DOI:10.11721/cqnuj20180216

强一致收敛下的 Li-Yorke 混沌和分布混沌*

向伟杰，金渝光

(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】研究混沌中序列映射与极限映射的关系。【方法】在超空间上，引入强一致收敛、Li-Yorke 混沌、Li-Yorke-δ 混沌和分布混沌的定义，然后利用强一致收敛的定义去讨论 Li-Yorke 混沌、Li-Yorke-δ 混沌和分布混沌中的序列映射与极限映射的关系。【结果】若超空间上的序列映射是 Li-Yorke 混沌(Li-Yorke-δ 混沌、分布混沌)且 Li-Yorke 混沌集(δ 混沌集、分布混沌集)的所有交是不可数集，那么超空间上的极限映射就为 Li-Yorke 混沌(Li-Yorke-δ 混沌、分布混沌)；若超空间上的序列映射是 Li-Yorke 混沌且满足两个条件，则超空间上的极限映射是 Li-Yorke-δ 混沌。【结论】在超空间上，强一致收敛的条件下，序列映射上的混沌与极映射上的混沌具有保持性。

关键词:强一致收敛；Li-Yorke 混沌；δ 混沌集；分布混沌

中图分类号:O19　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2018)02-0093-05

1975 年 Li 和 Yorke[1]第一次给出了混沌的严格定义。从此混沌的研究对动力系统的研究产生了深远的影响。2002 年黄文和叶向东[2]证明了 Devaney 混沌一定是 Li-Yorke 混沌，Li-Yorke 混沌不一定是 Devaney 混沌。2009 年文献[3]探讨了 Devaney 混沌蕴涵着分布混沌序列。2010 年，文献[4]证明了 Li-Yorke-δ 混沌与分布-δ 混沌是等价的。1984 年 Klein[5]提出了超空间的概念。2003 年 Román-Flores[6]定义了超映射和超空间系统，并对原系统和超空间系统之间的动力性状做了大量的研究。2010 年文献[7]证明了在超空间上 Devaney 混沌的等价条件。2015 年文献[8]证明了在超空间上强一致收敛的条件下，序列系统的 Devaney 混沌具有保持性。根据以上混沌之间的关系，利用强一致收敛的条件，发现超空间上序列系统的混沌与极限系统的混沌有着紧密的联系。

1 预备知识

下面给出相关定义和符号。在本文中 $K(X)$是具有 Hausdorff 度量 H 诱导的超空间，$\overline{f}$ 为 $K(X)$上的连续自映射。$\overline{f}^0=id$，$\overline{f}^1=\overline{f}$，$\overline{f}^2=\overline{f}\circ\overline{f}$，…，$\overline{f}^n=\overline{f}^{n-1}\circ\overline{f}$，其中$\circ$表示映射的复合，$\mathbf{N}^+$ 表示正整数。

定义 1[9]　设(X,d)是度量空间，$K(X)$表示 X 上所有非空紧子集构成的集合，令 $V(S_1,S_2,\cdots,S_n)=\{F\in K(X):F\subset\bigcup_{i=1}^{n}S_i$ 且 $F\cap S_i\neq\varnothing,1\leqslant i\leqslant n\}$，其中 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 是 X 上的 n 个非空开集。则所有形如 $V(S_1,S_2,\cdots,S_n)$的集合构成了空间 $K(X)$的某个拓扑空间的基，由这个基生成的拓扑称为 $K(X)$上的 Vietoris 拓扑，所得拓扑空间 $K(X)$称为(由 X 生成的)超空间，相应地，也称 X 为基空间。

定义 $K(X)$上由 d 诱导的 Hausdorff 度量如下：任意的 $A,B\in K(X)$，$H(A,B)=\max\{\sup\limits_{a\in A}d(a,B),\sup\limits_{b\in B}d(b,A)\}$，其中 $d(x,A)=\inf\limits_{a\in A}d(x,a)$。

