

修正 Helmholtz 方程的改进无单元 Galerkin 法分析*

宋 娅, 李小林

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】在改进移动最小二乘近似的基础上, 讨论了一种稳定化的改进移动最小二乘近似, 具有更好的数值稳定性和计算精度。【方法】将稳定化的改进移动最小二乘近似和修正 Helmholtz 方程的 Galerkin 积分弱形式相结合, 建立了修正 Helmholtz 方程混合边值问题的改进无单元 Galerkin 法, 并理论分析了在 Sobolev 空间中的误差。【结果】通过两个数值算例验证了算法的有效性和理论的正确性。【结论】误差随节点间距的减小而降低。

关键词:改进移动最小二乘近似; 改进无单元 Galerkin 法; 罚函数; 误差估计

中图分类号: O241.82

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2018)02-0087-06

在过去的半个世纪, 许多物理和工程问题的数值解是由基于网格方法如有限元法等来求解的。与网格方法不同, 无网格方法^[1]采用基于点的近似, 不需要在求解区域内对网格进行初始划分和重构, 不仅保证了计算的精度, 而且还降低了计算难度。

Belytschko 等人在 1994 年提出了无单元 Galerkin 法^[2]。它是一种不需要划分网格的数值方法, 只需要相关的节点信息, 降低了网格划分带来的困难, 提高了精度。无单元 Galerkin 法常用移动最小二乘近似^[3]来构造近似函数, 而移动最小二乘近似中涉及的法方程矩阵的条件数可能会变得很大^[4-5], 同时还需要对该矩阵求逆, 导致计算稳定性和计算精度下降。为了避免矩阵求逆, 文献[1,6]通过使用带权正交基函数, 提出了改进移动最小二乘近似, 并建立了相应的改进无单元 Galerkin 法。本文通过使用一种新的基函数^[4-5], 建立了改进移动最小二乘近似的稳定化算法, 比原有改进移动最小二乘近似具有更好的数值稳定性和计算精度。

文献[7-9]给出了移动最小二乘近似的误差估计, 文献[10]给出了改进移动最小二乘近似的误差估计, 文献[4,9]给出了无单元 Galerkin 法的误差估计。改进的无单元 Galerkin 方法在工程领域已经被广泛应用, 但相应的理论部分还需要进一步完善。

1 稳定化的改进移动最小二乘近似

设 Ω 是 \mathbf{R}^d ($d=1, 2, \dots$) 上的有界区域, 在 Ω 内选取 N 个节点 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ 。在改进移动最小二乘近似中, 取试函数

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m q_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)^\top \in \Omega \quad (1)$$

为定义在区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ ($d=1, 2, \dots$) 内的 $u(\mathbf{x})$ 的逼近函数。这里的基函数 $q_j(\mathbf{x})$ 是关于点集 $\{\mathbf{x}_i\}$ 带权 $\{w_i\}$ 正交, $w_i(\mathbf{x})$ 是权函数, m 是基函数的个数, $a_j(\mathbf{x})$ 是未知系数。

由 Schmidt 正交化过程, 有:

$$q_1(\mathbf{x}) = 1, q_j(\mathbf{x}) = p_j(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{(p_j, q_k)_x}{(q_k, q_k)_x} q_k(\mathbf{x}), j = 2, 3, \dots, m. \quad (2)$$

其中 $p_j(\mathbf{x}), j = 1, 2, \dots, m$, 是单项式基函数, 内积 $(f, g)_x$ 定义为 $(f, g)_x = \sum_{i \in \Lambda(\mathbf{x})} w_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}_i) g(\mathbf{x}_i)$, 这里, $\Lambda(\mathbf{x}) = \{I_1, I_2, \dots, I_\ell\}$ 表示影响域包含点 \mathbf{x} 的节点的全局编号。

* 收稿日期: 2017-01-04 修回日期: 2018-01-12 网络出版时间: 2018-03-23 15:54

资助项目: 国家自然科学基金面上项目(No.11471063); 重庆市基础科学与前沿技术研究重点项目(No. cstc2015jcyjBX0083)

