2017 年度重庆市出版专项基金资助栏目　　DOI:10.11721/cqnuj20180303

运筹学与控制论

D-半预不变凸映射的一些判别准则*

杨 玉 红[1,2]

(1. 内蒙古大学 数学科学学院，呼和浩特 010021；2. 长江师范学院 数学与统计学院，重庆 涪陵 408100)

摘要:【目的】为锥意义下的半预不变凸映射提供一些判别准则。【方法】利用向量值映射的半连续性、中间点凸性等条件。【结果】首先，在向量值映射的半连续性条件下，可以用中间点的 D-半预不变凸性来刻画 D-半预不变凸性；其次，在 D-半严格半预不变凸性条件下，通过中间点的 D-半预不变凸性获得了 D-半预不变凸性；最后，在 D-半严格半预不变凸性和下半连续条件下给出了 D-半预不变凸性的充分条件。【结论】所得的结果将相关文献的一些结论推广到了向量值半预不变凸情形。

关键词:半不变凸集；D-半预不变凸；D-半严格半预不变凸；条件 E

中图分类号:O221.6　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2018)03-0021-09

凸性理论对最优化理论影响非常深远，它在数理经济、对策论、工程技术和管理科学等方面都起着非常重要的作用。有关凸性理论的研究是数学规划的重要方向之一，而对不变凸性的研究又是其中非常重要的一项。1981 年，Hanson[1] 第一个提出不变凸概念，后来被 Craven[2] 正式命名为“invex”。不变凸函数是对凸函数的重要补充，它继承了凸函数的许多良好性质(如局部极小点是全局极小点，驻点是极小点等等)。因此，通过对不变凸性的研究可以推广凸性的已有结果，进而解决非线性规划中最优解的充分性、对偶性等问题，对数学规划理论及应用都有着至关重要的作用。

1988 年，Weir 和 Mond[3] 引入了预不变凸函数的概念。1991 年，Pini[4] 进一步将拟不变凸和伪不变凸函数推广到不可微情形，定义了预拟不变凸和预伪不变凸函数，并证明了可微的预不变凸函数就是不变凸函数。为了研究不变凸性与预不变凸性间的关系，1995 年 Mohan 和 Neogy[5] 引入条件 C，证明了在条件 C 下不变凸函数就是预不变凸函数。2001 年，Yang 和 Li[6] 在条件 C 下建立了预不变凸函数的一些重要刻画。同年，Yang 和 Li[7] 引入了严格预不变凸和半严格预不变凸函数的概念并讨论了它们的性质，并在条件 C 下讨论了它们与预不变凸函数间的关系。2001 年，Yang 等人[8] 又研究了预拟不变凸函数，并提出了严格预拟不变凸函数和半严格预拟不变凸函数，讨论了它们的性质及相互关系。后来，不断有学者投入到预不变凸性的研究当中[9-15]。

为研究一类变分不等式，1992 年 Yang 和 Chen[16] 引入了半预不变凸函数的概念，这类函数可看作是对不变凸函数的推广。1994 年，杨新民[17] 引入了半预不变拟凸、严格半预不变拟凸、半严格半预不变拟凸等函数概念，讨论这些函数的一些性质及它们在多目标规划中的应用，表明了研究半预不变凸性是有一定意义的。2003 年，Yang 等人[18] 利用水平集、上图像等给出了半预不变凸函数的一些刻画，并且表明半预不变凸函数的点态上确界以及商也是半预不变凸函数。

另一方面，凸性及广义凸性在向量优化中也扮演着十分重要的角色，它是研究向量优化问题解的存在性与解集刻画、最优性条件以及对偶理论等方面的重要工具。1988 年，Weir 和 Jeyakumar[19] 引入了向量值映射在锥意义下的预不变凸性和不变凸性的概念。2006 年，Peng 和 Zhu[20] 提出了 D-半严格预不变凸映射和 D-严格预不变凸映射，并讨论了这两类映射以及 D-预不变凸映射之间的相互关系。2009 年，Long 等人[21] 用 D-半严格预不变凸映射刻画了 D-预不变凸映射，并讨论了 D-半严格预不变凸映射在向量优化中的应用。

* 收稿日期:2017-08-26　　修回日期:2017-12-21　　网络出版时间:2018-05-22　10:02

资助项目:国家自然科学基金(No. 11431004)；重庆市教委项目(No. KJ160013)

第一作者简介:杨玉红，女，讲师，博士，研究方向为广义凸性及向量优化，E-mail:yhyang1020@163.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180522.1002.048.html

结合实值映射的半预不变凸性[16]以及向量值映射的预不变凸性[20]的思想,2014年,彭再云等人[22]引入了D-半预不变凸性、D-半严格半预不变凸性和D-严格半预不变凸性的概念,在条件E下讨论了它们的相互关系。进一步,彭再云等人[23]又提出了D-半预不变真拟凸映射、D-半严格半预不变真拟凸映射和D-严格半预不变真拟凸映射,给出了D-半预不变真拟凸性的判定定理以及这几类广义凸性间的关系。2015年,唐莉萍和杨新民[24]对文献[22]中的一个例子进行了修正,并给出了D-半预不变凸性映射的一些新刻画。

有关锥意义下的半预不变凸性的研究主要集中在半预不变拟凸映射上[23,25-26],而有关半预不变凸映射的研究却比较少。因此,受文献[6-7,20,22]的启发,本文重点研究D-半预不变凸映射,结合向量值映射的半连续性以及中间点凸性,给出D-半预不变凸映射的一些判别准则。

1 预备知识

本文均假设X,Y是实局部凸拓扑线性空间,K是X的非空子集,D是Y中具有非空拓扑内部的点闭凸锥,$\eta:X\times X\times[0,1]\to X$是一个向量值映射。$\mathbf{N}$表示全体正整数的集合。设$Y^*$为$Y$的拓扑对偶,$D$的对偶锥$D^*$定义为$D^*:=\{\boldsymbol{x}^*\in Y^*\mid \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{y})\geqslant 0,\forall\boldsymbol{y}\in D\}$。

定义1[22] 称K是关于η的半不变凸集,若$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\forall\alpha\in[0,1],\forall\lambda\in[0,1]$,有$\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in K$。

定义2[22] 设K是关于η的半不变凸集,$f:K\to Y$是一个向量值映射,则:

(i) 称f在K上关于η是D-半预不变凸的,若$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\forall\alpha\in[0,1],\forall\lambda\in[0,1]$,有:

$$f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\in\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})-D。$$

(ii) 称f在K上关于η是D-半严格半预不变凸的,若$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:f(\boldsymbol{x})\neq f(\boldsymbol{y}),\forall\alpha\in(0,1),\forall\lambda\in[0,1]$,有$f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\in\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})-\mathrm{int}D$。