由文献[5]不难验证由 $K(X)$上的 Hausdorff 度量诱导的拓扑正是 $K(X)$上的 Vietoris 拓扑，且 X 紧致当且仅当 $K(X)$紧致。

设 $f:X\to X$ 连续。令 $\overline{f}:K(X)\to K(X)$定义为 $\overline{f}(A)=\{f(a):a\in A\subset X\}$，显然 $\overline{f}$ 连续。这说明任何系统(X,f)都诱导系统$(K(X),\overline{f})$。用 f 表示(X,f)的连续映射，$\overline{f}$ 表示由 f 诱导的超空间 $K(X)$上的连续映射，称$(K(X),\overline{f})$为超空间系统。

* 收稿日期:2016-12-15　　修回日期:2017-11-27　　网络出版时间:2018-03-23　15:54

资助项目:国家自然科学基金(No.11471061)；2013 年重庆市高校创新团队建设计划(No.KJPB201308)

第一作者简介:向伟杰，女，研究方向为拓扑动力系统，E-mail:1564552658@qq.com；通信作者:金渝光，教授，E-mail:tsgjyg@aliyun.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180323.1554.030.html

定义 2[8] 设$(K(X),H)$是 Hausdorff 度量 H 诱导的超空间,对每一个 $n\in\mathbf{N}^+$,$\overline{f}_n$ 是 $K(X)$上的一个连续自映射。若对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $n_0\in\mathbf{N}^+$,使得当 $n>n_0$ 时,对任意的$\{x\}\in K(X)$及 $l\in\mathbf{N}^+$,有 $H(\overline{f}_n^l(\{x\}),\overline{f}^l(\{x\}))<\varepsilon$,则称 $\overline{f}_n$ 强一致收敛到 $\overline{f}$,记作 $\overline{f}_n\xrightarrow{s}\overline{f}$。

下面把度量空间引入到超空间,分别定义超空间上的 Li-Yorke 混沌、Li-Yorke-δ 混沌和分布混沌。

定义 3 设 $\overline{f}$ 是超空间$(K(X),H)$到自身的连续映射。如果任取$\{x\},\{y\}\subset Y$ 且$\{x\}\neq\{y\}$,有:

$$\liminf_{m\to\infty} H(\overline{f}^m(\{x\}),\overline{f}^m(\{y\}))=0,\limsup_{m\to\infty} H(\overline{f}^m(\{x\}),\overline{f}^m(\{y\}))>0,$$

则称 $Y\subset K(X)$为 $\overline{f}$ 的 Li-Yorke 混沌集。如果 $\overline{f}$ 存在一个不可数的 Li-Yorke 混沌集,则称 $\overline{f}$ 为 Li-Yorke 混沌。

定义 4 设 $\overline{f}$ 是超空间$(K(X),H)$到自身的连续映射。如果存在 $\delta>0$,对任意的$\{x\},\{y\}\subset Y$ 且$\{x\}\neq\{y\}$满足:$\liminf\limits_{m\to\infty} H(\overline{f}^m(\{x\}),\overline{f}^m(\{y\}))=0$,$\limsup\limits_{m\to\infty} H(\overline{f}^m(\{x\}),\overline{f}^m(\{y\}))>\delta$,则称 $Y\subset K(X)$为 $\overline{f}$ 的 δ 混沌集。如果 $\overline{f}$ 为 Li-Yorke-δ 混沌,那么 $\overline{f}$ 就有一个不可数的 δ 混沌集。

定义 5 设 $\overline{f}$ 是超空间$(K(X),H)$到自身的连续映射,$\{x\},\{y\}\subset K(X)$。对任何 $t>0$ 以及 $m\in\mathbf{N}^+$,令 $\xi_m(\overline{f},\{x\},\{y\},t)=\#\{i\mid H(\overline{f}^i(\{x\}),\overline{f}^i(\{y\}))<t,0\leqslant i<m\}$,其中$\#\{\cdot\}$表示集合的基数。设

$$F(\overline{f},\{x\},\{y\},t)=\liminf_{m\to\infty}\frac{1}{m}\xi_m(\overline{f},\{x\},\{y\},t),F^*(\overline{f},\{x\},\{y\},t)=\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{m}\xi_m(\overline{f},\{x\},\{y\},t),$$

