

基于选择算子改进的多目标基因算法^{*}

徐威娜, 汪定国, 赵克全

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】为了提高多目标基因算法的有效性, 获得更真实的 Pareto 前沿面。【方法】利用有效点定义减少计算复杂度, 并基于分类 Pareto 前沿面的动态规划, 定义了密度指数描绘前沿面上有效点的密集程度, 使得被选点差异性更大且更靠近前沿面。【结果】在减少计算复杂度和增加被选点多样性这两方面改进了多目标基因算法。【结论】数值实验结果表明该方法是有效的。

关键词: 基因算法; 多目标优化; Pareto 前沿; 选择算子

中图分类号: O221.6

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2018)03-0033-05

多目标优化理论与方法在经济管理、工程设计和交通规划等诸多领域均有十分广泛的应用。目前关于多目标优化理论与方法的研究已取得了一系列基础且重要的研究成果^[1-5]。

多目标优化问题的求解方法是多目标优化研究领域十分重要的研究方向。目前, 关于多目标优化问题的求解方法主要包括两种类型, 一种是通过某种适当的标量化方法将多目标优化问题转化为单目标优化问题, 进而通过研究单目标优化问题获得多目标优化问题的一些重要性质, 如 ϵ -约束法^[1]、线性加权法^[2-3]和理想点法^[4]等。虽然单目标优化问题的计算方法已经发展得比较完善, 但每次计算只能得到一个解, 在实际应用中决策者通常希望得到一系列方案以适应不同的实际需求。而另一种类型则是直接设计求解多目标优化问题的算法, 其中以基因算法为代表的进化计算方法已取得了大量的研究成果^[6-8]。近些年来, 一些学者进一步对多目标基因算法进行了改进^[9-15]。特别地, Deb^[11]提出了将种群内每个个体按 Pareto 解进行分层排序, 偏好位于目标空间中稀疏区域的个体。

值得注意的是, 多目标基因算法中主要关注这两个基本问题: 选择的点均匀分布在 Pareto 前沿面上以及更靠近真实的 Pareto 前沿面。受文献^[9-10]的启发, 本文针对选择算子在保留被选择点的多样性和减少迭代过程中的计算复杂度这两方面进行改进。该算法在文献^[11]中提出的 Pareto 前沿面分层选择的基础上, 定义了新的密度指数用于刻画 Pareto 前沿面上有效点的密集程度, 使得每一步迭代过程被选中点的稀疏性更大并且更靠近前沿面。最后, 通过测试函数进行数值实验, 结果表明该算法是有效的。

1 预备知识

本部分主要介绍一些基本定义和基因算法的基本步骤。

给定向量 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n), \mathbf{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, 定义序关系: $\mathbf{x} < \mathbf{y} \Rightarrow x_i < y_i, \forall i=1, 2, \cdots, n; \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Rightarrow x_i \leq y_i, \forall i=1, 2, \cdots, n; \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Rightarrow x_i \leq y_i, \forall i=1, 2, \cdots, n$, 且至少有一个 i 使得 $x_i < y_i$ 。

考虑如下多目标优化问题:

$$(\text{MOP}) \quad \min F(\mathbf{x})=(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_p(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in \chi。$$

^{*} 收稿日期: 2017-02-28 修回日期: 2018-04-14 网络出版时间: 2018-05-22 10:02

资助项目: 国家自然科学基金 (No. 11431004; No. 11671062; No. 11271391); 重庆市基础与前沿研究计划项目 (No. cstc2015jcyjA00027); 重庆市教委科学技术研究项目 (No. KJ1500303); 重庆市科委科学研究项目 (No. cstc2014jcyjA00004); 重庆市研究生科研创新项目 (No. CYS17174)

第一作者简介: 徐威娜, 女, 研究方向为多目标优化理论与方法, E-mail: doris_xwn@163.com; 通信作者: 赵克全, 男, 教授, 博士生导师, E-mail: kequanz@163.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180522.1002.038.html>

定义 1^[5] 假定 $x^* \in \chi$, 如果不存在 $x \in \chi$ 使得 $F(x) \leq F(x^*)$, 则称 x^* 是(MOP)的有效点, x^* 为(MOP)的 Pareto 有效解。

定义 2^[5] 假定 $x^* \in \chi$, 如果不存在 $x \in \chi$ 使得 $F(x) < F(x^*)$, 则称 x^* 是(MOP)的弱有效点, x^* 为(MOP)的弱 Pareto 有效解。

假设 $P(t)$ 和 $O(t)$ 分别为第 t 代父代和子代。基因算法的基本步骤为: 步骤 1, 赋初值; 步骤 1.1, 产生初始种群 $P(0)$; 步骤 1.2, 设置交叉概率、变异概率和最大迭代次数; 步骤 2, 当最大迭代次数未达到, 执行; 步骤 2.1, 交叉算子产生 $O_1(t)$; 步骤 2.2, 变异算子产生 $O_2(t)$; 步骤 2.3, 评估 $O_1(t)$ 和 $O_2(t)$, 计算适应度函数; 步骤 2.4, 选择算子构建下一代种群。

2 基于改进选择算子的多目标基因算法

本节从两方面对选择算子进行改进, 提出一种解决无约束多目标优化问题的基因算法。首先, 对选择算子的后代进行遴选时, 若一点被视为有效点, 则那些在 $\mathbf{R}_{++}^n$ 中的点则不是有效点, 可以去除该多余搜索空间。该判断可以保留种群内有效点且不影响后续迭代过程中有效点的选择。假设种群内有 n 个点且点 i_0 是有效点, 属于 $i_0 + \mathbf{R}_{++}^n$ 中点的数量为 m , 则在下一步中需要运算的点是 $n - m$ 个而不是 n , 新的计算量将少于原来的 $O(n^2)$ 。原先的种群数量和迭代步骤是巨大的, 该方法最大的优点在于可以减少计算的存储量和计算时间, 降低计算复杂度。