注1 显然,当$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)=\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$(即$\eta$与$\lambda$无关)时,$D$-半预不变凸映射就退化为$D$-预不变凸映射[19],进一步若$Y=\mathbf{R},D=\mathbf{R}_+$则又退化为预不变凸函数[3]。所以$D$-半预不变凸映射是对$D$-预不变凸映射和预不变凸函数的真推广。文献[22]举例表明了D-半预不变凸映射是大量存在的。

众所周知,条件C在不变凸性的研究中起着至关重要的作用。同样,为了研究半预不变凸性,需要将条件C进行相应的拓广,也即条件E,该条件在半预不变凸性的研究中也是非常关键的。

定义3[24] 称向量值映射$\eta:X\times X\times[0,1]\to X$在$K$上满足条件E,若$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\forall\alpha\in[0,1],\forall\lambda\in[0,1]$,有:

E_1) $\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda),\lambda)=-\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)$;

E_2) $\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda),\lambda)=(1-\alpha)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)$。

类似于文献[13]中对条件C建立的性质,文献[24]得到了关于条件E的一个重要性质,并且此文献还表明这个性质只需要条件E_1便可获得。

性质1[24] 若向量值映射$\eta:X\times X\times[0,1]\to X$在$K$上满足条件$E_1$,则:

$$\eta(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda),\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda),\lambda)=(\alpha_1-\alpha_2)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda),\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\forall\alpha_1,\alpha_2\in[0,1],\forall\lambda\in[0,1]。$$

同样也需要将条件D[8]拓广到锥意义下的半预不变凸情形,具体如下。

定义4 称向量值映射$f:K\to Y$关于η满足条件F,若$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\forall\lambda\in[0,1]$,有:

$$f(\boldsymbol{y}+\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\in f(\boldsymbol{x})-D。$$

在刻画锥凸性时需要用到以下向量值映射的半连续性概念。

定义5[22] 设向量值映射$f:K\to Y$,若对任意的$\boldsymbol{q}\in D^*$,$\boldsymbol{q}\circ f(\cdot)$在$K$上是上半连续的,则称$f$在$K$上是$*$-上半连续;若$\boldsymbol{q}\circ f(\cdot)$在$K$上是下半连续的,则称$f$在$K$上是$*$-下半连续。

在讨论向量值映射的时候,经常会用到以下由双极化定理获得的结论。

引理1[20] $\boldsymbol{d}\in D\Leftrightarrow\boldsymbol{q}(\boldsymbol{d})\geqslant 0,\forall\boldsymbol{q}\in D^*$。

2 主要结果

为了得到D-半预不变凸映射的一些刻画,需要借助下面的稠密性结论。

引理2[24] 设K是关于$\eta:X\times X\times[0,1]\to X$的半不变凸集,且$\eta$在$K$上满足条件E;假设$f:K\to Y$关于$\eta$满足条件F。如果$\exists\alpha\in(0,1)$,s.t.

$$f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\in\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})-D,\ \forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\ \forall\lambda\in[0,1]。$$

则集合 $A=\{\gamma\in[0,1]\mid f(\boldsymbol{y}+\gamma\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\in\gamma f(\boldsymbol{x})+(1-\gamma)f(\boldsymbol{y})-D,\ \forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\ \forall\lambda\in[0,1]\}$在区间$[0,1]$中稠密。

首先，在向量值映射的半连续性条件下，利用中间点的 D-半预不变凸性来刻画 D-半预不变凸性。

定理 1 设 K 是关于 $\eta:X\times X\times[0,1]\to X$ 的半不变凸集，且 η 在 K 上满足条件 E；假设 $f:K\to Y$ 是 $*$-下半连续的且关于 η 满足条件 F。则 f 在 K 上关于 η 是 D-半预不变凸的，当且仅当 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\exists\alpha\in(0,1)$，s. t.

$$f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\in\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})-D。\tag{1}$$

证明 必要性是显然的，只需证明充分性。假设 f 在 K 上不是 D-半预不变凸的。注意到条件 F 以及 $f(\boldsymbol{y})\in f(\boldsymbol{y})-D$，$\forall\,\boldsymbol{y}\in K$，则 $\exists\bar{\lambda}\in[0,1]$，$\exists\,\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}\in K$，$\exists\beta\in(0,1)$，s. t.

$$f(\bar{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}))\notin\beta f(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-\beta)f(\bar{\boldsymbol{y}})-D。\tag{2}$$

设 $\boldsymbol{x}_t:=\bar{\boldsymbol{y}}+t\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})$，$t\in(\beta,1]$。定义：

$$B:=\{\boldsymbol{x}_t\in K\mid t\in(\beta,1],f(\boldsymbol{x}_t)=f(\bar{\boldsymbol{y}}+t\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}))\in tf(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-t)f(\bar{\boldsymbol{y}})-D\},$$
$$u=\inf\{t\in(\beta,1]\mid\boldsymbol{x}_t\in B\}。$$

由条件 F 知 $\boldsymbol{x}_1\in B$，故 $B\neq\varnothing$。另外，由(2)式知 $\boldsymbol{x}_\beta:=\bar{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})\notin B$。从而，当 $\beta\leqslant t<u$ 时，$\boldsymbol{x}_t\notin B$。由 u 的定义，$\exists\{t_n\}:t_n\geqslant u,\boldsymbol{x}_{t_n}\in B$，s. t. $t_n\to u(n\to\infty)$。由于 $\boldsymbol{x}_{t_n}\in B$，则：

$$f(\boldsymbol{x}_{t_n})\in t_nf(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-t_n)f(\bar{\boldsymbol{y}})-D,\ \forall n\in\mathbf{N},\tag{3}$$

即 $t_nf(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-t_n)f(\bar{\boldsymbol{y}})-f(\boldsymbol{x}_{t_n})\in D$，$\forall n\in\mathbf{N}$。由引理 1 得：

$$\boldsymbol{q}\circ[t_nf(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-t_n)f(\bar{\boldsymbol{y}})-f(\boldsymbol{x}_{t_n})]\geqslant0,\ \forall\,\boldsymbol{q}\in D^*,\ \forall n\in\mathbf{N}。\tag{4}$$

注意到 $\boldsymbol{q}$ 是线性泛函，则由上式得：

$$t_n\boldsymbol{q}\circ f(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-t_n)\boldsymbol{q}\circ f(\bar{\boldsymbol{y}})\geqslant\boldsymbol{q}\circ f(\boldsymbol{x}_{t_n}),\ \forall\,\boldsymbol{q}\in D^*,\ \forall n\in\mathbf{N}。\tag{5}$$