如果对任意的$\{x\},\{y\}\subset Y$ 且$\{x\}\neq\{y\}$满足:1) 存在 $\delta>0$,使得 $F(\overline{f},\{x\},\{y\},\delta)=0$;2) 对任意 $t>0$,$F^*(\overline{f},\{x\},\{y\},t)=1$,则称 $Y\subset K(X)$为 $\overline{f}$ 的分布混沌集。如果 $\overline{f}$ 有一个不可数的分布混沌集,则称 $\overline{f}$ 为分布混沌。

2 主要定理

定理 1 设$(K(X),H)$是 Hausdorff 度量 H 诱导的超空间,$n\in\mathbf{N}^+$,$\overline{f}_n:K(X)\to K(X)$是连续映射,$\overline{f}_n\xrightarrow{s}\overline{f}$。若 S_n 是 $\overline{f}_n$ 的 Li-Yorke 混沌集,$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}S_n$ 是不可数集,则 $\overline{f}$ 是 Li-Yorke 混沌。

证明 令 $S=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}S_n$,从而 S 是 $\overline{f}$ 的不可数集。取$\{x\},\{y\}\subset S$,$\{x\}\neq\{y\}$。因为 S_n 是 $\overline{f}_n$ 的 Li-Yorke 混沌集,所以有$\limsup\limits_{m\to\infty} H(\overline{f}_n^m(\{x\}),\overline{f}_n^m(\{y\}))>0$,$\liminf\limits_{m\to\infty} H(\overline{f}_n^m(\{x\}),\overline{f}_n^m(\{y\}))=0$。

不妨设$\limsup\limits_{m\to\infty} H(\overline{f}_n^m(\{x\}),\overline{f}_n^m(\{y\}))=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $n_1\in\mathbf{N}^+$,使得当 $m>n_1$ 时,有 $H(\overline{f}_n^m(\{x\}),\overline{f}_n^m(\{y\}))<\dfrac{\varepsilon}{2}+\varepsilon=\dfrac{3}{2}\varepsilon$。因为 $\overline{f}_n\xrightarrow{s}\overline{f}$,所以对上述的 $\varepsilon>0$,存在 $n_2\in\mathbf{N}^+$,当 $n>n_2$ 时,对上述的 m,$\{x\}$,$\{y\}$有 $H(\overline{f}_n^m(\{x\}),\overline{f}^m(\{x\}))<\dfrac{\varepsilon}{4}$,$H(\overline{f}_n^m(\{y\}),\overline{f}^m(\{y\}))<\dfrac{\varepsilon}{4}$。

取 $n_0=\max\{n_1,n_2\}$,当 $m,n>n_0$ 时,有

$$H(\overline{f}^m(\{x\}),\overline{f}^m(\{y\}))\leqslant H(\overline{f}^m(\{x\}),\overline{f}_n^m(\{x\}))+H(\overline{f}_n^m(\{x\}),\overline{f}_n^m(\{y\}))+H(\overline{f}_n^m(\{y\}),\overline{f}^m(\{y\}))<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{3}{2}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{4}=2\varepsilon。$$

因此对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $n_0\in\mathbf{N}^+$,使得当 $m>n_0$ 时,有 $H(\overline{f}^m(\{x\}),\overline{f}^m(\{y\}))<\varepsilon+\varepsilon$。故有

$$\limsup_{m\to\infty} H(\overline{f}^m(\{x\}),\overline{f}^m(\{y\}))=\varepsilon>0。$$