第一作者简介: 宋娅, 女, 研究方向为微分方程的数值解法, E-mail: 425266498@qq.com; 通信作者: 李小林, 教授, E-mail: lxlmath@163.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180323.1554.028.html>

令泛函 $J = \sum_{i \in \Lambda(x)} w_i(x) \left[\sum_{j=1}^m p_j(x_i) a_j(x) - u_i \right]^2$ 取极值可得:

$$\mathbf{A}(x)\mathbf{a}(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{u}. \quad (3)$$

其中 $\mathbf{u} = [u_{I_1}, u_{I_2}, \dots, u_{I_\ell}]^T$, u_i 是 \mathbf{u} 在节点 x_i 处的值, 矩阵 $\mathbf{A}(x)$ 和 $\mathbf{B}(x)$ 的元素为:

$$\mathbf{A}_{ij}(x) = (q_i, q_j)_x, i, j = 1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

$$\mathbf{B}_{ji}(x) = w_{I_i}(x) q_j(x_{I_i}), j = 1, 2, \dots, m; i = 1, 2, \dots, \ell.$$

因为(4)式给出的基函数正交, 即 $\mathbf{A}_{ij}(x) = (q_i, q_j)_x = 0, i \neq j$, 所以由(3)式可得:

$$a_j(x) = \frac{\sum_{i \in \Lambda(x)} w_i(x) q_j(x_i) u_i}{(q_j, q_j)_x}, j = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

将(5)式代入(1)式得 $u(x) \approx u_h(x) = \sum_{i \in \Lambda(x)} \varphi_i(x) u_i = \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) u_i$, 其中形函数为:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} w_i(x) \sum_{j=1}^m \frac{q_j(x_i) q_j(x)}{(q_j, q_j)_x}, & i \in \Lambda(x) \\ 0, & i \notin \Lambda(x) \end{cases}, i = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

在改进移动最小二乘近似中, 通常选取 $p_j(x)$ 为常用的单项式基函数, 比如一维时, $p_j(x) = [1, x, x^2, \dots, x^{m-1}]$, 此时矩阵 $\mathbf{A}(x)$ 的条件数可估计为:

$$\text{cond}(\mathbf{A}(x)) = C_c h^{-2\hat{m}}. \quad (7)$$

其中 h 为节点间距, C_c 是与 h 无关的常数, \hat{m} 表示使用的基函数 $p_m(x)$ 的最大次数。(7)式表明, 条件数会随着节点间距的减小而急剧增大, 所以当节点间距较小时, (3)式给出的方程组存在严重的病态性, 导致计算误差增大, 从而出现结果不收敛、不稳定的情况。

为了提高稳定性, 选用基函数 $p_j^s(x)$ 来构造正交基函数 $q_j(x)$, 其中 $p_j^s(x) = p_j\left(\frac{x-x_e}{h}\right)$, $j = 1, 2, \dots, m$, x_e 为位于点 x 影响域中的点。类似地, 由文献[4-5]可得:

$$\text{cond}(\mathbf{A}^s(x)) = C_c^s. \quad (8)$$

其中 C_c^s 是与 h 无关的常数。(8)式表明, 用 $p_j^s(x)$ 来构造的改进移动最小二乘近似能够得到更精确、更稳定的结果。

2 修正 Helmholtz 方程混合边值问题的改进无单元 Galerkin 法

2.1 变分公式

考虑在 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ ($d = 1, 2, \dots$) 内的混合边界值问题:

$$\begin{cases} -\Delta u + k^2 u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ u = \bar{u}, & \text{在 } \Gamma_D \text{ 上,} \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u = \bar{q}, & \text{在 } \Gamma_R = \partial\Omega - \Gamma_D \text{ 上.} \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\partial u / \partial \mathbf{n}$ 为单位法向量 \mathbf{n} 的法向倒数, k 为波数。