由于 $f:K\to Y$ 是 $*$-下半连续的，则 $\forall\,\boldsymbol{q}\in D^*$，$\boldsymbol{q}\circ f(\cdot)$是下半连续的，结合(5)式得：

$$\boldsymbol{q}\circ f(\boldsymbol{x}_u)=\boldsymbol{q}\circ f(\bar{\boldsymbol{y}}+u\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}))\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\boldsymbol{q}\circ f(\bar{\boldsymbol{y}}+t_n\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}))=\varliminf_{n\to\infty}\boldsymbol{q}\circ f(\boldsymbol{x}_{t_n})\leqslant$$
$$\lim_{n\to\infty}[t_n\boldsymbol{q}\circ f(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-t_n)\boldsymbol{q}\circ f(\bar{\boldsymbol{y}})]=u\boldsymbol{q}\circ f(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-u)\boldsymbol{q}\circ f(\bar{\boldsymbol{y}}),\ \forall\,\boldsymbol{q}\in D^*。\tag{6}$$

从而，$\boldsymbol{q}\circ[uf(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-u)f(\bar{\boldsymbol{y}})-f(\boldsymbol{x}_u)]\geqslant0$，$\forall\,\boldsymbol{q}\in D^*$。再由引理 1 得：

$$uf(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-u)f(\bar{\boldsymbol{y}})-f(\boldsymbol{x}_u)\in D。\tag{7}$$

于是得 $\boldsymbol{x}_u=\bar{\boldsymbol{y}}+u\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})\in B$。

类似地，设 $\boldsymbol{y}_t:=\bar{\boldsymbol{y}}+t\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})$，$t\in[0,\beta)$。定义：

$$C:=\{\boldsymbol{y}_t\in K\mid t\in[0,\beta),f(\boldsymbol{y}_t)=f(\bar{\boldsymbol{y}}+t\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}))\in tf(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-t)f(\bar{\boldsymbol{y}})-D\},$$
$$v=\sup\{t\in[0,\beta)\mid\boldsymbol{y}_t\in C。\}$$

易知 $\boldsymbol{y}_0=\bar{\boldsymbol{y}}\in C$，故 $C\neq\varnothing$。另外，由(2)式知 $\boldsymbol{y}_\beta:=\bar{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})\notin C$。从而，当 $v<t\leqslant\beta$ 时，$\boldsymbol{y}_t\notin C$。由 v 的定义，$\exists\{s_n\}:s_n\leqslant v,\boldsymbol{y}_{s_n}\in C$，s. t. $s_n\to v(n\to\infty)$。类似地，利用 f 的 $*$-下半连续性，重复(3)式到(7)式的步骤，并将其中的 $\boldsymbol{x}_{t_n}$ 替换为 $\boldsymbol{y}_{s_n}$，t_n 替换为 s_n，$\boldsymbol{x}_u$ 替换为 $\boldsymbol{y}_v$，u 替换为 v，也可以得到 $\boldsymbol{y}_v=\bar{\boldsymbol{y}}+v\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})\in C$。

另一方面，由 u,v 的定义知，$0\leqslant v<\beta<u\leqslant1$。对任意的 $\alpha\in(0,1)$，由性质 1 得：

$$\boldsymbol{x}_u+\alpha\eta(\boldsymbol{y}_v,\boldsymbol{x}_u,\bar{\lambda})=\bar{\boldsymbol{y}}+u\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})+\alpha\eta(\bar{\boldsymbol{y}}+v\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}),\bar{\boldsymbol{y}}+u\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}),\bar{\lambda})=$$
$$\bar{\boldsymbol{y}}+u\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})+\alpha(v-u)\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})=\bar{\boldsymbol{y}}+[\alpha v+(1-\alpha)u]\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})。$$

令 $w:=\alpha v+(1-\alpha)u$，$\alpha\in(0,1)$，则由上式得 $\boldsymbol{x}_w:=\bar{\boldsymbol{y}}+w\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})=\boldsymbol{x}_u+\alpha\eta(\boldsymbol{y}_v,\boldsymbol{x}_u,\bar{\lambda})$。由于 $\alpha\in(0,1)$，则 $w\in(v,u)$，从而 $\boldsymbol{x}_w\notin B\cup C$，$\forall\alpha\in(0,1)$。因为 $\boldsymbol{x}_u\in B$，$\boldsymbol{y}_v\in C$，则：

$$uf(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-u)f(\bar{\boldsymbol{y}})\in f(\boldsymbol{x}_u)+D,\ vf(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-v)f(\bar{\boldsymbol{y}})\in f(\boldsymbol{y}_v)+D。\tag{8}$$

注意到 D 是凸锥，结合(8)式得：

$$wf(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-w)f(\bar{\boldsymbol{y}})=[\alpha v+(1-\alpha)u]f(\bar{\boldsymbol{x}})+\{1-[\alpha v+(1-\alpha)u]\}f(\bar{\boldsymbol{y}})=$$
$$\alpha[vf(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-v)f(\bar{\boldsymbol{y}})]+(1-\alpha)[uf(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-u)f(\bar{\boldsymbol{y}})]\in$$
$$\alpha[f(\boldsymbol{y}_v)+D]+(1-\alpha)[f(\boldsymbol{x}_u)+D]\subseteq\alpha f(\boldsymbol{y}_v)+(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}_u)+D,\ \forall\alpha\in(0,1)。$$

从而有：

$$\alpha f(\boldsymbol{y}_v)+(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}_u)\in wf(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-w)f(\overline{\boldsymbol{y}})-D,\ \forall\,\alpha\in(0,1)。\tag{9}$$

下证：

$$f(\boldsymbol{x}_w)=f(\boldsymbol{x}_u+\alpha\eta(\boldsymbol{y}_v,\boldsymbol{x}_u,\bar{\lambda}))\notin\alpha f(\boldsymbol{y}_v)+(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}_u)-D,\ \forall\,\alpha\in(0,1)。\tag{10}$$

假设(10)式不成立，则 $\exists\,\bar{\alpha}\in(0,1)$，s. t. $\overline{w}=\bar{\alpha}v+(1-\bar{\alpha})u$，且：

$$f(\boldsymbol{x}_{\overline{w}})=f(\boldsymbol{x}_u+\bar{\alpha}\eta(\boldsymbol{y}_v,\boldsymbol{x}_u,\bar{\lambda}))\in\bar{\alpha}f(\boldsymbol{y}_v)+(1-\bar{\alpha})f(\boldsymbol{x}_u)-D。\tag{11}$$

由(9)，(11)式以及 D 是凸锥得：

$$f(\boldsymbol{x}_{\overline{w}})\in\overline{w}f(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-\overline{w})f(\overline{\boldsymbol{y}})-D。\tag{12}$$

由于 $\boldsymbol{x}_w\notin B\cup C,\ \forall\,\alpha\in(0,1)$，则 $f(\boldsymbol{x}_{\overline{w}})\notin\overline{w}f(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-\overline{w})f(\overline{\boldsymbol{y}})-D$，与(12)式相矛盾，故(10)式成立。

综上可得：$\exists\,\bar{\lambda}\in[0,1]$，$\exists\,\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{y}_v\in K$，$\forall\,\alpha\in(0,1)$有

$$f(\boldsymbol{x}_u+\alpha\eta(\boldsymbol{y}_v,\boldsymbol{x}_u,\bar{\lambda}))\notin\alpha f(\boldsymbol{y}_v)+(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}_u)-D,$$

