比较的。根据i)得到

$$d(u,y')\leqslant\rho\left(\max\left\{d(fu,gy'),d(u,fu),d(y',gy'),\frac{d(u,gy')+d(y',fu)}{2}\right\}\right)=\rho(d(u,y')),$$

于是根据(ρ_1)和(ρ_2)知 $d(u,y')=0$,即 $u=y'$。因此 $fu=u=gy'=gu$,这说明 u 是 f,g 的公共不动点。

如果 u^* 也是 f,g 一个公共不动点,则

$$d(u,u^*)\leqslant\rho\left(\max\left\{d(fu,gu^*),d(u,fu),d(u^*,gu^*),\frac{d(u,gu^*)+d(u^*,fu)}{2}\right\}\right)=\rho(d(u,u^*)),$$

再次根据(ρ_1)和(ρ_2)知 $d(u,u^*)=0$,即 $u=u^*$。于是 u 是 f,g 的唯一公共不动点。

类似地证明当 g 连续时具有相同的结果。在此省略。 证毕

如果 $f=g$,则得到如下比定理4条件更弱的不动点定理。

定理5 设$(X,\sqsubseteq,d)$是偏序的完备的度量空间,$f:X\to X$ 是连续映射。如果:

i) 对任何 $x, y \in X, x \sqsubseteq y, d(x,y) \leqslant \rho\left(\max\left\{d(fx,fy), d(x,fx), d(y,fy), \dfrac{d(x,fy)+d(y,fx)}{2}\right\}\right)$；

ii) 对任何 $x \in X$ 存在 $y \in X$ 满足 $x = fy$ 且 $x \sqsubseteq y$。

则 f 有一个不动点。进一步，如果 $\mathrm{Fix}(f)$ 中任何两个元素是可比较的，则 f 有唯一不动点。

证明　类似于定理 4 的证明，根据 ii)可构造一个序列 $\{x_n\}$ 满足：$x_n = fx_{n+1}$ 且 $x_n \sqsubseteq x_{n+1}$，$\forall n = 0,1,2,\cdots$。对任何 $n = 0,1,2,\cdots$，根据 i)得到

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \rho\left(\max\left\{d(fx_n, fx_{n+1}), d(x_n, fx_n), d(x_{n+1}, fx_{n+1}), \frac{d(x_n, fx_{n+1}) + d(x_{n+1}, fx_n)}{2}\right\}\right) =$$
$$\rho\left(\max\left\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_{n-1}, x_{n+1})}{2}\right\}\right) \leqslant$$
$$\rho\left(\max\left\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})}{2}\right\}\right)。$$

于是采用定理 4 的证明得到 $d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \rho(d(x_{n-1}, x_n))$，$n = 0,1,2,\cdots$，且 $\{x_n\}$ 是柯西序列。由 X 的完备性可知存在 $u \in X$ 使得 $\{x_n\}$ 收敛于 u，再由 f 的连续性及 $x_n = fx_{n+1}$ 容易得到 $u = fu$。　　证毕

若取 $g = 1_X$，则根据定理 4 得到如下不动点定理。

定理 6　设 $(X, \sqsubseteq, d)$ 是偏序的完备的度量空间，$f: X \to X$ 是映射。如果：

i) 对任何可比较的 $x, y \in X, d(x,y) \leqslant \rho\left(\max\left\{d(fx,y), d(x,fx), \dfrac{d(x,y)+d(y,fx)}{2}\right\}\right)$；

ii) 对任何 $x \in X$ 存在 $y \in X$ 满足 $x = fy$ 且 x 与 y 可比较。

则 f 有一个不动点。进一步，如果 $\mathrm{Fix}(f)$ 中任何两个元素是可比较的，则 f 有唯一不动点。

下面将给出满足另一个函数 σ 控制的拟收缩条件的两个映射的公共不动点存在定理。

定理 7　设 $(X, \sqsubseteq, d)$ 是偏序的完备的度量空间，$f, g: X \to X$ 是两个映射使得 f 或 g 是连续的。若：

i) 对任何可比较的 $x, y \in X$，

$$d(x,y) \leqslant \sigma\left(\max\left\{d(fx,gy), d(x,fx), d(y,gy), \frac{d(x,gy)+d(y,fx)}{2}\right\}\right), \tag{5}$$

其中 σ 是上半连续的比较函数；

ii) 对任何 $x \in X$ 存在 $y_1, y_2 \in X$ 满足 $x = fy_1, x = gy_2$ 且 x 分别与 y_1 及 y_2 可比较的。

