

向量优化中广义 E -Benson 真有效解的性质研究^{*}

刘学文, 王 婷, 汪定国

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】为了将向量优化问题的广义 E -Benson 真有效解的一些性质推广到拟内部空间。【方法】利用改进集和拟内部等工具在适当的广义凸性条件下进行了研究。【结果】建立了广义 E -Benson 真有效解的线性标量化结果。【结论】为研究向量优化问题的解的性质提供了新的方法。

关键词: 向量优化; 广义 E -Benson; 拟内部; 线性标量化

中图分类号: O221.6

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2018)03-0017-04

向量优化理论与方法在经济管理、工程设计与交通运输等诸多领域中都有十分重要的应用。近些年来,关于向量优化问题研究已有一些重要成果^[1-2]。在向量优化领域中,关于解的定义及其研究性质是十分重要的研究方向之一。有效解和弱有效解是向量优化领域中十分基础的两类解概念。然而由于有效解集或弱有效解集一般可能太大,一些学者提出了各种类型的真有效解概念对有效解或弱有效解进行限制。特别地, Benson^[3]利用投影锥提出了 Benson 真有效解的概念并研究了这类真有效解的一些性质。关于 Benson 真有效解的性质的进一步研究见文献[4-5]等。特别地, Yang 等人^[5]在拓扑线性空间中提出了集值映射的邻近次似凸性,并建立了邻近次似凸性下的择一性定理。进而利用相应的择一性定理研究了向量优化问题 Benson 真有效解的线性标量化性质。

由于向量优化问题的精确解即使在非常弱的条件下也可能不存在,因此,近年来一些学者开始从不同的角度提出向量优化问题的各种不同类型的近似解概念,并研究了相应的近似解的一些性质。2012年 Gutierrez 等人^[6]提出了无限维空间中改进集的定义并研究了改进集的一些性质及它们在向量优化中的应用。改进集是一类在统一框架下研究向量优化问题的解定义及性质的重要工具。这类工具也已被广泛应用于向量优化问题研究^[7-8]。最近, Zhao 和 Yang^[9]利用改进集提出了向量优化问题的 E -Benson 真有效解概念,这类真有效解的概念统一了 Benson 真有效解和近似 Benson 真有效解等一些已有的真有效解概念,并利用 E -次似凸性假设条件下的择一性定理建立了集值向量优化问题 E -Benson 真有效解的线性标量化定理和拉格朗日乘子定理。廖伟^[10]利用改进集和回收锥等工具提出一类新的近似真有效解概念——广义 E -Benson 真有效解,并研究这类解的线性标量化性质和拉格朗日乘子定理等。

值得注意的是,向量优化中各类经典的解定义一般依赖于像空间中序锥的拓扑内部的非空性。基于此,当序锥的拓扑内部可能为空时,如何定义向量优化问题的解概念并研究各类解的性质等具有十分重要的理论意义^[11-14]。受文献[9-10, 13, 15-16]中研究工作的启发,本文在一般实线性空间中利用改进集和拟内部等工具,研究了集值向量优化问题广义 E -Benson 真有效解的一些性质,在适当的广义凸性条件下建立了广义 E -Benson 真有效解的一些线性标量化结果。

1 预备知识

本文假定 Y 是实非退化分离局部凸拓扑向量空间。令 A 是 Y 中的子集, A 称为真的如果 $A \neq \emptyset$ 且 $A \neq Y$ 。

^{*} 收稿日期: 2017-12-28 修回日期: 2018-04-15 网络出版时间: 2018-05-22 10:01

资助项目: 重庆市科委科学项目 (No. cstc2014jcyjA00004)

第一作者简介: 刘学文, 男, 教授, 研究方向为多目标优化理论与方法, E-mail: comhighliuxue-2008@163.com; 通信作者: 王婷, 女, E-mail: mathwt@163.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180522.1001.014.html>