与(1)式相矛盾。所以，f 在 K 上是 D-半预不变凸的。 证毕

注 2 定理 1 将文献[6]中定理 3.2 的实值预不变凸推广到了向量值半预不变凸情形。

定理 2 设 K 是关于 $\eta:X\times X\times[0,1]\to X$ 的半不变凸集，且 η 在 K 上满足条件 E；假设 $f:K\to Y$ 是 $*$-上半连续的且关于 η 满足条件 F。则 f 在 K 上关于 η 是 D-半预不变凸的，当且仅当 $\exists\,\alpha\in(0,1)$，s. t.

$$f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\in\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})-D,\ \forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\ \forall\,\lambda\in[0,1]。$$

证明 必要性是显然的，只需证明充分性。

假设 f 在 K 上不是 D-半预不变凸的。注意到条件 F 以及 $f(\boldsymbol{y})\in f(\boldsymbol{y})-D,\ \forall\,\boldsymbol{y}\in K$，则 $\exists\,\bar{\lambda}\in[0,1]$，$\exists\,\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}}\in K$，$\exists\,\beta\in(0,1)$，s. t.

$$f(\overline{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}))\notin\beta f(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-\beta)f(\overline{\boldsymbol{y}})-D。\tag{13}$$

由引理 2 知集合 $A=\{\gamma\in[0,1]\mid f(\boldsymbol{y}+\gamma\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\in\gamma f(\boldsymbol{x})+(1-\gamma)f(\boldsymbol{y})-D,\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\forall\,\lambda\in[0,1]\}$ 在区间$[0,1]$中稠密。因而，存在序列$\{\beta_n\}\subset(0,1)\cap A$，使得 $\beta_n<\beta,\ \forall\,n\in\mathbf{N}$ 且 $\beta_n\to\beta(n\to\infty)$。定义 $\boldsymbol{z}_n:=\overline{\boldsymbol{y}}+\dfrac{\beta-\beta_n}{1-\beta_n}\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}),\ \forall\,n\in\mathbf{N}$。注意到$\dfrac{\beta-\beta_n}{1-\beta_n}\in(0,1)$以及 K 是关于 η 的半不变凸集，所以 $\boldsymbol{z}_n\in K$。又由于$\dfrac{\beta-\beta_n}{1-\beta_n}\to0(n\to\infty)$，故有 $\boldsymbol{z}_n\to\overline{\boldsymbol{y}}(n\to\infty)$。由条件 E 得：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{z}_n+\beta_n\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{z}_n,\bar{\lambda})=\overline{\boldsymbol{y}}+\frac{\beta-\beta_n}{1-\beta_n}\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})+\beta_n\eta\left(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}}+\frac{\beta-\beta_n}{1-\beta_n}\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}),\bar{\lambda}\right)=\\&\overline{\boldsymbol{y}}+\frac{\beta-\beta_n}{1-\beta_n}\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})+\beta_n\left(1-\frac{\beta-\beta_n}{1-\beta_n}\right)\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})=\overline{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})\triangleq\boldsymbol{z}_\beta。\end{aligned}\tag{14}$$

因为 $f:K\to Y$ 是 $*$-上半连续，则 $\forall\,\boldsymbol{q}\in D^*$，$\boldsymbol{q}\circ f(\cdot)$在 K 上是上半连续的。因此 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,n_0\in\mathbf{N}$，当 $n>n_0$ 时，

$$\boldsymbol{q}\circ f(\boldsymbol{z}_n)\leqslant\boldsymbol{q}\circ f(\overline{\boldsymbol{y}})+\varepsilon。\tag{15}$$

因为 $\beta_n\in A$，则对于$\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{z}_n\in K,\bar{\lambda}\in[0,1]$，结合(14)式得：

$$f(\boldsymbol{z}_\beta)=f(\boldsymbol{z}_n+\beta_n\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{z}_n,\bar{\lambda}))\in\beta_nf(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-\beta_n)f(\boldsymbol{z}_n)-D,$$

即 $\beta_nf(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-\beta_n)f(\boldsymbol{z}_n)-f(\boldsymbol{z}_n+\beta_n\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{z}_n,\bar{\lambda}))\in D$。由引理 1 得：

$$\boldsymbol{q}\circ[\beta_nf(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-\beta_n)f(\boldsymbol{z}_n)-f(\boldsymbol{z}_n+\beta_n\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{z}_n,\bar{\lambda}))]\geqslant0,\ \forall\,\boldsymbol{q}\in D^*。$$

进而，有：

$$\boldsymbol{q}\circ[\beta_nf(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-\beta_n)f(\boldsymbol{z}_n)]\geqslant\boldsymbol{q}\circ f(\boldsymbol{z}_n+\beta_n\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{z}_n,\bar{\lambda})),\ \forall\,\boldsymbol{q}\in D^*。\tag{16}$$

由(14)，(15)以及(16)式，对任意的 $\boldsymbol{q}\in D^*$ 有：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{q}\circ f(\boldsymbol{z}_\beta)=\boldsymbol{q}\circ f(\boldsymbol{z}_n+\beta_n\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{z}_n,\bar{\lambda}))\leqslant\boldsymbol{q}\circ[\beta_nf(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-\beta_n)f(\boldsymbol{z}_n)]=\\&\beta_n\boldsymbol{q}\circ f(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-\beta_n)\boldsymbol{q}\circ f(\boldsymbol{z}_n)\leqslant\beta_n\boldsymbol{q}\circ f(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-\beta_n)[\boldsymbol{q}\circ f(\overline{\boldsymbol{y}})+\varepsilon]\to\\&\beta\,\boldsymbol{q}\circ f(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-\beta)[\boldsymbol{q}\circ f(\overline{\boldsymbol{y}})+\varepsilon](n\to\infty)。\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon>0$ 可以任意小，故有 $\boldsymbol{q}\circ f(\boldsymbol{z}_\beta)\leqslant\beta\,\boldsymbol{q}\circ f(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-\beta)\boldsymbol{q}\circ f(\overline{\boldsymbol{y}}),\ \forall\,\boldsymbol{q}\in D^*$。从而，$\boldsymbol{q}\circ[\beta f(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-\beta)f(\overline{\boldsymbol{y}})-f(\boldsymbol{z}_\beta)]\geqslant0,\ \forall\,\boldsymbol{q}\in D^*$。再由引理 1 得：

$$\beta f(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-\beta)f(\bar{\boldsymbol{y}})-f(\boldsymbol{z}_\beta)=\beta f(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-\beta)f(\bar{\boldsymbol{y}})-f(\bar{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}))\in D,$$

