2018 年 5 月 重庆师范大学学报(自然科学版) May 2018
第 35 卷 第 3 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 35 No. 3

2017 年度重庆市出版专项基金资助栏目 DOI:10.11721/cqnuj20180305

运筹学与控制论

关于预不变凸函数的某些注记*

闫 凯[1,2]

(1. 内蒙古大学 数学科学学院，呼和浩特 010021；2. 山东大学 数学学院，济南 250100)

摘要:【目的】对已有文献的一些不足进行修正。【方法】利用条件 C 的性质以及对特殊点的构造来完成证明。【结果】针对不足的地方给出了更严密的证明。【结论】严格说明了半严格预拟不变凸函数是预不变凸函数的充分条件。

关键词:半严格预拟不变凸；预不变凸；条件 C

中图分类号:O226 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2018)03-0030-03

凸性在非线性规划最优性条件、对偶性等方面具有非常重要的作用。然而，大量实际问题形成的数学模型常常不能满足凸性条件。于是，引进各种广义凸性，推广凸函数具有的、与数学规划相关联的基本性质非常必要。1981 年，为推广 KKT 条件的充分性，Hanson[1] 第一个提出不变凸概念，后来被 Cravel[2] 正式命名为“invex”。不变凸函数是对凸函数的重要补充，它继承了凸函数的许多良好性质(如局部极小点是全局极小点等)，因此通过对不变凸性的研究可以推广凸性的已有结果，进而解决非线性规划中最优解的充分性、对偶性等问题，对数学规划理论及应用都有着至关重要的作用。

1988 年，Weir 与 Mond[3] 以及 Weir 与 Jeyakumar[4] 引入了预不变凸函数的概念，并且给出了优化问题的最优性条件与 Lagrange 对偶结果。1991 年，Pini[5] 进一步将拟不变凸和伪不变凸函数推广到不可微情形，定义了预拟不变凸和预伪不变凸函数，并证明了可微的预不变凸函数是不变凸函数。为了研究不变凸性与预不变凸性的关系，1995 年 Mohan 和 Neng[6] 引入条件 C，证明了在条件 C 下，不变凸函数是预不变凸函数。2001 年，Yang 和 Li[7-8] 建立了许多关于预不变凸函数和半严格预不变凸函数的重要刻画。2012 年，Yang J 和 Yang X [9] 刻画了预不变凸函数与半严格预拟不变凸函数之间的等价关系，但证明过程存在不足，本文对此作出修正。

本文首先指出文献[9]中定理 2 的证明存在不足，在 $f(x)=f(y)$ 情形下，对 $0<\beta<\alpha<1$ 情况中的 u 给出更合理的取值。本文是对文献[9]中相应内容的修正。

1 预备知识

首先对文中出现的符号进行说明：$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间，$\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$，$\varnothing\neq K\subseteq\mathbf{R}^n$。

定义 1[9] 称 K 是关于 η 的不变凸集，若 $\forall x,y\in K$，$\forall\alpha\in[0,1]$，$\forall\lambda\in[0,1]$，有 $y+\lambda\eta(x,y)\in K$。

定义 2[9] 设 K 是关于 η 的不变凸集，称函数 $f:K\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的预不变凸函数，若：

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\ \forall x,y\in K,\ \forall\lambda\in[0,1]。$$

条件 C[9] 称 η 满足条件 C，若 $\forall x,y\in K$，$\lambda\in[0,1]$，有如下式子成立：$(\mathrm{C}_1)\ \eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y)$；$(\mathrm{C}_2)\ \eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)$。

定义 3[9] 设 K 是关于 η 的不变凸集，称 $f:K\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的预拟不变凸函数，若：

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\max\{f(x),f(y)\},\ \forall x,y\in K,\ \forall\lambda\in[0,1]。$$

关于条件 C，有如下重要性质。

性质 1[10] 设 η 满足条件 C，则：

---

* **收稿日期**:2018-03-28 **网络出版时间**:2018-05-22 10:02

资助项目:国家自然科学基金青年项目(No. 11701057)；重庆市教委项目(No. KJ1600613)

第一作者简介:闫凯，男，博士研究生，研究方向为广义凸及向量优化，E-mail:530019173@qq.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180522.1002.040.html

$$\eta(y+\lambda_1\eta(x,y),y+\lambda_2\eta(x,y))=(\lambda_1-\lambda_2)\eta(x,y),\forall x,y\in K,\forall\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]。$$

定义 4[9]　设 K 是不变凸集,称实值函数 f 是 K 上关于 η 的半严格预拟不变凸函数,若

$$f(y+\lambda\eta(x,y))<\max\{f(x),f(y)\},\lambda\in[0,1],\forall x,y\in K,f(x)\neq f(y)。$$