则 f 和 g 有一个公共不动点。进一步，如果 $\mathrm{Fix}(f) \cap \mathrm{Fix}(g)$ 中任何两个元素是可比较的，则 f 和 g 有唯一公共不动点。

证明　任取 $x_0 \in X$，根据 ii)构造一个 X 中的序列 $\{x_n\}$ 满足：$x_{2n} = fx_{2n+1}, x_{2n+1} = gx_{2n+2}$ 且满足 x_n 与 x_{n+1} 是可比较的，$\forall n = 0,1,2,\cdots$。对任何 $n = 0,1,2,\cdots$，根据(5)式得到：

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leqslant \sigma\left(\max\left\{d(fx_{2n+1}, gx_{2n+2}), d(x_{2n+1}, fx_{2n+1}), d(x_{2n+2}, gx_{2n+2}), \frac{d(x_{2n+1}, gx_{2n+2}) + d(x_{2n+2}, fx_{2n+1})}{2}\right\}\right) =$$
$$\sigma\left(\max\left\{d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n+1}, x_{2n+2}), \frac{d(x_{2n}, x_{2n+2})}{2}\right\}\right) \leqslant$$
$$\sigma\left(\max\left\{d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n+1}, x_{2n+2}), \frac{d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{2}\right\}\right)。$$

如果存在某一非负整数 n 使得 $d(x_{2n}, x_{2n+1}) < d(x_{2n+1}, x_{2n+2})$，则 $d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) > 0$，于是由注 1 得 $d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leqslant \sigma(d(x_{2n+1}, x_{2n+2})) < d(x_{2n+1}, x_{2n+2})$，矛盾。于是对任何 $n = 0,1,2,\cdots, d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leqslant d(x_{2n}, x_{2n+1})$，从而得到：

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leqslant \sigma(d(x_{2n}, x_{2n+1})), n = 0,1,2,\cdots。 \tag{6}$$

类似地，在上面推理过程中把 x_{2n+1} 换成 x_{2n+3}，则得到：

$$d(x_{2n+2}, x_{2n+3}) \leqslant \rho(d(x_{2n+1}, x_{2n+2})), n = 0,1,2,\cdots。 \tag{7}$$

综合(6)式和(7)式得到：

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \sigma(d(x_{n-1}, x_n)), n = 1,2,\cdots, \tag{8}$$

根据归纳得到 $d(x_n,x_{n+1})\leqslant\sigma^n(d(x_0,x_1)),n=1,2,\cdots$。根据性质($\sigma_2$)得到

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_{n+1})=0。\tag{9}$$

假设$\{x_n\}$不是柯西序列,则存在 $\varepsilon>0$ 使得对任何自然数 i,存在两个自然数 $m(i)$,$n(i)$使得 $n(i)>m(i)>i$ 且满足

$$d(x_{m(i)},x_{n(i)})\geqslant\varepsilon。\tag{10}$$

根据(9)式可假设 $m(i)$和 $n(i)$奇偶性不同且可选取 $n(i)$使得 $n(i)$是满足 $n(i)>m(i)>i$ 和(10)式的最小的正整数,则有

$$d(x_{m(i)},x_{n(i)-1})<\varepsilon。\tag{11}$$

根据(10),(11)式得到

$$\varepsilon\leqslant d(x_{m(i)},x_{n(i)})\leqslant d(x_{m(i)},x_{n(i)-1})+d(x_{n(i)-1},x_{n(i)})<\varepsilon+d(x_{n(i)-1},x_{n(i)}),$$

因此利用(9)式容易得到

$$\lim_{i\to\infty}d(x_{m(i)},x_{n(i)})=\lim_{i\to\infty}d(x_{m(i)},x_{n(i)-1})=\varepsilon。\tag{12}$$

又因为

$$|d(x_{m(i)-1},x_{n(i)-1})-d(x_{m(i)},x_{n(i)-1})|\leqslant d(x_{m(i)-1},x_{m(i)}),$$
$$|d(x_{m(i)-1},x_{n(i)-1})-d(x_{m(i)-1},x_{n(i)})|\leqslant d(x_{n(i)-1},x_{n(i)})$$

成立,因此结合(9),(12)式得到:

$$\lim_{i\to\infty}d(x_{m(i)},x_{n(i)})=\lim_{i\to\infty}d(x_{m(i)},x_{n(i)-1})=\lim_{i\to\infty}d(x_{m(i)-1},x_{n(i)-1})=\lim_{i\to\infty}d(x_{m(i)-1},x_{n(i)})=\varepsilon。\tag{13}$$