与(13)式矛盾。所以，f 在 K 上关于 η 是 D-半预不变凸的。　　证毕

注 3　定理 2 将文献[6]中定理 3.1、文献[10]中定理 2.1 的实值预不变凸情形，以及文献[20]中定理 2.2 的向量值预不变凸情形，推广到了向量值半预不变凸情形。另外，此定理表明文献[22]中定理 1 的条件“K 是开集”可以去掉。

接下来，在 D-半严格半预不变凸性条件下，通过中间点的 D-半预不变凸性来获得 D-半预不变凸性的一个充分条件。

定理 3　设 K 是关于 $\eta:X\times X\times[0,1]\to X$ 的半不变凸集，且 η 在 K 上满足条件 E；假设 $f:K\to Y$ 在 K 上关于 η 是 D-半严格半预不变凸的。如果 $\exists\,\alpha\in(0,1)$，s. t.

$$f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\in\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})-D,\ \forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\ \forall\,\lambda\in[0,1]。\tag{17}$$

则 f 在 K 上关于 η 是 D-半预不变凸的。

证明　假设 f 在 K 上不是 D-半预不变凸的。注意到 $f(\boldsymbol{y})\in f(\boldsymbol{y})-D$，$\forall\,\boldsymbol{y}\in K$，则 $\exists\,\bar{\lambda}\in[0,1]$，$\exists\,\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}\in K$，$\exists\,\beta\in(0,1]$，s. t.

$$f(\bar{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}))\notin\beta f(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-\beta)f(\bar{\boldsymbol{y}})-D。\tag{18}$$

1) 若 $f(\bar{\boldsymbol{x}})\neq f(\bar{\boldsymbol{y}})$，由于 f 是 D-半严格半预不变凸的，则 $\forall\,\lambda\in[0,1]$，$\forall\,r\in[0,1]$有 $f(\bar{\boldsymbol{y}}+r\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\lambda))\in rf(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-r)f(\bar{\boldsymbol{y}})-\mathrm{int}D$，与(18)式相矛盾。

2) 若 $f(\bar{\boldsymbol{x}})=f(\bar{\boldsymbol{y}})$。设 $\boldsymbol{z}_\beta:=\bar{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})$，则(18)式变成：

$$f(\boldsymbol{z}_\beta)\notin f(\bar{\boldsymbol{x}})-D=f(\bar{\boldsymbol{y}})-D。\tag{19}$$

从而有：

$$f(\boldsymbol{z}_\beta)\neq f(\bar{\boldsymbol{x}}),\ f(\boldsymbol{z}_\beta)\neq f(\bar{\boldsymbol{y}})。\tag{20}$$

由(17)，(18)式知 $\beta\neq\alpha$，下面分情况讨论。

1) 若 $0<\beta<\alpha<1$。令 $u:=\dfrac{\beta}{\alpha}$，则 $0<\beta<u<1$。设 $\boldsymbol{z}_u:=\bar{\boldsymbol{y}}+u\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})$，由性质 1 得：

$$\bar{\boldsymbol{y}}+\alpha\eta(\boldsymbol{z}_u,\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})=\bar{\boldsymbol{y}}+\alpha\eta\left(\bar{\boldsymbol{y}}+\frac{\beta}{\alpha}\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}),\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}\right)=\bar{\boldsymbol{y}}+\alpha\cdot\frac{\beta}{\alpha}\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})=\bar{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})=\boldsymbol{z}_\beta。$$

于是，由(17)式得：

$$f(\boldsymbol{z}_\beta)=f(\bar{\boldsymbol{y}}+\alpha\eta(\boldsymbol{z}_u,\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}))\in\alpha f(\boldsymbol{z}_u)+(1-\alpha)f(\bar{\boldsymbol{y}})-D。\tag{21}$$

令 $t:=\dfrac{u-\beta}{1-\beta}=\dfrac{(1-\alpha)\beta}{\alpha(1-\beta)}$，则 $0<t<1$。由条件 E 得：

$$\boldsymbol{z}_\beta+t\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{z}_\beta,\bar{\lambda})=\bar{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})+\frac{u-\beta}{1-\beta}\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}),\bar{\lambda})=$$

$$\bar{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})+\frac{u-\beta}{1-\beta}\cdot(1-\beta)\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})=\bar{\boldsymbol{y}}+u\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})=\boldsymbol{z}_u。$$

由于 f 在 K 上是 D-半严格半预不变凸的，由(20)式得：

$$f(\boldsymbol{z}_u)=f(\boldsymbol{z}_\beta+t\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{z}_\beta,\bar{\lambda}))\in tf(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-t)f(\boldsymbol{z}_\beta)-\mathrm{int}D。\tag{22}$$

注意到 $f(\bar{\boldsymbol{x}})=f(\bar{\boldsymbol{y}})$且 D 为凸锥，由(21)，(22)式得：

$$f(\boldsymbol{z}_\beta)\in\alpha f(\boldsymbol{z}_u)+(1-\alpha)f(\bar{\boldsymbol{y}})-D\subseteq\alpha[tf(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-t)f(\boldsymbol{z}_\beta)-\mathrm{int}D]+(1-\alpha)f(\bar{\boldsymbol{y}})-D\subseteq$$

$$(\alpha t+1-\alpha)f(\bar{\boldsymbol{x}})+\alpha(1-t)f(\boldsymbol{z}_\beta)-D。$$

移项得$(1-\alpha+\alpha t)f(\boldsymbol{z}_\beta)\in(\alpha t+1-\alpha)f(\bar{\boldsymbol{x}})-D$。由于 $1-\alpha+\alpha t>0$ 及 D 为凸锥，所以 $f(\boldsymbol{z}_\beta)\in f(\bar{\boldsymbol{x}})-D$，与(19)式矛盾。

2) 若 $0<\alpha<\beta\leqslant1$。令 $v:=\dfrac{\beta-\alpha}{1-\alpha}$，则 $0<v\leqslant\beta$。设 $\boldsymbol{z}_v:=\bar{\boldsymbol{y}}+v\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})$，由条件 E 得：

$$\boldsymbol{z}_v+\alpha\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{z}_v,\bar{\lambda})=\bar{\boldsymbol{y}}+v\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})+\alpha\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}+v\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}),\bar{\lambda})=$$

$$\bar{\boldsymbol{y}}+v\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})+\alpha(1-v)\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})=\bar{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})=\boldsymbol{z}_\beta。$$

于是，由(17)式得：

$$f(\boldsymbol{z}_\beta)=f(\boldsymbol{z}_v+\alpha\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{z}_v,\bar{\lambda}))\in\alpha f(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{z}_v)-D。\tag{23}$$

另一方面,令 $s:=\frac{\beta-v}{\beta}$,则 $0\leqslant s<1$。由性质1得:

$$\boldsymbol{z}_{\beta}+s\eta(\bar{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{z}_{\beta},\bar{\lambda})=\bar{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})+\frac{\beta-v}{\beta}\eta(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}),\bar{\lambda})=$$

$$\bar{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})+\frac{\beta-v}{\beta}\cdot(-\beta)\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})=\bar{\boldsymbol{y}}+v\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})=\boldsymbol{z}_{v}。$$