取 $n=n_0+1$,由$\liminf\limits_{m\to\infty} H(\overline{f}_{n_0+1}^m(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^m(\{y\}))=0$ 可知,对上述的 $\varepsilon>0$,存在一组序列$\{m_k\}(k=1,2,\cdots)$,使得 $H(\overline{f}_{n_0+1}^{m_k}(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^{m_k}(\{y\})<\dfrac{\varepsilon}{2}$。此时还有 $H(\overline{f}_{n_0+1}^{m_k}(\{x\}),\overline{f}^{m_k}(\{x\}))<\dfrac{\varepsilon}{4}$,$H(\overline{f}_{n_0+1}^{m_k}(\{y\}),\overline{f}^{m_k}(\{y\}))<\dfrac{\varepsilon}{4}$。

于是,$H(\overline{f}^{m_k}(\{x\}),\overline{f}^{m_k}(\{y\}))\leqslant H(\overline{f}^{m_k}(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^{m_k}(\{x\}))+H(\overline{f}_{n_0+1}^{m_k}(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^{m_k}(\{y\}))+H(\overline{f}_{n_0+1}^{m_k}(\{y\}),\overline{f}^{m_k}(\{y\}))<\varepsilon$。因此对任意的 $\varepsilon>0$,存在一组序列$\{m_k\}(k=1,2,\cdots)$,使得 $H(\overline{f}^{m_k}(\{x\}),$

$\overline{f}^{m_k}(\{y\}))<\varepsilon$。故有$\lim\limits_{m\to\infty}\inf H(\overline{f}^{m}(\{x\}),\overline{f}^{m}(\{y\}))=0$。

综上所述，$\overline{f}$ 是 Li-Yorke 混沌。　　证毕

另由定义可知，每个 δ 混沌集一定是 Li-Yorke 混沌集，因此得到推论 1。

推论 1　设$(K(X),H)$是 Hausdorff 度量 H 诱导的超空间，$n\in\mathbf{N}^+$，$\overline{f}_n:K(X)\to K(X)$是连续映射，$\overline{f}_n\xrightarrow{s}\overline{f}$。若 S_n 是 $\overline{f}_n$ 的 δ 混沌集，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}S_n$ 是不可数集，则 $\overline{f}$ 是 Li-Yorke 混沌。

推论 2　设$(K(X),H)$是 Hausdorff 度量 H 诱导的超空间，$n\in\mathbf{N}^+$，$\overline{f}_n:K(X)\to K(X)$是连续映射，$\overline{f}_n\xrightarrow{s}\overline{f}$。若 S_n 是 $\overline{f}_n$ 的 Li-Yorke 混沌集，且满足：

1）$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}S_n$ 是不可数集；

2）任意的$\{x\}$，$\{y\}\subset\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}S_i$，$\{x\}\neq\{y\}$，有$\inf\limits_{n\in z_+}\lim\limits_{m\to\infty}\sup H(\overline{f}_n^{m}(\{x\}),\overline{f}_n^{m}(\{y\}))=a>0$。

则 $\overline{f}$ 为 Li-Yorke-δ 混沌。

证明　由定理 1 可得 $\overline{f}$ 是 Li-Yorke 混沌，下证 $\overline{f}$ 是 Li-Yorke-δ 混沌。只需找到 δ 使得

$$\limsup_{m\to\infty} H(\overline{f}^{m}(\{x\}),\overline{f}^{m}(\{y\}))>\delta>0。$$

令 $S=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}S_n$，从而 S 是 $\overline{f}$ 的不可数集。任取$\{x\}$，$\{y\}\subset S\subset S_n$，$\{x\}\neq\{y\}$。由 $\overline{f}_n\xrightarrow{s}\overline{f}$，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in\mathbf{N}^+$，当 $n>n_0$ 时，对任意的 $l\in\mathbf{N}^+$ 和上述的$\{x\}$，$\{y\}$有

$$H(\overline{f}_n^{l}(\{x\}),\overline{f}^{l}(\{x\}))<\varepsilon,H(\overline{f}_n^{l}(\{y\}),\overline{f}^{l}(\{y\}))<\varepsilon。$$