此外, A 的生成锥、正对偶锥、严格正对偶锥和回收锥分别定义为:

$$\text{cone}A = \{a\alpha \mid \alpha \geq 0, a \in A\}, A^+ = \{\mu \in Y^* \mid \langle \mu, y \rangle \geq 0, \forall y \in A\}, \\ A^{+s} = \{\mu \in Y^* \mid \langle \mu, y \rangle > 0, \forall y \in A \setminus \{0\}\}, A_\infty = \{y \in Y \mid a + \mathbf{R}_{++}y \subset A, \forall a \in A\}.$$

进一步, 设 A 是 Y 中的非空凸子集, A 的拟内部 $\text{qi}A$ 和拟相对内部 $\text{qri}A$ 分别表示为:

$$\text{qi}A = \{y \in A \mid \text{cl}(\text{cone}(A - y)) = Y\}, \text{qri}A = \{y \in A \mid \text{cl}(\text{cone}(A - y)) \text{ 是 } Y \text{ 的线性子空间}\}.$$

Zălinescu^[18] 指出: $\text{qi}A = A \cap \text{qi}(\text{cl}A)$, $\text{qri}A = A \cap \text{qri}(\text{cl}A)$.

对 Y 中凸子集 A , $\text{int}A \subset \text{qi}A \subset \text{qri}A$; 如果 $\text{int}A \neq \emptyset$, 则 $\text{int}A = \text{qi}A$; 如果 $\text{qi}A \neq \emptyset$, 则 $\text{qi}A = \text{qri}A$. 此外, A 在点 y 的支撑泛函定义为 $\sigma_A(y^*) = \sup_{y \in A} \{y^*(y)\}$, $\forall y^* \in Y^*$.

定义 1^[6] 设 K 是 Y 中的非空凸锥, E 是 Y 中的非空集合. 称 $E \subset Y$ 是关于 K 的改进集, 如果 $0 \notin E$ 且 $E + K = E$.

本文考虑下面的集值向量优化问题(VOP):

$$\min F(x), \text{ s. t. } x \in D,$$

其中 $D \subset X$ 非空, $F: D \Rightarrow Y$ 是具有非空值的集值映射.

定义 2^[10] 设 K 是 Y 中的非空凸锥, E 是 Y 中关于 K 的非空改进集, A 是 Y 中的非空集合. 称 $a \in A$ 是 A 的广义 E -Benson 真有效点, 若 $\text{cl}(\text{cone}(A + E - a)) \cap (-E_\infty) = \{0\}$, 记为 $a \in O_{\text{BS}}^E$. 称 $(\bar{x}, \bar{y})$ 是 (VOP) 的广义 E -Benson 真有效点, 若 $\bar{y} \in F(\bar{x}) \cap O_{\text{BS}}^E(F(D))$.

定义 3^[20] 设 K 是 Y 中的非空凸锥, E 是 Y 中关于 K 的非空改进集, $F: D \Rightarrow Y$ 是集值映射, 称 F 在 D 上是邻近 E -次似凸的, 若 $\text{cl}(\text{cone}(F(D) + E))$ 是凸集.

考虑标量化问题(VOP) $_\mu$:

$$\min_{x \in D} \langle \mu, F(x) \rangle, \mu \in Y^* \setminus \{0_{Y^*}\}.$$

称 $(\bar{x}, \bar{y})$ 是 (VOP) $_\mu$ 的 E -最优点, 若对任意的 $x \in D, y \in F(x), \langle \mu, y - \bar{y} \rangle \geq \sigma_{-E}(\mu)$.

由拟内部和拟相对内部的性质以及文献[19]中的定理 2.1 可得如下引理.

引理 1 设 A 和 B 是 Y 中具有非空拟内部的非空凸子集, 如果 $\text{cl}(\text{cone}(\text{qi}A - \text{qi}B))$ 不是 Y 的线性子空间, 则存在 $y^* \in Y^* \setminus \{0_{Y^*}\}$ 使得 $\langle y^*, a \rangle \leq \langle y^*, b \rangle, \forall a \in A, \forall b \in B$.