由于改进的移动最小二乘近似的形函数不满足插值的性质, 所以原问题在 Γ_D 上的 Dirichlet 边界条件施加比较困难, 这里考虑罚函数法^[4]来解决这一问题。首先, 引入充分大的罚因子 α , 原混合问题可转化为近似问题。接着, 将近似问题转化为变分方程。设 $v \in H^1(\Omega)$, 同时在微分方程的两端乘以 v , 在 Ω 上作积分并利用第一格林公式有:

$$\int_{\Omega} \nabla u_a \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\Gamma} v \frac{\partial u_a}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} k^2 u_a v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega. \quad (10)$$

由于 $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_R$, 则有:

$$\int_{\Omega} \nabla u_a \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Omega} k^2 u_a v \, d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_D} u_a v \, d\Gamma + \int_{\Gamma_R} \sigma u_a v \, d\Gamma = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_D} \bar{u}_a v \, d\Gamma + \int_{\Gamma_R} \bar{q} v \, d\Gamma.$$

记上式左端等于 $a_\alpha(u_\alpha, v)$, 右端等于 (f, v) 。这里 $\forall v \in H^1(\Omega)$, 并且得到变分方程为:

$$a_\alpha(u_\alpha, v) = (f, v). \quad (11)$$

令 $V_h(\Omega) = \text{span}\{\varphi_i, 1 \leq i \leq N\}$, 其中 φ_i 为改进移动最小二乘近似构造的形函数, 可得到改进无单元 Galerkin 法的数值解。故(11)式可近似为 $a_\alpha(u_h, v) = (f, v), \forall v \in V_h(\Omega)$, 其中 φ_i 为改进移动最小二乘近似构造的形函数, 可得到改进无单元 Galerkin 法的数值解。故(11)式可近似为:

$$a_\alpha(u_h, v) = (f, v), \forall v \in V_h(\Omega).$$

2.2 离散

为了得到最终的离散方程组, 由 v 的任意性, 取 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ 为 v , 将形函数代入变分方程得

$$\sum_{i=1}^N a(\varphi_i, \varphi_j) u_i = (f, \varphi_j), i, j = 1, 2, \dots, N, \text{ 即:}$$

$$(K + \alpha G)u = f + ab. \quad (12)$$

其中 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T, [K]_{ij} = \int_\Omega \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega + \int_\Omega k^2 \varphi_i \varphi_j d\Omega + \int_{\Gamma_R} \sigma \varphi_i \varphi_j d\Gamma, [G]_{ij} = \alpha \int_{\Gamma_D} \varphi_i \varphi_j d\Gamma, [f]_i = \int_\Omega f \varphi_i d\Omega + \int_{\Gamma_R} \bar{q} \varphi_i d\Gamma, [b]_i = \alpha \int_{\Gamma_D} \bar{u} \varphi_i d\Gamma, i, j = 1, 2, \dots, N$ 。

3 误差估计

定理 1 设 $u \in H^{r+1}(\Omega)$ 为问题(10)的解析解, u_h 为用改进无单元 Galerkin 法得到的数值解, 则有如下误差:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{\tilde{p}-1} \|u\|_{H^{\tilde{p}}(\Omega)}, \Gamma_D = \emptyset, \quad (13)$$

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\tilde{p}-1} \|u\|_{H^{\tilde{p}}(\Omega)}, \Gamma_D = \emptyset, \quad (14)$$

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C(h^{\tilde{p}-1} + \alpha^{-1} + \alpha^{1/2} h^{\tilde{p}}), \Gamma_D \neq \emptyset. \quad (15)$$

其中 $\tilde{p} = \min(r, \hat{m}) + 1, \hat{m}$ 为改进移动最小二乘近似中基函数的最大次数, C 是一个与 h 无关的常数。

证明 对于定义的双线性形式 $a_\alpha(\cdot, \cdot)$, 让:

$$\|v\|_\alpha = \sqrt{a_\alpha(v, v)} = \sqrt{\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v d\Omega + \int_\Omega k^2 v v d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_D} v v d\Gamma + \int_{\Gamma_R} \sigma v v d\Gamma}.$$