取 $n=n_0+1$，因为$\lim\limits_{m\to\infty}\sup H(\overline{f}_{n_0+1}^{m}(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^{m}(\{y\}))\geqslant\inf\limits_{n\in z_+}\limsup\limits_{m\to\infty} H(\overline{f}_n^{m}X(\{x\}),\overline{f}_n^{m}(\{y\}))$，所以

$$\limsup_{m\to\infty} H(\overline{f}_{n_0+1}^{m}(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^{m}(\{y\}))\geqslant a。$$

由于$\frac{a}{2}<a$，则对任意的 $N\in\mathbf{N}^+$，存在 $m_0>N$，使得 $H(\overline{f}_{n_0+1}^{m_0}(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^{m_0}(\{y\}))>\frac{a}{2}$。令 $\varepsilon=\frac{a}{6}$，$l=m_0$，则有 $H(\overline{f}_{n_0+1}^{m_0}(\{x\}),\overline{f}^{m_0}(\{x\}))<\frac{a}{6}$，$H(\overline{f}_{n_0+1}^{m_0}(\{y\}),\overline{f}^{m_0}(\{y\}))<\frac{a}{6}$。

于是得到

$$H(\overline{f}_{n_0+1}^{m_0}(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^{m_0}(\{y\}))\leqslant$$
$$H(\overline{f}_{n_0+1}^{m_0}(\{x\}),\overline{f}^{m_0}(\{x\}))+H(\overline{f}^{m_0}(\{x\}),\overline{f}^{m_0}(\{y\}))+H(\overline{f}^{m_0}(\{y\}),\overline{f}_{n_0+1}^{m_0}(\{y\}))。$$

将各项估值代入上式可得$\frac{a}{2}<\frac{a}{3}+H(\overline{f}^{m_0}(\{x\}),\overline{f}^{m_0}(\{y\}))$，从而有$\frac{a}{6}<H(\overline{f}^{m_0}(\{x\}),\overline{f}^{m_0}(\{y\}))$成立。

综上所述，对任意的 $N\in\mathbf{N}^+$，存在 $m_0>N$，使得$\frac{a}{6}<H(\overline{f}^{m_0}(\{x\}),\overline{f}^{m_0}(\{y\}))$。故存在 $\delta=\frac{a}{6}$，使得

$$\limsup_{m\to\infty} H(\overline{f}^{m}(\{x\}),\overline{f}^{m}(\{y\}))>\delta>0。$$

证毕

定理 2　设$(K(X),H)$是 Hausdorff 度量 H 诱导的超空间，$n\in\mathbf{N}^+$，$\overline{f}_n:K(X)\to K(X)$是连续映射，$\overline{f}_n\xrightarrow{s}\overline{f}$。若 S_n 是 $\overline{f}_n$ 的 δ 混沌集，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}S_n$ 是不可数集，则 $\overline{f}$ 是 Li-Yorke-δ 混沌。

证明　由推论 1 可得 $\overline{f}$ 是 Li-Yorke 混沌，下证 $\overline{f}$ 是 Li-Yorke-δ 混沌，只需找到 δ 使得

$$\limsup_{m\to\infty} H(\overline{f}^{m}(\{x\}),\overline{f}^{m}(\{y\}))>\delta>0。$$

令 $S=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}S_n$，则 S 是 $\overline{f}$ 的不可数集。任取$\{x\}$，$\{y\}\subset S\subset S_n$，$\{x\}\neq\{y\}$。因为 S_n 是 $\overline{f}_n$ 的 δ 混沌集，所以存在 $\delta>0$，对上述$\{x\}$和$\{y\}$有$\lim\limits_{m\to\infty}\sup H(\overline{f}_n^{m}(\{x\}),\overline{f}_n^{m}(\{y\}))>\delta>0$。取 $n=n_0+1$，对于$\lim\limits_{m\to\infty}\sup H(\overline{f}_{n_0+1}^{m}(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^{m}(\{y\}))>\delta$，由于$\frac{\delta}{2}<\delta$，所以对任意的 $N\in\mathbf{N}^+$，存在 $m_0>N$，使得 $H(\overline{f}_{n_0+1}^{m_0}(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^{m_0}(\{y\}))>\frac{\delta}{2}$。又因