由于 f 在 K 上是 D-半严格半预不变凸的,再结合(20)式得:

$$f(\boldsymbol{z}_{v})=f(\boldsymbol{z}_{\beta}+s\eta(\bar{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{z}_{\beta},\bar{\lambda}))\in sf(\bar{\boldsymbol{y}})+(1-s)f(\boldsymbol{z}_{\beta})-\mathrm{int}D。\tag{24}$$

注意到 $f(\bar{\boldsymbol{x}})=f(\bar{\boldsymbol{y}})$ 且 D 为凸锥,由(23),(24)式得:

$$f(\boldsymbol{z}_{\beta})\in\alpha f(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{z}_{v})-D\subseteq\alpha f(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-\alpha)[sf(\bar{\boldsymbol{y}})+(1-s)f(\boldsymbol{z}_{\beta})-\mathrm{int}D]-D\subseteq$$

$$(\alpha+s-\alpha s)f(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-\alpha)(1-s)f(\boldsymbol{z}_{\beta})-D。$$

移项得 $(\alpha+s-\alpha s)f(\boldsymbol{z}_{\beta})\in(\alpha+s-\alpha s)f(\bar{\boldsymbol{x}})-D$。由于 $\alpha+s-\alpha s>0$ 及 D 为凸锥,所以 $f(\boldsymbol{z}_{\beta})\in f(\bar{\boldsymbol{x}})-D$,与(19)式矛盾。

综上可得,f 在 K 上关于 η 是 D-半预不变凸的。　证毕

注4　定理3将文献[7]中定理4.1、文献[10]中定理2.3的实值预不变凸情形,以及文献[21]中定理2.1的向量值预不变凸情形,推广到了向量值半预不变凸情形。

最后,在向量值映射的下半连续条件下,利用(中间点)D-半严格半预不变凸性,给出两个 D-半预不变凸性的充分条件。

定理4　设 K 是关于 $\eta:X\times X\times[0,1]\to X$ 的半不变凸集,且 η 在 K 上满足条件E;假设 $f:K\to Y$ 在 K 上关于 η 是 D-半严格半预不变凸的。如果 f 在 K 上是 $*$-下半连续的,则 f 在 K 上关于 η 是 D-半预不变凸的。

证明　假设 f 在 K 上不是 D-半预不变凸的。注意到 $f(\boldsymbol{y})\in f(\boldsymbol{y})-D,\forall\boldsymbol{y}\in K$,则 $\exists\bar{\lambda}\in[0,1]$,$\exists\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}\in K$,$\exists\beta\in(0,1]$,s.t.

$$f(\bar{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}))\notin\beta f(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-\beta)f(\bar{\boldsymbol{y}})-D。\tag{25}$$

1) 若 $f(\bar{\boldsymbol{x}})\neq f(\bar{\boldsymbol{y}})$,此时与定理3的证明中1)的部分相似。

2) 若 $f(\bar{\boldsymbol{x}})=f(\bar{\boldsymbol{y}})$。设 $\boldsymbol{z}_{\beta}:=\bar{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})$,则(25)式变成:

$$f(\boldsymbol{z}_{\beta})\notin f(\bar{\boldsymbol{x}})-D=f(\bar{\boldsymbol{y}})-D。\tag{26}$$

从而有:

$$f(\boldsymbol{z}_{\beta})\neq f(\bar{\boldsymbol{x}}),f(\boldsymbol{z}_{\beta})\neq f(\bar{\boldsymbol{y}})。\tag{27}$$

再由(26)式得 $f(\bar{\boldsymbol{x}})-f(\boldsymbol{z}_{\beta})\notin D$。由引理1,$\exists\bar{\boldsymbol{q}}\in D^{*}$,s.t. $\bar{\boldsymbol{q}}\circ[f(\bar{\boldsymbol{x}})-f(\boldsymbol{z}_{\beta})]<0$,则有 $\bar{\boldsymbol{q}}\circ f(\boldsymbol{z}_{\beta})>\bar{\boldsymbol{q}}\circ f(\bar{\boldsymbol{x}})$。由于 f 在 K 上是 $*$-下半连续的,则 $\bar{\boldsymbol{q}}\circ f(\cdot)$ 是下半连续的。所以,$\exists\alpha:0<\alpha<\beta\leqslant1$,s.t. $\boldsymbol{z}_{\alpha}=\bar{\boldsymbol{y}}+\alpha\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})$ 满足 $\bar{\boldsymbol{q}}\circ f(\boldsymbol{z}_{\alpha})=\bar{\boldsymbol{q}}\circ f(\bar{\boldsymbol{y}}+\alpha\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}))>\bar{\boldsymbol{q}}\circ f(\bar{\boldsymbol{x}})$。于是得:

$$f(\boldsymbol{z}_{\alpha})\neq f(\bar{\boldsymbol{x}})。\tag{28}$$

令 $u:=\frac{\alpha}{\beta}$,则 $0<u<1$。由性质1得:

$$\bar{\boldsymbol{y}}+u\eta(\boldsymbol{z}_{\beta},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})=\bar{\boldsymbol{y}}+\frac{\alpha}{\beta}\eta(\bar{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}),\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})=\bar{\boldsymbol{y}}+\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})=\bar{\boldsymbol{y}}+\alpha\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})=\boldsymbol{z}_{\alpha}。$$

另一方面,令 $v=\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}$,则 $0<v\leqslant1$。由条件E得:

$$\boldsymbol{z}_{\alpha}+v\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{z}_{\alpha},\bar{\lambda})=\bar{\boldsymbol{y}}+\alpha\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})+\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}+\alpha\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}),\bar{\lambda})=$$

$$\bar{\boldsymbol{y}}+\alpha\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})+\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\cdot(1-\alpha)\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})=\bar{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda})=\boldsymbol{z}_{\beta}。$$

由于 f 是 D-半严格半预不变凸的,再结合(27),(28)式得:

$$f(\boldsymbol{z}_{\alpha})=f(\bar{\boldsymbol{y}}+u\eta(\boldsymbol{z}_{\beta},\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\lambda}))\in uf(\boldsymbol{z}_{\beta})+(1-u)f(\bar{\boldsymbol{y}})-\mathrm{int}D,\tag{29}$$

$$f(\boldsymbol{z}_{\beta})=f(\boldsymbol{z}_{\alpha}+v\eta(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{z}_{\alpha},\bar{\lambda}))\in vf(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-v)f(\boldsymbol{z}_{\alpha})-\mathrm{int}D。\tag{30}$$