如果 $m(i)$是奇数,则 $n(i)$是偶数,因此根据(5)式得到:

$$d(x_{m(i)},x_{n(i)})\leqslant\sigma\left(\max\left\{d(fx_{m(i)},gx_{n(i)}),d(x_{m(i)},fx_{m(i)}),d(x_{n(i)},gx_{n(i)}),\frac{d(x_{m(i)},gx_{n(i)})+d(x_{n(i)},fx_{m(i)})}{2}\right\}\right)=$$
$$\sigma\left(\max\left\{d(x_{m(i)-1},x_{n(i)-1}),d(x_{m(i)},x_{m(i)-1}),d(x_{n(i)},x_{n(i)-1}),\frac{d(x_{m(i)},x_{n(i)-1})+d(x_{n(i)},x_{m(i)-1})}{2}\right\}\right)。$$

令 $i\to\infty$,则根据(13)式及 σ 的上半连续性和 $\varepsilon>0$ 得到 $\varepsilon\leqslant\sigma(\max\{\varepsilon,0,0,\varepsilon\})=\sigma(\varepsilon)<\varepsilon$,这是一个矛盾。类似地,当 $m(i)$是偶数,$n(i)$是奇数时仍然得到相同的矛盾。于是$\{x_n\}$必是柯西序列。由 X 的完备性可知存在 $u\in X$ 使得$\{x_n\}$收敛于 u。

假设 f 是连续的。令 $n\to\infty$,则由 $x_{2n}=fx_{2n+1}$得到 $u=fu$。根据 ii),相对于 $u\in X$ 存在 $y'\in X$ 使得 $u=gy'$ 且 u 与 y'是可比较的。根据(5)式得到:

$$d(u,y')\leqslant\sigma\left(\max\left\{d(fu,gy'),d(u,fu),d(y',gy'),\frac{d(u,gy')+d(y',fu)}{2}\right\}\right)=\sigma(d(u,y')),$$

于是根据注 1 知 $d(u,y')=0$,即 $u=y'$。因此 $fu=u=gy'=gu$,这说明 u 是 f,g 的一个公共不动点。

如果 u^* 也是 f,g 的一个公共不动点,则:

$$d(u,u^*)\leqslant\sigma\left(\max\left\{d(fu,gu^*),d(u,fu),d(u^*,gu^*),\frac{d(u,gu^*)+d(u^*,fu)}{2}\right\}\right)=\sigma(d(u,u^*)),$$

再次根据注 1 知 $d(u,u^*)=0$,即 $u=u^*$。于是 u 是 f,g 的唯一公共不动点。 证毕

类似于定理 5,如果 $f=g$,则由定理 7 得到如下不动点定理。

定理 8 设$(X,\sqsubseteq,d)$是偏序的完备度量空间,$f:X\to X$ 连续。若:

i) 对任何 $x,y\in X$ 且 $x\sqsubseteq y$,$d(x,y)\leqslant\sigma\left(\max\left\{d(fx,fy),d(x,fx),d(y,fy),\frac{d(x,fy)+d(y,fx)}{2}\right\}\right)$,其中 σ 是上半连续的比较函数;

ii) 对任何 $x\in X$ 存在 $y\in X$ 满足 $x=fy$ 且 $x\sqsubseteq y$。

则 f 有一个不动点。进一步,如果 Fix(f)中任何两个元素是可比较的,则 f 有唯一不动点。

若取 $g=1_X$,则根据定理 7 得到如下不动点定理。

定理 9 设$(X,\sqsubseteq,d)$是偏序的完备的度量空间,$f:X\to X$ 是映射。若:

i) 对任何可比较的 $x,y\in X$,$d(x,y)\leqslant\sigma\left(\max\left\{d(fx,y),d(x,fx),\frac{d(x,y)+d(y,fx)}{2}\right\}\right)$,其中 σ 是上半