由 $Mu - u_h \in V_h(\Omega)$ 可以得到:

$$\|u - u_h\|_\alpha^2 = a_\alpha(u - u_h, u - u_h) = a_\alpha(u - u_h, u - Mu) \leq C_\alpha \|u - u_h\|_\alpha \|u - Mu\|_\alpha.$$

由文献[4]得:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{\tilde{p}-1} \|u\|_{H^{\tilde{p}}(\Omega)} \leq \tilde{C}(h^{\tilde{p}-1} \|u\|_{H^{\tilde{p}}(\Omega)} + \alpha^{1/2} h^{\tilde{p}} \|u\|_{H^{\tilde{p}}(\Omega)}). \quad (16)$$

当 $\Gamma_D = \emptyset$ 时, Dirichlet 边界条件缺失, 让 $\alpha = 0$, (13) 式得证。

接下来证明(14)式。让 $\omega \in H^1(\Omega)$ 是

$$a(\omega, v) = \int_\Omega (u - u_h) v d\Omega, \forall v \in H^1(\Omega) \quad (17)$$

的解, 并且令 $v = u - u_h$, 有 $a(\omega, u - u_h) = \int_\Omega (u - u_h)^2 d\Omega$ 。则:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_\Omega (u - u_h)^2 d\Omega = a(\omega, u - u_h) = a(\omega - Mu, u - u_h) \leq \\ &C \| \omega - Mu \|_{H^1(\Omega)} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{m+1} \| \omega \|_{H^2(\Omega)} \|u\|_{H^{\tilde{p}}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (18)$$

由文献[4]得:

$$\| \omega \|_{H^2(\Omega)} \leq C \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}. \quad (19)$$

将(19)式代入(18)式中可得到(14)式。

最后证明(15)式。当 $\Gamma_D \neq \emptyset$ 时, 让 $\omega \in H^1(\Omega)$ 是

$$\begin{cases} -\Delta\omega + k^2\omega = 0, x \in \Omega, \\ \omega = \frac{\partial u}{\partial n}, x \in \Gamma_D, \\ \omega = 0, x \in \Gamma_R \end{cases} \quad (20)$$

的解,记 $u(x) = u_a(x) + \alpha^{-1}\omega(x) + \mu(x)$, 则

$$a_\alpha(u, v) = a_\alpha(u_a, v) + \alpha^{-1}a_\alpha(\omega, v) + a_\alpha(\mu, v), \quad (21)$$

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u_a - u_h\|_{H^1(\Omega)} + \alpha^{-1}\|\omega\|_{H^1(\Omega)} + \|\mu\|_{H^1(\Omega)}. \quad (22)$$

应用第一格林公式有:

$$a_\alpha(u, v) = -\int_\Omega \Delta uv dx + \int_\Omega k^2 uv d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_D} uv d\Gamma + \int_{\Gamma_R} \sigma uv d\Gamma + \int_{\Gamma_R} \frac{\partial u}{\partial n} v dx + \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v dx. \quad (23)$$

调用问题(20)有:

$$a_\alpha(u_a, v) = \int_\Omega f v dx + \int_{\Gamma_D} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial n} v dx + \alpha \int_{\Gamma_D} \bar{u} v d\Gamma + \int_{\Gamma_R} \bar{q} v dx, \quad (24)$$

$$a_\alpha(\omega, v) = \int_\Omega \nabla\omega \cdot \nabla v d\Omega + \int_\Omega k^2 \omega v d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma. \quad (25)$$

将(23),(24),(25)式代入(21)式可求得: $a_\alpha(\mu, v) = -\alpha^{-1} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \Delta u \Delta \omega d\Omega - \alpha^{-1} \int_\Omega k^2 \omega v d\Omega$. 让 $v = u$, 有:

$$\|\mu\|_{H^1(\Omega)} \leq C_*^{-1} \|\mu\|_\alpha \leq C\alpha^{-1} \|\omega\|_{H^1(\Omega)}. \quad (26)$$