2 主要结果

以下定理是文献[9]的主要结果。

定理 1[9]　设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集,其中 η 满足条件 C。若 $f:K\to\mathbf{R}$ 满足

$$f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x),\forall x,y\in K,$$

则 f 是 K 上关于 η 的预不变凸函数当且仅当 f 是关于相同 η 的半严格预拟不变凸函数,且存在 $\alpha\in(0,1)$ 使得 $f(y+\alpha\eta(x,y))\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y),\forall x,y\in K$。

文献[9]中定理 2.1 的充分性证明过程中,在 $f(x)=f(y)$ 前提下,当 α,β 满足 $0<\beta<\alpha<1$ 时,取 $u=\dfrac{\beta}{1-\alpha}$,显然 u 可能会大于 1,进而无法使用条件 C。因此本文给出在 $f(x)=f(y)$ 前提下的严格证明。为方便起见,本文采用文献[9]中的记号。

证明　仅需证明充分性。

利用反证法证明,假设存在 $x,y\in K,\beta\in(0,1)$ 使得:

$$f(y+\beta\eta(x,y))>\beta f(x)+(1-\beta)f(y)。\tag{1}$$

下证文献[9]的情形Ⅰ:$f(x)=f(y)$。

由(1)式,有 $f(z+\beta\eta(x,y))>f(y)=f(x)$。当 $0<\beta<\alpha<1$ 时,令 $u=\dfrac{\beta}{\alpha}>\beta$,则 $u\in(0,1)$。令:

$$z_\beta=y+\beta\eta(x,y),z_u=y+u\eta(x,y)。$$

根据性质 1 得到:

$$y+\alpha\eta(z_u,y)=y+\alpha\eta(y+u\eta(x,y),y)=y+\beta\eta(x,y)=z_\beta。\tag{2}$$

由已知条件易知

$$f(y+\alpha\eta(x,y))\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)。\tag{3}$$

结合(1)式、(2)式和(3)式,有:

$$f(y)<f(z_\beta)=f(y+\alpha\eta(z_u,y))\leqslant\alpha f(z_u)+(1-\alpha)f(y)。\tag{4}$$

由(4)式,得:

$$f(y)<f(z_u)。\tag{5}$$

结合(4)式和(5)式,有:

$$f(z_\beta)<f(z_u)。\tag{6}$$

令 $t=\dfrac{u-\beta}{1-\beta}$,显然 $t\in(0,1)$。根据性质 1 有:

$$z_\beta+t\eta(x,z_\beta)=y+\beta\eta(x,y)+\frac{u-\beta}{1-\beta}\eta(x,y+\beta\eta(x,y))=y+u\eta(x,y)=z_u。$$

因为 f 是关于 η 的半严格预拟不变凸函数且 $f(x)<f(z_\beta)$,得到 $f(z_u)=f(z_\beta+t\eta(x,z_\beta))<f(z_\beta)$,这与(6)式矛盾,因此假设不成立。其余情况同文献[9]。　证毕

参考文献:

[1] HANSON M A. On sufficiency of the Kuhn-Tucher conditions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1981,80:545-550.

[2] CRAVEN B D. Invex functions and constrained local minima[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society,1981,24:357-366.

[3] WEIR T,MOND B. Preinvex functions in multiple objective optimization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1988,136(1):29-38.

[4] WEIR T,JEYAKUMAR V. A class of nonconvex functions and mathematical programming[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society,1988,38(2):177-189.

[5] PINI R. Invexity and generalized convexity[J]. Optimization,1991,22(4):513-525.

[6] MOHAN S R, NEOGY S K. On invex sets and preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, 189: 901-908.

[7] YANG X M, LI D. On Properties of Preinvex Functions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 256(1): 229-241.

[8] YANG X M, LI D. Semistrictly preinvex functions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 258(1): 287-308.

[9] YANG J, YANG X M. Two new characterizations of preinvex functions[J]. Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems Series B, 2012, 19: 405-410.

[10] YANG X M. A note on preinvexity[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2014, 10(4): 1319-1321.

Operations Research and Cybernetics

Some Notes of Semi-Strictly Prequasiinvex Function

YAN Kai[1,2]

(1. College of Mathematics Science, Inner Mongolia University, Hohhot 010021;

2. School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, China)

Abstract: [**Purposes**]The deficiency in existing document is pointed out. [**Methods**]The proof is modified by using the property of Condition C and the structure of special point. [**Findings**]Proving the theorem in a strict way. [**Conclusions**] It is rigorously shown that semi-strictly prequasiinvex function is a sufficient condition of preinvex function.

Keywords: semi-prequasiinvex function; preinvex function; Condition C

(责任编辑　黄　颖)