连续的比较函数;

ii) 对任何 $x\in X$ 存在 $y\in X$ 满足 $x=fy$ 且 x 与 y 可比较。

则 f 有一个不动点。进一步,如果 $\mathrm{Fix}(f)$ 中任何两个元素是可比较的,则 f 有唯一不动点。

下面将给出定理 4 和定理 7 中的两个映射 f 和 g 都是非连续的条件下的表现形式。

定理 10　设$(X,\sqsubseteq,d)$是偏序的完备的度量空间,$f,g:X\to X$ 是两个映射。如果下列条件 i)和 ii)及 iii)或 iv)成立:

i) 对任何可比较的 $x,y\in X$,$d(x,y)\leqslant\rho\left(\max\left\{d(fx,gy),d(x,fx),d(y,gy),\dfrac{d(x,gy)+d(y,fx)}{2}\right\}\right)$且 ρ 是上半连续;

ii) 对任何 $x\in X$ 存在 $y_1,y_2\in X$ 满足 $x=fy_1,x=gy_2$ 且 $x\sqsubseteq y_1$ 及 $x\sqsubseteq y_2$;

iii) $f^2=1_X$ 且当单调递增序列$\{x_n\}$收敛于 x 时 $x_n\sqsubseteq fx,\forall n=1,2,\cdots$;

iv) $g^2=1_X$ 且当单调递增序列$\{x_n\}$收敛于 x 时 $x_n\sqsubseteq gx,\forall n=1,2,\cdots$。

则 f 和 g 有一个公共不动点。进一步,如果 $\mathrm{Fix}(f)\cap\mathrm{Fix}(g)$ 中任何两个元素是可比较的,则 f 和 g 有唯一公共不动点。

证明　任取 $x_0\in X$,根据 ii)构造一个 X 中的序列$\{x_n\}$满足:

$$x_{2n}=fx_{2n+1},x_{2n+1}=gx_{2n+2},\forall n=0,1,2,\cdots \text{ 且 } x_0\sqsubseteq x_1\sqsubseteq x_2\sqsubseteq\cdots。$$

根据定理 4 的证明过程可知存在 $u\in X$ 使得单调递增序列$\{x_n\}$收敛于 u。

假设 iv)成立,则对任何自然数 n,$x_n\sqsubseteq gu$ 且 $g^2=1_X$。于是根据 i),

$$d(u,gu)\leqslant d(u,x_{2n+1})+d(x_{2n+1},gu)\leqslant$$

$$d(u,x_{2n+1})+\rho\left(\max\left\{d(fx_{2n+1},ggu),d(x_{2n+1},fx_{2n+1}),d(gu,ggu),\frac{d(x_{2n+1},ggu)+d(gu,fx_{2n+1})}{2}\right\}\right)=$$

$$d(u,x_{2n+1})+\rho\left(\max\left\{d(x_{2n},u),d(x_{2n+1},x_{2n}),d(gu,u),\frac{d(x_{2n+1},u)+d(gu,x_{2n})}{2}\right\}\right)。$$

令 $n\to\infty$,并根据 ρ 的上半连续性,由上式得到 $d(u,gu)\leqslant\rho(d(u,gu))$,因此根据$(\rho_2)$得到 $gu=u$。根据 ii),相对 u 存在 $y'\in X$ 使得 $u=fy'$且 $u\sqsubseteq y'$。根据 i)得到:

$$d(y',u)\leqslant\rho\left(\max\left\{d(fy',gu),d(y',fy'),d(u,gu),\frac{d(y',gu)+d(u,fy')}{2}\right\}\right)=\rho(d(y',u)),$$

再次根据(ρ_2)得到 $u=y'$,于是 $gu=u=fy'=fu$,这说明 u 是 f,g 的公共不动点。类似地,证明当 iii)成立时结论仍成立。唯一性的证明完全相同与定理 4 的证明,在此省略。　证毕

定理 11　设$(X,\sqsubseteq,d)$是偏序的完备的度量空间,$f,g:X\to X$ 是两个映射。如果下列条件 i)和 ii)及 iii)或 iv)成立:

i) 对任何可比较的 $x,y\in X$,$d(x,y)\leqslant\sigma\left(\max\left\{d(fx,gy),d(x,fx),d(y,gy),\dfrac{d(x,gy)+d(y,fx)}{2}\right\}\right)$且 σ 是上半连续;

ii) 对任何 $x\in X$ 存在 $y_1,y_2\in X$ 满足 $x=fy_1,x=gy_2$ 且 $x\sqsubseteq y_1$ 及 $x\sqsubseteq y_2$;

iii) $f^2=1_X$ 且当单调递增序列$\{x_n\}$收敛于 x 时 $x_n\sqsubseteq fx,\forall n=1,2,\cdots$;

iv) $g^2=1_X$ 且当单调递增序列$\{x_n\}$收敛于 x 时 $x_n\sqsubseteq gx,\forall n=1,2,\cdots$。

则 f 和 g 有一个公共不动点。进一步,如果 $\mathrm{Fix}(f)\cap\mathrm{Fix}(g)$ 中任何两个元素是可比较的,则 f 和 g 有唯一公共不动点。