最后将(16),(26)式代入(22)式可得到(15)式。

证毕

定理 1 是由罚函数法处理 Dirichlet 边界条件导致的误差,并且罚因子太大或太小都会使误差增大。要使误差估计达到最优的收敛率,则取 $\alpha = C_a h^{-2(\min\{r, \hat{m}\} + 1)/3}$, 其中 C_a 是一个常数。特别地,当 $r \geq 2$ 且 $\hat{m} = 2$ 时,有 $\alpha = C_a h^{-2}$ 。此时,改进无单元 Galerkin 法的数值解在 $H^1(\Omega)$ 空间中有最优收敛阶 h^2 。

4 数值算例

算例 1 考虑边值问题^[13]: $\begin{cases} -\Delta u + u = \cos\pi x_1 \cos\pi x_2, \text{在 } \Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \text{ 内} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \text{在 } \Gamma = \partial\Omega \text{ 上} \end{cases}$ 。该问题的解析解为 $u(x_1, x_2) = \frac{\cos\pi x_1 \cos\pi x_2}{2\pi^2 + 1}$ 。

$$= \frac{\cos\pi x_1 \cos\pi x_2}{2\pi^2 + 1}.$$

图 1 给出了改进无单元 Galerkin 法和文献[13]中的多尺度方法在 L^2 范数下的误差和收敛情况。在数值实验中选择 $\hat{m} = 2$ 。由图 1 可知,随着节点间距 h 的减少,改进无单元 Galerkin 法的收敛性比文献[13]中的多尺度方法的收敛效果更好,并且改进的无单元 Galerkin 法已经达到 3 阶收敛,这与定理 1 给出的理论误差估计相吻合,而多尺度方法约为 1 阶收敛。

算例 2 在考虑如下混合边值问题^[14]:

$$\begin{cases} -\Delta u + k^2 u = 0, \text{在 } \Omega = (0, 1)^2 \text{ 内} \\ u = \bar{u}, \text{在 } \Gamma_D \text{ 上} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}, \text{在 } \Gamma_R \text{ 上} \end{cases},$$

其中 $\Gamma_D = \{x_1 = 0, x_2 \in [0, 1]\} \cup \{x_2 = 0, x_1 \in [0, 1]\}$,

$\Gamma_R = \{x_1 = 1, x_2 \in [0, 1]\}$, $k = \pi, \bar{u}$ 和 \bar{q} 的值由解析解来取值,其解析解为 $u(x_1, x_2) = e^{(\sqrt{2}k/2)(x_1 - x_2)}$ 。

计算时,采用了 21×21 个等距节点。图 2 给出了 $u, \partial u / \partial x_1$ 和 $\partial u / \partial x_2$ 的精确解和数值解,并且两者的吻合

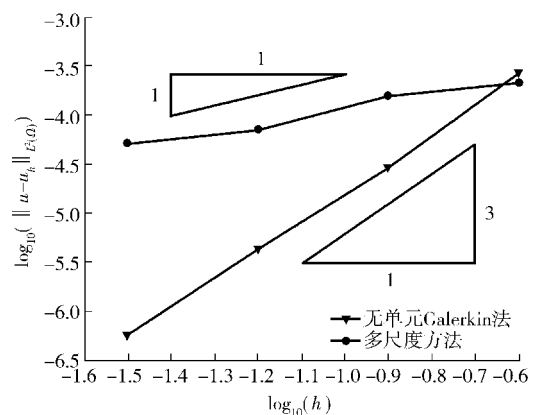


图 1 改进无单元 Galerkin 法与多尺度方法的收敛性
Fig. 1 Convergence of improving free-element Galerkin method and multiscale methods