为 $\overline{f}_n \xrightarrow{s} \overline{f}$,则对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $n_0\in\mathbf{N}^+$,当 $n>n_0$ 时,对任意的 $l\in\mathbf{N}^+$ 和上述 $\{x\},\{y\}$ 有 $H(\overline{f}_n^l(\{x\}),\overline{f}^l(\{x\}))<\varepsilon$,$H(\overline{f}_n^l(\{y\}),\overline{f}^l(\{y\}))<\varepsilon$。令 $\varepsilon=\dfrac{\delta}{6}$,$l=m_0$,则有 $H(\overline{f}_{n_0+1}^{m_0}(\{x\}),\overline{f}^{m_0}(\{x\}))<\dfrac{\delta}{6}$,$H(\overline{f}_{n_0+1}^{m_0}X(\{y\}),\overline{f}^{m_0}(\{y\}))<\dfrac{\delta}{6}$。

于是得到

$$H(\overline{f}_{n_0+1}^{m_0}(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^{m_0}(\{y\}))\leqslant$$
$$H(\overline{f}_{n_0+1}^{m_0}(\{x\}),\overline{f}^{m_0}(\{x\}))+H(\overline{f}^{m_0}(\{x\}),\overline{f}^{m_0}(\{y\}))+H(\overline{f}^{m_0}(\{y\}),\overline{f}_{n_0+1}^{m_0}(\{y\})),$$

即 $\dfrac{\delta}{2}<\dfrac{\delta}{3}+H(\overline{f}^{m_0}(\{x\}),\overline{f}^{m_0}(\{y\}))$,从而有 $\dfrac{\delta}{6}<H(\overline{f}^{m_0}(\{x\}),\overline{f}^{m_0}(\{y\}))$成立。

综上所述,对任意的 $N\in\mathbf{N}^+$,存在 $m_0>N$,使得 $\dfrac{\delta}{6}<H(\overline{f}^{m_0}(\{x\}),\overline{f}^{m_0}(\{y\}))$。故

$$\limsup_{m\to\infty} H(\overline{f}^{m}(\{x\}),\overline{f}^{m}(\{y\}))>\frac{\delta}{6}>0。$$

证毕

定理3 设$(K(X),H)$是 Hausdorff 度量 H 诱导的超空间,$n\in\mathbf{N}^+$,$\overline{f}_n:K(X)\to K(X)$是连续映射,$\overline{f}_n \xrightarrow{s} \overline{f}$。若 S_n 是 $\overline{f}_n$ 的分布混沌集,$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}S_n$ 是不可数集,则 $\overline{f}$ 是分布混沌。

证明 令 $S=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}S_n$,从而 S 是 $\overline{f}$ 的不可数集。任取$\{x\},\{y\}\subset S\subset S_n$,且$\{x\}\neq\{y\}$。因为 $\overline{f}_n \xrightarrow{s} \overline{f}$,所以对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $n_0\in\mathbf{N}^+$,当 $n>n_0$ 时,对任意的 $l\in\mathbf{N}^+$ 和上述的$\{x\},\{y\}$有 $H(\overline{f}_n^l(\{x\}),\overline{f}^l(\{x\}))<\varepsilon$,$H(\overline{f}_n^l(\{y\}),\overline{f}^l(\{y\}))<\varepsilon$。由 S_n 是 $\overline{f}_n$ 的分布混沌集,则:1) 存在 $\delta>0$,使得 $F(\overline{f}_n,\{x\},\{y\},\delta)=0$;2) 对任意 $t>0$,$F^*(\overline{f}_n,\{x\},\{y\},t)=1$。

1) 任取 $\alpha>0$,且 $n=n_0+1$,显然有$\{x\},\{y\}\subset S_{n_0+1}$。即

$$\liminf_{m\to\infty}\frac{1}{m}\#\{i\mid H(\overline{f}_{n_0+1}^i(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^i(\{y\})<\frac{\delta}{3}<\delta,0\leqslant i<m\}=0。$$