注意到 $f(\bar{\boldsymbol{x}})=f(\bar{\boldsymbol{y}})$ 且 D 为凸锥,由(29),(30)式得:

$$f(\boldsymbol{z}_\beta)\in vf(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-v)f(\boldsymbol{z}_\alpha)-\mathrm{int}D\subseteq vf(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-v)[uf(\boldsymbol{z}_\beta)+(1-u)f(\overline{\boldsymbol{y}})-\mathrm{int}D]-\mathrm{int}D\subseteq$$
$$(1-u+uv)f(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-v)uf(\boldsymbol{z}_\beta)-\mathrm{int}D。$$

移项得$(1-u+uv)f(\boldsymbol{z}_\beta)\in(1-u+uv)f(\overline{\boldsymbol{x}})-\mathrm{int}D$。由于$1-u+uv>0$及$D$为凸锥，所以$f(\boldsymbol{z}_\beta)\in f(\overline{\boldsymbol{x}})-\mathrm{int}D$，与(26)式矛盾。

综上可得，f在K上关于η是D-半预不变凸的。　证毕

注 5　定理 4 将文献[7]中定理 5.1 的实值预不变凸情形，以及文献[20]中定理 3.7 的向量值预不变凸情形，推广到了向量值半预不变凸情形。

定理 5　设K是关于$\eta:X\times X\times[0,1]\to X$的半不变凸集，且$\eta$在$K$上满足条件 E；假设$f:K\to Y$是$*$-下半连续的且关于$\eta$满足条件 F。如果$\exists\alpha\in(0,1)$，$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$：$f(\boldsymbol{x})\neq f(\boldsymbol{y})$，s. t.

$$f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\in\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})-\mathrm{int}\ D,\forall\lambda\in[0,1]。\tag{31}$$

则f在K上关于η是D-半预不变凸和D-半严格半预不变凸的。

证明　首先，证明f在K上关于η是D-半预不变凸的。根据定理 1，只需证明$\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\exists\alpha\in(0,1)$，s. t. $f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\in\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})-D$。

相反地，假设$\exists\bar\lambda\in[0,1]$，$\exists\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}}\in K$，s. t.

$$f(\overline{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar\lambda))\notin\beta f(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-\beta)f(\overline{\boldsymbol{y}})-D,\forall\beta\in(0,1)。\tag{32}$$

1) 若$f(\overline{\boldsymbol{x}})\neq f(\overline{\boldsymbol{y}})$，由(31)式得$f(\overline{\boldsymbol{y}}+\alpha\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar\lambda))\in\alpha f(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-\alpha)f(\overline{\boldsymbol{y}})-\mathrm{int}D$，与(32)式相矛盾。

2) 若$f(\overline{\boldsymbol{x}})=f(\overline{\boldsymbol{y}})$。设$\boldsymbol{z}_\beta:=\overline{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar\lambda)$，$\beta\in(0,1)$，则(32)式变成：

$$f(\boldsymbol{z}_\beta)=f(\overline{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar\lambda))\notin f(\overline{\boldsymbol{x}})-D=f(\overline{\boldsymbol{y}})-D,\forall\beta\in(0,1)。\tag{33}$$

从而有：

$$f(\boldsymbol{z}_\beta)\neq f(\overline{\boldsymbol{x}}),f(\boldsymbol{z}_\beta)\neq f(\overline{\boldsymbol{y}}),\forall\beta\in(0,1)。\tag{34}$$

令$\boldsymbol{z}:=\boldsymbol{z}_\beta+\alpha\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{z}_\beta,\bar\lambda)$，$\beta\in(0,1)$，则由(31)，(34)式得：

$$f(\boldsymbol{z})=f(\boldsymbol{z}_\beta+\alpha\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{z}_\beta,\bar\lambda))\in\alpha f(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{z}_\beta)-\mathrm{int}D,\forall\beta\in(0,1)。\tag{35}$$

再由条件 E 得：

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_\beta+\alpha\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{z}_\beta,\bar\lambda)=\overline{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar\lambda)+\alpha\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar\lambda),\bar\lambda)=$$
$$\overline{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar\lambda)+\alpha(1-\beta)\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar\lambda)=\overline{\boldsymbol{y}}+[\beta+\alpha(1-\beta)]\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar\lambda),\forall\beta\in(0,1)。\tag{36}$$

由于$\alpha,\beta\in(0,1)$，故$\beta+\alpha(1-\beta)\in(0,1)$，所以由(33)，(36)式得：

$$f(\boldsymbol{z})=f(\overline{\boldsymbol{y}}+[\beta+\alpha(1-\beta)]\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar\lambda))\notin f(\overline{\boldsymbol{x}})-D=f(\overline{\boldsymbol{y}})-D,\forall\beta\in(0,1)。$$

从而$f(\boldsymbol{z})\neq f(\overline{\boldsymbol{x}})$，$f(\boldsymbol{z})\neq f(\overline{\boldsymbol{y}})$。于是由(31)式得：

$$f(\boldsymbol{z}+\alpha\eta(\overline{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{z},\bar\lambda))\in\alpha f(\overline{\boldsymbol{y}})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{z})-\mathrm{int}D,\ \forall\beta\in(0,1)。\tag{37}$$

另一方面，由性质 1 及(36)式得：

$$\boldsymbol{z}+\alpha\eta(\overline{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{z},\bar\lambda)=\overline{\boldsymbol{y}}+[\beta+\alpha(1-\beta)]\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar\lambda)+\alpha\eta(\overline{\boldsymbol{y}},\overline{\boldsymbol{y}}+[\beta+\alpha(1-\beta)]\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar\lambda),\bar\lambda)=$$
$$\overline{\boldsymbol{y}}+[\beta+\alpha(1-\beta)]\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar\lambda)-\alpha[\beta+\alpha(1-\beta)]\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar\lambda)=$$
$$\overline{\boldsymbol{y}}+(1-\alpha)[\beta+\alpha(1-\beta)]\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar\lambda),\forall\beta\in(0,1)。\tag{38}$$

注意到$f(\overline{\boldsymbol{x}})=f(\overline{\boldsymbol{y}})$且$D$为凸锥，由(35)，(37)和(38)式得：

$$f(\overline{\boldsymbol{y}}+(1-\alpha)[\beta+\alpha(1-\beta)]\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar\lambda))=f(\boldsymbol{z}+\alpha\eta(\overline{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{z},\bar\lambda))\in\alpha f(\overline{\boldsymbol{y}})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{z})-\mathrm{int}D\in$$
$$\alpha f(\overline{\boldsymbol{y}})+(1-\alpha)[\alpha f(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{z}_\beta)-\mathrm{int}D]-\mathrm{int}D\subseteq$$
$$(2\alpha-\alpha^2)f(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-\alpha)^2f(\boldsymbol{z}_\beta)-\mathrm{int}D,\forall\beta\in(0,1)。$$