程度非常好。

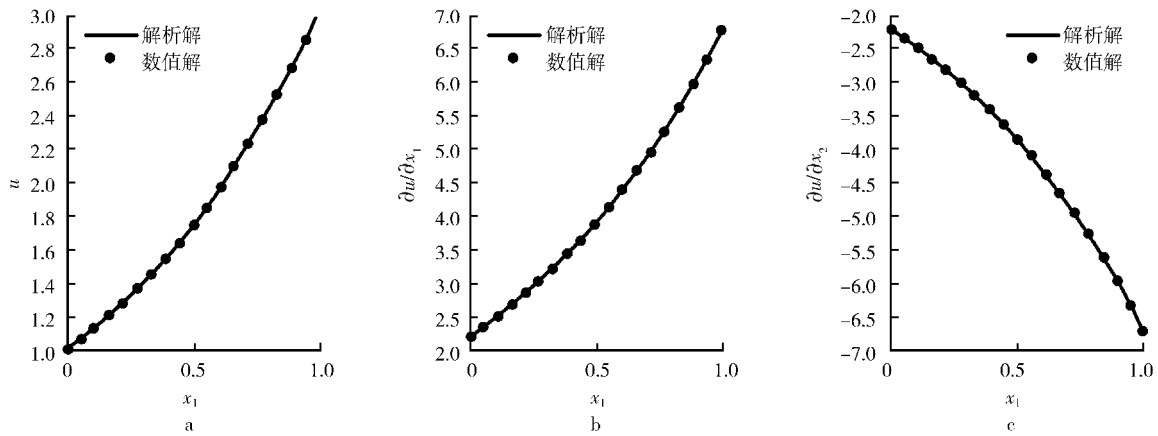


图 2 $u, \partial u/\partial x_1, \partial u/\partial x_2$ 在 $x_2=0.5x_1$ 上的数值解和解析解

Fig. 2 Numerical and analytical solutions of $u, \partial u/\partial x_1$, and $\partial u/\partial x_2$ along $x_2=0.5x_1$

为了讨论罚因子 α 对误差的影响,图 3 展示了 α 与误差两者之间的关系。在此分析中,分别使用了 $11 \times 11, 21 \times 21, 41 \times 41$ 和 81×81 个等距点。不难发现,罚因子太大或者太小都会使误差增大。对于罚因子很小的情形,定理 1 证明中的(22)式右端的理论收敛率为 α^{-1} ,与图 3 左端所示的实验值相吻合。对于罚因子很大的情形,定理 1 表明误差随 α 增加而增加,并且图 3 右端的误差收敛率与理论结果一致。

由图 3 可以看出 h 和罚因子 α 有关,取 $\alpha=C_\alpha h^{-2}$ 。为了得到系数 C_α 和收敛性的关系,图 4 展示了 4 种不同 C_α 的情况下的误差。通过观察图 4 可以看出实验得出的收敛率已经达到了 2,满足理论分析结果。

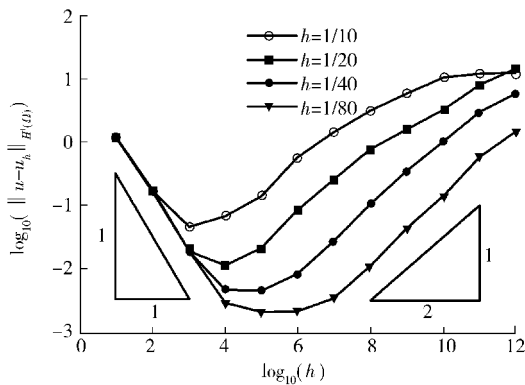


图 3 改进无单元 Galerkin 法关于 α 的收敛性

Fig. 3 Convergence of improving free-element Galerkin method with respect to α

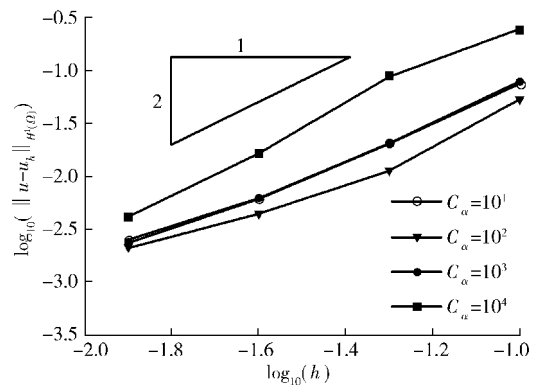


图 4 改进无单元 Galerkin 法关于 h 的收敛性

Fig. 4 Convergence of improving free-element Galerkin method with respect to h

参考文献:

[1] 程玉民.无网格方法[M].北京:科学出版社,2015.
CHENG Y M.Meshless method[M].Beijing:Science Press, 2015.

[2] BELYTSCHKO T,LU Y Y,GU L.Element-free Galerkin methods[J].International Journal for Numerical Methods in Engineering,1994,37(2):229-256.

[3] LANCASTER P,SALKAUSKAS K.Surface generated by moving least square methods[J].Mathematics of Computation,1981,37(155):141-141.

[4] LI X L,LI S L.On the stability of the moving least squares approximation and the element-free Galerkin method[J].Comput-

ers & Mathematics with Applications,2016,72(6):1515-1531.

[5] LI X L,WANG Q Q.Analysis of the inherent instability of the interpolating moving least squares method when using improper polynomial bases [J]. Eng Anal Bound Elem, 2016,73:21-34.

[6] 陈美娟,程玉民.改进的移动最小二乘法[J].力学季刊, 2003,24(2):266-272.
CHEN M J,CHENG Y M.Improved moving least-square method[J].Mechanics Quarterly,2003,24(2):266-272.

[7] LI X L,ZHU J L.A Galerkin boundary node method and its convergence analysis[J].Journal of Computational & Ap-

- plied Mathematics, 2009, 230(1):314-328.
- [8] LI X L. Meshless Galerkin algorithms for boundary integral equation with moving least square approximation[J]. Applied Numerical Mathematics, 2011, 61(12):1237-1256.
- [9] LI X L. Error estimates for the moving least square approximation and the element free Galerkin method in n -dimensional spaces[J]. Applied Numerical Mathematic, 2016, 99(C):77-97.
- [10] LI X L, CHEN H, WANG Y. Error analysis in sobolev spaces for the improved moving least-square approximation and the improved element-free Galerkin method[J]. Applied Mathematics & Computation, 2015, 262:56-78.
- [11] HE Z, LI P. A meshless Galerkin least-square method for the Helmholtz equation [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2011, 35(6):868-878.
- [12] SULEAU S, BOUILLARD P. One-dimensional dispersion analysis for the element-free Galerkin method for the Helmholtz equation[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 47(6):1169-1188.
- [13] CHERNIH A, GIA Q T L. Multiscale methods with compactly supported radial basis functions for Galerkin approximation of elliptic PDEs[J]. IMA Journal of Numerical Analysis, 2014, 34(2):569-591.
- [14] CHEN W, ZHANG J Y, FU Z J. Singular boundary method for modified Helmholtz equations[J]. Engineering Analysis with Boundry Elements, 2014, 44:112-119.

Analysis of Modified Helmholtz Equation with the Improved Element-Free Galerkin Method

SONG Ya, LI Xiaolin

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] On the basis of the improved moving least square approximation, a stabilized improved moving least squares approximation is discussed to yield results with better computational stability and precision. [Methods] Combining the improved moving least square approximation with Galerkin weak form, the improved element-free Galerkin method is established for the modified Helmholtz equation with mixed boundary value problem. Error analysis of the Galerkin method is provided theoretically in Sobolev spaces. [Findings] Two numerical examples are provided to demonstrate the effectiveness of the method and the correctness of the theoretical analysis. [Conclusions] The errors of the method decrease monotonously as the nodal spacing decreases.

Keywords: improved moving least square approximation; improved element-free Galerkin method; penalty function method; error analysis

(责任编辑 黄 颖)