引理 2^[14] 设 A 是 Y 中的非空子集, K 是 Y 中具有非空拟内部的真凸锥且 E 是 Y 中关于 K 的改进集. 如果 $\text{cl}(\text{cone}(A + E))$ 是凸集, 则 $\text{qi}(\text{cl}(\text{cone}(A + E))) \neq \emptyset$.

引理 3^[14] 设 K 是 Y 中具有非空拟内部的真凸锥, E 是 Y 中关于 K 的改进集, A 是 Y 中非空子集, 如果 $\text{cl}(\text{cone}(A + E))$ 是凸集且 $\text{qi}(\text{cl}(\text{cone}(A + E))) \neq \emptyset$, 则 $\text{cl}(\text{cone}(A + E))$ 不是 Y 的线性子空间.

引理 4^[14] 设 K 是 Y 中具有非空拟内部的真凸锥, E 是 Y 中关于 K 的凸改进集, A 是 Y 中非空子集, 则 $\text{cl}(\text{cone}(A + \text{qi}E)) = \text{cl}(\text{cone}(A + E))$.

2 拟内部下广义 E -Benson 真有效解的线性标量化

引理 5 设 K 是 Y 中的具有非空拟内部的真凸锥, E 是 Y 中关于 K 的凸改进集, 则 $\text{qi}K \subset \text{qi}E_\infty$.

证明 因为 E 是凸集, 所以 E_∞ 是凸集. 故 $\text{qi}E_\infty$ 有意义. 又由 E 是关于 K 的改进集和回收锥的定义可知 $K \subset E_\infty$. 从而利用拟内部的定义可知 $\text{qi}K \subset \text{qi}E_\infty$.

注 1 由引理 5 可知, $\text{qi}K \neq \emptyset$ 蕴含 $\text{qi}K_\infty \neq \emptyset$.

引理 6 设 K 是 Y 中具有非空拟内部的真凸锥, E 是 Y 中关于 K 的真闭凸改进集, 则 E_∞ 是闭集且 $0 \notin \text{qi}E_\infty$.

证明 先证 E_∞ 是闭集, 即证 $\text{cl}E_\infty \subset E_\infty$. 对任意的 $\bar{e} \in \text{cl}E_\infty$, 则存在网 $\{e_\alpha\} \subset E_\infty$ 使得 $\lim_{\alpha} e_\alpha = \bar{e}$. 又对任意的 $e \in E$ 和 $\lambda > 0$, 由 $E + E_\infty = E$ 可知 $e + \lambda e_\alpha \in E$. 故由 E 的闭性可知, 对任意的 $\lambda > 0, e + \lambda \bar{e} \in E$. 从而由回收锥的定义可知, $\bar{e} \in E_\infty$. 因此, E_∞ 是闭集.

下证 $0 \notin \text{qi}E_\infty$, 用反证法. 若 $0 \in \text{qi}E_\infty$, 则由拟内部的定义可得 $\text{cl}(\text{cone}(E_\infty)) = \text{cl}(\text{cone}(E_\infty - 0)) = Y$, 故 $E_\infty = \text{cl}(\text{cone}(E_\infty)) = Y$. 再次利用 $E + E_\infty = E$ 可得 $E = Y$, 这与 E 是 Y 中的真子集矛盾. 故 $0 \notin \text{qi}E_\infty$. 证毕

定理 1 设 K 是 Y 中具有非空拟内部的真凸锥, E 是 Y 中关于 K 的改进集. 若存在 $\mu \in (E_\infty)^{+s}$ 使得 $(\bar{x}, \bar{y})$