令$(1-\alpha)[\beta+\alpha(1-\beta)]=\beta$，则有$\beta=\dfrac{1-\alpha}{2-\alpha}\in(0,1)$，代入上式得：

$$f(\overline{\boldsymbol{y}}+\beta\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}},\bar\lambda))=f(\boldsymbol{z}_\beta)\in(2\alpha-\alpha^2)f(\overline{\boldsymbol{x}})+(1-\alpha)^2f(\boldsymbol{z}_\beta)-\mathrm{int}D。$$

移项得$(2\alpha-\alpha^2)f(\boldsymbol{z}_\beta)\in(2\alpha-\alpha^2)f(\overline{\boldsymbol{x}})-\mathrm{int}D$。由于$2\alpha-\alpha^2>0$及$D$为凸锥，所以$f(\boldsymbol{z}_\beta)\in f(\overline{\boldsymbol{x}})-\mathrm{int}D$，与(33)式矛盾。所以，$f$在$K$上关于$\eta$是$D$-半预不变凸的。

因已证得f在K上是D-半预不变凸的，由文献[22]中定理 3 知f还是D-半严格半预不变凸的。　证毕

注 6　定理 5 将文献[7]中定理 5.3、文献[10]中定理 2.4 的实值预不变凸情形，推广到了锥序半预不变凸

情形。

3 结语

由于有关锥意义下半预不变凸映射的研究相对比较少,本文重点研究 D-半预不变凸映射。通过结合向量值映射的半连续性、中间点凸性、半严格半预不变凸性等条件,得到了 D-半预不变凸映射的一些判别准则。本文的一些结论将文献[6-7,10,20]的相关结论推广到了向量值半预不变凸情形。如何结合向量值半预不变凸性的已有结论,研究它们在向量优化问题中的应用(如最优性条件与对偶问题等),这将是有待研究的后续课题。

参考文献:

[1] HANSON M A. On sufficiency of the Kuhn-Tucher conditions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1981,80:545-550.

[2] CRAVEN B D. Invex functions and constrained local minima[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society,1981,24:357-366.

[3] WEIR T,MOND B. Pre-invex functions in multiple objective optimization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1988,136(1):29-38.

[4] PINI R. Invexity and generalized convexity[J]. Optimization,1991,22(4):513-525.

[5] MOHAN S R,NEOGY S K. On invex sets and preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1995,189:901-908.

[6] YANG X M,LI D. On properties of preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2001,256(1):229-241.

[7] YANG X M, LI D. Semistrictly preinvex functions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2001,258(1):287-308.

[8] YANG X M,YANG X Q,TEO K L. Characterizations and applications of prequasi-invex functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2001,110(3):645-668.

[9] LUO H Z,XU Z K. On characterizations of prequasi-invex functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2004,120(2):429-439.

[10] LUO H Z,WU H X. On the Characterization of Preinvex Functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2008,138(2):297-304.

[11] YANG J,YANG X M. Two new characterizations of preinvex functions[J]. Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems Series B,2012,19:405-410.

[12] YANG X M,YANG X Q,TEO K L. Two properties of semistrictly preinvex functions[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics,2004,35(11):1285-1292.

[13] YANG X M. A note on preinvexity[J]. Journal of Industrial and Management Optimization,2014,10(4):1319-1321.

[14] ZHAO K Q,LIU X W,CHEN Z. On characterizations of prequasiinvex functions[J]. Journal of Southwest University,2010,32(7):30-33.

[15] 赵克全,郭辉.预不变凸性判别准则的新证明[J].西南大学学报(自然科学版),2012,34(8):1-3.
ZHAO K Q,GUO H. A new proof of criteria for preinvexity[J]. Journal of Southwest University(Natural Science Edition),2012,34(8):1-3.

[16] YANG X Q,CHEN G Y. A class of nonconvex functions and pre-variational inequalities[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1992,169:359-373.

[17] 杨新民.半预不变凸性与多目标规划问题[J].重庆师范学院学报(自然科学版),1994,11(1):1-5.
YANG X M. Problems of semi-preinvexity and multiobjective programming[J]. Journal of Chongqing Normal University(Natural Science Edition),1994,11(1):1-5.

[18] YANG X M,YANG X Q,TEO K L. On properties of semipreinvex functions[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society,2003,68(3):449-459.

[19] WEIR T, JEYAKUMAR V. A class of nonconvex functions and mathematical programming[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society,1988,38(2):177-189.

[20] PENG J W,ZHU D L. On D-preinvex-type functions[J]. Journal of Inequalities and Applications,2006 (1),Article ID 093532:1-14.

[21] LONG X J,PENG Z Y,ZENG B. Remark on cone semistrictly preinvex functions[J]. Optimization Letters,2009,3(3):337-345.

[22] 彭再云,王堃颖,赵勇,等. D-η-半预不变凸映射的性质与应用[J].应用数学和力学,2014,35(2):202-211.
PENG Z Y,WANG K Y, ZHAO Y,et al. Characterizations and applications of D-η-semipreinvex mappings[J]. Applied Mathematics and Mechanics,2014,35(2):202-211.

[23] 彭再云,李科科,唐平,等.向量值 D-半预不变真拟凸映射的判定与性质[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2014,31(5):18-25.
PENG Z Y,LI K K,TANG L P,et al. Characterizations and criterion of D-Semi-Prequasi-invex mappings [J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Sci-

ence), 2014, 31(5): 18-25.

[24] 唐莉萍，杨新民. 关于 D-半预不变凸性的某些新性质[J]. 应用数学和力学，2015，36(3)：325-331.
TANG L P, YANG X M. A note on some new characteristics of D-Semi-Preinvexity[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2015, 36(3): 325-331.

[25] LI K K, PENG Z Y, LIU Y W, et al. Notes on characterizations and applications of semi-prequasi-invexity[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2017, 34(1): 12-22.

[26] ZHAO Y X, MENG X G, QIAO H, et al. Characterizations of semi-prequasi-invexity[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2014, 27(5): 1008-1026.

Operations Research and Cybernetics

Some Criteria for D-Semi-Preinvex Mappings

YANG Yuhong[1,2]

(1. School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021;

2. School of Mathematics and Statistics, Yangtze Normal University, Fuling Chongqing 408100, China)

Abstract: [**Purposes**]The purpose is to provide some criteria for semi-preinvex mappings in the sense of cones. [**Methods**] It makes use of vector-valued mappings' semi-continuity, intermediate-point convexity, etc. [**Findings**] Firstly, under the condition of vector-valued mappings' semi-continuity, D-semi-preinvexity is characterized by intermediate-point D-semi-preinvexity. Secondly, if D-semistrict semi-preinvexity holds, then D-semi-preinvexity can be obtained through intermediate-point D-semi-preinvexity. And lastly, sufficient conditions for D-semi-preinvexity are established based on D-semistrict semi-preinvexity and lower semi-continuity. [**Conclusions**]The obtained results generalize some conclusions in related literatures to vector-valued semi-preinvex case.

Keywords: semi-invex set; D-semi-preinvex; D-semistictly semi-preinvex; Condition E

(责任编辑 黄 颖)