由 $\alpha>0$,则对任意的 $N\in\mathbf{N}^+$,存在$m_0>N$,使得$\dfrac{1}{m_0}\#\{i\mid H(\overline{f}_{n_0+1}^i(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^i(\{y\}))<\dfrac{\delta}{3}<\delta,0\leqslant i<m_0\}<\alpha$。从而有

$$\#\{i\mid H(\overline{f}_{n_0+1}^i(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^i(\{y\}))<\frac{\delta}{3}<\delta,0\leqslant i<m_0\}<m_0\alpha。$$

令 $\varepsilon=\dfrac{\delta}{3}$,$l=i$,则有 $H(\overline{f}_{n_0+1}^i(\{x\}),\overline{f}^i(\{x\}))<\dfrac{\delta}{3}$,$H(\overline{f}_{n_0+1}^i(\{y\}),\overline{f}^i(\{y\}))<\dfrac{\delta}{3}$。而

$H(\overline{f}^i(\{x\}),\overline{f}^i(\{y\}))\leqslant H(\overline{f}^i(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^i(\{x\}))+H(\overline{f}_{n_0+1}^i(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^i(\{y\}))+H(\overline{f}_{n_0+1}^i(\{y\}),\overline{f}^i(\{y\}))<\delta$。

即$\#\{i\mid H(\overline{f}^i(\{x\}),\overline{f}^i(\{y\}))<\delta,0\leqslant i<m_0\}=\#\{i\mid H(\overline{f}_{n_0+1}^i(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^i(\{y\}))<\dfrac{\delta}{3}<\delta,0\leqslant i<m_0\}$,得到

$\#\{i\mid H(\overline{f}^i(\{x\}),\overline{f}^i(\{y\}))<\delta,0\leqslant i<m_0\}<m_0\alpha$,或$\dfrac{1}{m_0}\#\{i\mid H(\overline{f}^i(\{x\}),\overline{f}^i(\{y\}))<\delta,0\leqslant i<m_0\}<\alpha$。

对任意的 $N\in\mathbf{N}^+$,存在 $m_0>N$,使得$\dfrac{1}{m_0}\#\{i\mid H(\overline{f}^i(\{x\}),\overline{f}^i(\{y\}))<\delta,0\leqslant i<m_0\}<\alpha$,则有

$$\liminf_{m\to\infty}\frac{1}{m}\#\{i\mid H(\overline{f}^i(\{x\}),\overline{f}^i(\{y\}))<\delta,0\leqslant i<m\}=0,$$

从而存在 $\delta>0$,使得 $F(\overline{f},\{x\},\{y\},\delta)=0$。

2) 取 $n=n_0+1$,对任意的 $t>0$,有 $F^*(\overline{f}_{n_0+1},\{x\},\{y\},t)=1$。即有

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{m}\#\{i\mid H(\overline{f}_{n_0+1}^i(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^i(\{y\}))<\frac{t}{2}<t,0\leqslant i<m\}=1。$$

对上述的 $\varepsilon>0$,存在 $n_1\in\mathbf{N}^+$,当 $m>n_1$ 时,有$\frac{1}{m}\#\{i\mid H(\overline{f}_{n_0+1}^{i}(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^{i}(\{y\}))<\frac{t}{2}<t,0\leqslant i<m\}<\varepsilon+1$。令 $\varepsilon=\frac{t}{3}$,$l=i$,则有 $H(\overline{f}_{n_0+1}^{i}(\{x\}),\overline{f}^{i}(\{x\}))<\frac{t}{3}$,$H(\overline{f}_{n_0+1}^{i}(\{y\}),\overline{f}^{i}(\{y\}))<\frac{t}{3}$。而

$$H(\overline{f}^{i}(\{x\}),\overline{f}^{i}(\{y\}))\leqslant H(\overline{f}^{i}(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^{i}(\{x\}))+H(\overline{f}_{n_0+1}^{i}(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^{i}(\{y\}))+H(\overline{f}_{n_0+1}^{i}(\{y\}),\overline{f}^{i}(\{y\}))<t。$$