定理 11 的证明方法完全相同于定理 10 证明,在此省略。

注 2　1) 定理 4～定理 11 中没有要求两个函数 ρ 和 σ 的连续性,但是定理 1～定理 3 中出现的函数都是连续的。因此本文中的结论一定程度上推广和改进了定理 1～定理 3 及相关结果。

2) 如果定理 4～定理 11 中的空间 X 是全序集,则保证不动点或公共不动点为唯一的附加条件是多余的。

3) 定理 10～定理 11 中的 f 和 g 不要求为连续的,因此与定理 1～定理 9 相比具有更广泛的应用价值。

参考文献：

[1] ĆIRIĆ L B.A generalization of Banach'contraction principle [J].Proc Am Math Soc,1974,45(2):267-273.

[2] NADLER S B.Multi-valued contraction mappings[J].Pacific J Math,1969,30:475-488.

[3] DAS K M,VISWANATHA N K.Common fixed point theorems for commuting maps on a metric space[J].Proc Am Math Soc,1979,77(3):369-373.

[4] JUNGCK G.Compatible mappings and common fixed points (2)[J].Internat J Math & Math Sci,1998,11(2):285-288.

[5] MIZOGUCHI N,TAKAHASHI W.Fixed point theorems for multi-mappings on complete metric spaces[J].J Math Anal Appl,1989,141:177-188.

[6] AMINI-HARANDI A.Fixed point theory for set-valued quasi-contraction maps in metric spaces[J].Appl Math Lett,2011,141:1791-1794.

[7] WU J R,LIU H Y.Common fixed point theorems for sequences of φ-type contraction set-valued mappings[J].Chin Quart J of Math,2009,24(4):504-510.

[8] LIU Z Q,LI X,CHO S Y.Fixed point theorems for mappings satisfying contractive conditions of integral type and applications[J/OL].Fixed Point Theory and Appl,2011:64 [2017-01-03].https://doi.org/10.1186/1687-1812-2011-64.

[9] KANEKO H,SESSA S.Fixed point theorems for compatible multi-valued and single-valued mappings[J].Internat J Math & Math Sci,1989,12(2):257-262.

[10] CHO S H,KIM M S.Fixed point theorems for general contractive multi-valued mappings[J].J Appl Math & Informatics,2009,27(1):343-350.

[11] ZHU L, ZHU C X,CHEN C F.Common fixed point theorems for fuzzy mappings in G-metric space[J/OL].Fixed Point Theory and Appl,2012:159[2017-01-03].https://doi.org/10.1186/1687-1812-2012-159.

[12] HARJANI J,SADARANGNI K.Fixed point theorems for weakly contraction mappings in partially ordered sets[J].Nonlinear Anal,2009,71:3403-3410.

[13] HARJANI J,SADARANGNI K.Generalized contractions in partially ordered metric spaces and applications to ordinary differential equations[J].Nonlinear Anal,2010,72:1-9.

[14] SU Y F,FENG Q S,ZHANG J L,et al.A new contraction mapping principle in partially ordered metric spaces and applications to ordinary differential equations[J/OL].Fixed Point Theory and Appl,2012:152[2017-01-03].https://doi.org/10.1186/1687-1812-2012-152.

[15] SHATANAWIL W,PITEA A,LAZOVIĆ R.Contraction conditions using comparison functions on b-metric spaces [J/OL].Fixed Point Theory and Appl,2014:135[2017-01-03].https://doi.org/10.1186/1687-1812-2014-135.

Common Fixed Points for Two Mappings with ρ or σ-Quasi-Contractions on Partially Ordered Metric Spaces

PIAO Yongjie

(Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji Jilin 133002, China)

Abstract: [**Purposes**]It is discussed that the existence problems of common fixed points for two mappings on partially ordered metric spaces. [**Methods**]Consider two mappings satisfying quasi-contractive conditions determined by two real functions ρ and σ on partially ordered real metrics. [**Findings**]Obtain the existence theorems of unique common fixed point under continuous or non-continuous conditions, and also give some fixed point theorems. [**Conclusions**]The obtained results extend and improve the corresponding conclusions in references.

Keywords: mapping ρ; mapping σ; quasi-contraction; common fixed point

(责任编辑　许　甲)