是 $(\text{VOP})_\mu$ 的 E -最优点,则 $(\bar{x}, \bar{y})$ 是 (VOP) 的广义 E -Benson 真有效点。

证明类似于文献[10]中的定理 3.3.1 的证明过程可知,结论成立。

定理 2 设 K 是 Y 中具有非空拟内部的真凸锥, E 是 Y 中关于 K 的真闭凸改进集, $F - \bar{y}$ 是邻近 E -次似凸的。若 $(\bar{x}, \bar{y})$ 是 (VOP) 的广义 E -Benson 真有效点,则存在 $\mu \in E_\infty^+ \setminus \{0_{Y^*}\}$ 使得 $(\bar{x}, \bar{y})$ 是 $(\text{VOP})_\mu$ 的 E -最优点。

证明 因为 $(\bar{x}, \bar{y})$ 是 (VOP) 的广义 E -Benson 真有效点,则 $\bar{x} \in D, \bar{y} \in F(\bar{x})$ 且:

$$\text{cl}(\text{cone}(F(D) + E - \bar{y})) \cap (-E_\infty) = \{0\}, \quad (1)$$

利用(1)式和引理 6 可知,

$$\text{qi}(\text{cl}(\text{cone}(F(D) + E - \bar{y}))) \cap (-\text{qi}E_\infty) = \emptyset. \quad (2)$$

此外, $F - \bar{y}$ 是邻近 E -次似凸的可知, $\text{cl}(\text{cone}(F(D) + E - \bar{y}))$ 是凸集。又因为 E 是关于 E_∞ 的改进集,所以由(2)式和引理 3 可知, $\text{cl}(\text{cone}(F(D) + E - \bar{y}))$ 不是 Y 的线性子空间。由引理 4 和文献[17]中的引理 1.6 可得:

$$\begin{aligned} \text{cl}(\text{cone}(F(D) - \bar{y} + E)) &= \text{cl}(\text{cone}(F(D) - \bar{y} + E + E_\infty)) = \text{cl}(\text{cone}(F(D) - \bar{y} + E + \text{qi}E_\infty)) = \\ &= \text{cl}(\text{cl}(\text{cone}(F(D) - \bar{y} + E)) + \text{qi}E_\infty) = \text{cl}(\text{qi}(\text{cl}(\text{cone}(F(D) - \bar{y} + E))) + \text{qi}E_\infty). \end{aligned}$$

故 $\text{cl}(\text{qi}(\text{cl}(\text{cone}(F(D) - \bar{y} + E))) + \text{qi}E_\infty)$ 不是线性子空间。再次利用 $F - \bar{y}$ 的邻近 E -次似凸性和引理 2 可知:

$$\text{qi}(\text{cl}(\text{cone}(F(D) + E - \bar{y}))) \neq \emptyset, \quad (3)$$

因此,由(3)式、注 1 和引理 1 可知,存在 $\mu \in Y^* \setminus \{0_{Y^*}\}$ 使得:

$$\langle \mu, y - \bar{y} + e + \epsilon k \rangle \geq 0, \quad \forall y \in F(D), \forall e \in E, \forall k \in E_\infty, \forall \epsilon > 0. \quad (4)$$

在(4)式中令 $\epsilon \rightarrow +\infty$ 可得对任意的 $k \in E_\infty, \langle \mu, k \rangle \geq 0$ 。因此, $\mu \in E_\infty^+ \setminus \{0_{Y^*}\}$ 。在(4)式中令 $\epsilon \rightarrow 0$ 可知,对任意的 $y \in F(D)$ 和 $e \in E, \langle \mu, y - \bar{y} \rangle \geq \langle \mu, -e \rangle$, 则:

$$\langle \mu, y - \bar{y} \rangle \geq \sup_{e' \in -E} \langle \mu, e' \rangle = \sigma_{-E}(\mu), \quad \forall y \in F(D).$$

这意味着 $(\bar{x}, \bar{y})$ 是 $(\text{VOP})_\mu$ 的 E -最优点。

证毕

参考文献:

- [1] CHEN G Y, HUANG X X, YANG X Q. Vector optimization; set-valued and variational analysis[M]. Lecture Notes in Economics and Mathematical Sciences. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
- [2] LUC D T. Theory of vector optimization[M]. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [3] BENSON H P. An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1979, 71(1): 232-241.
- [4] CHEN G Y, RONG W D. Characterizations of the Benson proper efficiency for nonconvex vector optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1998, 98(2): 365-384.
- [5] YANG X M, LI D, WANG S Y. Near-subconvex likeness in vector optimization with set-valued functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001, 110(2): 413-427.
- [6] GUTIÉRREZ C, JIMÉNEZ B, NOVO V. Improvement sets and vector optimization[J]. European Journal of Operations Research, 2012, 223(223): 304-311.
- [7] ZHAO K Q, CHEN G Y, YANG X M. Approximate proper efficiency in vector optimization[J]. Optimization, 2015, 64(8): 1777-1793.
- [8] ZHAO K Q, XIA Y M, YANG X M. Nonlinear scalarization characterizations of E -efficiency in vector optimization[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2015, 19(2): 455-466.
- [9] ZHAO K Q, YANG X M. E -Benson proper efficiency in vector optimization[J]. Optimization, 2013, 64(4): 1-14.
- [10] 廖伟. 向量优化问题中的近似解研究[D]. 重庆: 重庆师范大学, 2014.
- [11] LIAO W. Study on approximate solutions of vector optimization problems[D]. Chongqing: Chongqing Normal University, 2014.
- [12] ADÁN M, NOVO V. Proper efficiency in vector optimization on real linear spaces[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2004, 121(3): 515-540.
- [13] BAO T Q, MORDUKHOVICH B S. Relative Pareto minimizers for multiobjective problems; existence and optimality conditions[J]. Mathematical Programming, 2010, 122(2): 301-347.
- [14] ZHOU Z A, YANG X M, PENG J W. Optimality conditions of set-valued optimization problem involving relative algebraic interior in ordered linear spaces[J]. Optimization, 2014, 63(3): 433-446.
- [15] XIA Y M, ZHANG W L, ZHAO K Q. Characterizations of improvement sets via quasi interior and applications in vector optimization[J]. Optimization Letters, 2016, 10(4): 1-14.

- 769-780.
- [15] 夏远梅. 向量优化问题近似解的标量化研究[D]. 重庆: 重庆师范大学, 2016.
- XIA Y M. Study on scalarization of approximate solutions of vector optimization problems[D]. Chongqing: Chongqing Normal University, 2016.
- [16] 史树中. 凸分析[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1990.
- SHI S Z. Convex analysis[M]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1990.
- [17] ZHOU Z A, YANG X M. Optimality conditions of generalized subconvexlike set-valued optimization problems based on the quasi-relative interior[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2011, 150: 327-340.
- [18] ZĂLINESCU C. On three open problem related to quasi relative interior[J]. Journal of Convex Analysis, 2015, 22 (3): 614-645.
- [19] CAMMAROTO F, Di Bella B. Separation theorem based on the quasirelative interior and application to duality theory[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2005, 125: 223-229.
- [20] ZHAO K Q, YANG X M, PENG J W. Weak E -optimal solution in vector optimization[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2013, 17: 1287-1302.

Operations Research and Cybernetics

Characterizations of Generalized E -Benson Proper Efficient Solutions in Vector Optimization

LIU Xuewen, WANG Ting, WANG Dingguo

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] In order to generalize some properties of generalized E -Benson proper efficient solutions of vector optimization problems to quasi interior spaces. [Methods] Under proper generalized convexity conditions, some properties of generalized E -Benson proper efficient solutions of vector optimization problems are studied by means of improvement sets and quasi interior. [Findings] Some linear scalar results of generalized E -Benson proper efficient solutions are established. [Conclusions] It provides a new method for studying the properties of solutions of vector optimization problems.

Keywords: vector optimization; generalized E -Benson proper efficient solutions; quasi interior; linear scalarization

(责任编辑 黄 颖)