即 $\#\{i\mid H(\overline{f}^{i}(\{x\}),\overline{f}^{i}(\{y\}))<t,0\leqslant i<m\}=\#\{i\mid H(\overline{f}_{n_0+1}^{i}(\{x\}),\overline{f}_{n_0+1}^{i}(\{y\}))<\frac{t}{2}<t,0\leqslant i<m\}$。对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $n_1\in\mathbf{N}^+$,当 $m>n_1$ 时,有$\frac{1}{m}\#\{i\mid H(\overline{f}^{i}(\{x\}),\overline{f}^{i}(\{y\}))<t,0\leqslant i<m\}<\varepsilon+1$。

故有$\lim\limits_{m\to\infty}\sup\frac{1}{m}\#\{i\mid H(\overline{f}^{i}(\{x\}),\overline{f}^{i}(\{y\}))<t,0\leqslant i<m\}=1$。 证毕

参考文献:

[1] LI T Y, YORKE J. Period three implies chaos[J]. Amer Math Monthly, 1975, 82: 985-992.

[2] HUANG W, YE X D. Devaney'chaos or 2-cattering implies Li-Yorke's chaos[J]. Topology and Its Applications, 2002, 117(3): 259-272.

[3] LIU H, WANG L D, CHU Z Y. Devaney's chaos implies distributional chaos in a sequence[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2009, 71(12): 6144-6147.

[4] LI J, Tan F. The equivalence relationship between Li-Yorke-δ-chaos and distributional δ-chaos in a sequence[J]. Journal of South China Normal University, 2010, 3: 34-38.

[5] KLEIN E, THOMPSON A. Theory of Correspondences[M]. New York: Wiley-Inter-Science, 1984.

[6] Roman-Flores H. A note on transitivity in set-valued discrete system[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2003, 17: 99-104.

[7] LI J. Equivalent conditions of Devaney chaos on the hyperspace[J]. J Univ Sci Technol China, 2014, 44(2): 93-95.

[8] 罗飞,金渝光,白丹莹.强一致收敛下的集值 Devaney 混沌[J].西南大学学报(自然科学版),2015,37(2):1-6.
LUO F, JIN Y G, BAI D Y. Set-valued Devaney chaos under the condition of strong uniform convergence[J]. Journal of Southwest University (Natural Science Edition), 2015, 37(2): 1-6.

[9] 廖公夫,王立冬,范钦杰.映射迭代与混沌动力系统[M].北京:科学出版社,2013.
LIAO G F, WANG L D, FAN Q J. The iterative mapping and chaotic dynamic system[M]. Beijing: Science Press, 2013.

Li-Yorke Chaos and Distributed Chaos under Strongly Uniform Convergence

XIANG Weijie, JIN Yuguang

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**] In order to study the relation between the sequence mapping and the limit mapping in chaos. [**Methods**] The definition of strongly uniform convergence, Li-Yorke chaos, Li-Yorke-δ chaos and distributional chaos are introduced on the hyperspace. Then, the relation between sequence mapping and limit mapping in Li-Yorke chaos, Li-Yorke-δ chaos and distributional chaos are discussed by using the definition of strong uniform convergence. [**Findings**] If the sequence mapping is Li-Yorke chaos (Li-Yorke-δ chaos, distributional chaos) and that all the intersections of the Li-Yorke scrambled set are uncountable sets on the hyperspace, then the limit mapping is Li-Yorke chaos (Li-Yorke-δ chaos, distributional chaos) on the hyperspace. If the sequence mapping is Li-Yorke chaos and satisfies two conditions on the hyperspace, then the limit mapping is Li-Yorke-δ chaos. [**Conclusions**] On the hyperspace, the sequence map and limit map in the chaos are preserved under the condition of strong uniform convergence.

Keywords: strongly uniform convergence; Li-Yorke chaos; δ scrambled set; distributional chaos

(责任编辑 许 甲)