定理 1 如果点 $F(x_0)$ 在种群 N 中被判断为有效点, 则所有在 $F(x_0) + \mathbf{R}_{++}^n \setminus F(x_0)$ 中的点被定义为集合 M 。 $N - M$ 中全部有效点等价于 N 中有效点。

证明 假设 $F(x_0)$ 为 $N - M$ 中的有效点, 则任意 $F(x_1) \in N - M$, 不存在 $F(x_1) \leq F(x_0)$ 。又由定义可知, 任意 $F(x_2) \in M$ 使得 $F(x_2) \geq F(x_0)$, 则可得任意 $F(x) \in N$, 不存在 $F(x) \leq F(x_0)$ 。因此, $F(x_0)$ 为 N 中的有效点。

反之, $F(x_0)$ 为 N 中的有效点, 可得任意 $F(x) \in N$, 不存在 $F(x) \leq F(x_0)$ 。又由任意 $F(x_1) \in M$ 使得 $F(x_1) \geq F(x_0)$, 则 M 中无有效点。则任意 $F(x_1) \in N - M$, 不存在 $F(x_1) \leq F(x_0)$, $F(x_0)$ 为 $N - M$ 中的有效点。因此, $N - M$ 中全部有效点等价于 N 中全部有效点。 证毕

减少计算量的改进选择算子算法设计如下。

算法 1 步骤 1, 输入当前种群、目标函数值和被选择点的数量;

步骤 2, 当被选择点的数量没有达到或种群的大小没有填满, 求得 Pareto 前沿面;

步骤 3, 如果 y_i 是有效点, 则满足 $y_k \in y_i + \mathbf{R}_{++}^n$ 的 k 将被移出当前种群;

步骤 4, 表示 Pareto 前沿面。

对选择算子做出的改进还体现在选择点的多样性。为了获得均匀分布的解, 保持种群的多样性很重要。如果选择算子中没有体现多样性的原则, 在计算过程中种群趋于形式相对更少的一些集群, 则无法准确地描绘出完整的 Pareto 前沿面。因此, 刻画密集程度和判断其密度显得十分重要。

为保持种群点的密度, 若有效点位于 Pareto 前沿面的疏松区域, 则该有效点进入下一次迭代种群的概率越大。Pareto 前沿面的疏松区域定义为: 随机选出一个前沿面上的点当作参考点并计算该点到前沿面上其它点的距离, 并划分出最小和最大距离, 得到距离范围后进行等距隔断, 每一个间断中有效点的数量作为疏松程度的判断。若迭代过程中有效点数量减少, 则后续迭代时有效点分布将更稀疏。本文的选择算子不只是保持点的密度, 还保证得到尽可能完整的 Pareto 解。该方法的优点在于保持目标函数空间的全局密度性, 计算出的密度作为结果对于其他方法保持相似的计算有效性。

算法 2 步骤 1, 输入: 初始种群、初始种群的目标函数值和被选择点的数量($x_{\text{popu-size}}$)。

步骤 2, 当被选择点的数量没有达到或者种群数量没有充满, 则执行步骤 2.1。

步骤 2.1, Pareto 分层: 在种群目标函数值中选择 Pareto 点, Pareto 点集定义为 S , 并将 Pareto 点移出种群目标函数值。

步骤 2.2, 在 S 中动态控制被选择点的数量: $i = 1$, 如果 $\left\lceil \frac{x_{\text{popu-size}}}{i} \right\rceil$ 少于 S 的长度 $L(s)$, 则可以在 S 中选择点 $\left\lceil \frac{x_{\text{popu-size}}}{i} \right\rceil$, 否则 $i = i + 1$, 重复计算。

步骤 2.3, 判断有效点唯一性: 如果 $L(s) = 1$, 则在 S 中只有唯一有效点, 直接增加下一代种群, 返回步骤

2,否则返回步骤 2.4。
步骤 2.4,计算距离:随机选择 S 中点 x^* 作为参考点,计算 x^* 到 S 中所有点的距离,并定义该距离为 D 。令 a 为 D 中最小值, b 为 D 中最大值。

步骤 2.5,计算数量:将 $[a,b]$ 划分为相同长度的 n 个间隔,统计每一个间隔有效点的数量。令 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$,其中 $p(i)$ 为第 i 个间隔中有效点的数量。

步骤 2.6,计算被选择间隔的概率:若某一间隔没有包含 S 中任一有效点,则该间隔的概率为 0。若一间隔包含 S 中全部有效点,则概率为 1。否则,定义间隔概率为 $p(i)=1-\frac{p(i)}{\sum p(i)}$,并标准化 p 。

步骤 2.7,累计概率:累计 $p,p(i)\leftarrow p(i-1)+p(i),p(0)=0$ 。

步骤 2.8,使用轮盘赌策略选择一个点进入下一层种群:若随机数在 $[p(i-1),p(i)]$ 中,且 $p(0)=0$,则在第 i 个间隔中随机选择一个有效点,并将其放入下一次种群。

步骤 3,返回步骤 2 定义下一层 Pareto 前沿面。重复步骤 2 直到选择种群被填满,则每一个点都会被分类到某一 Pareto 前沿面。定义 Pareto 前沿面指标 $y\in S(t)$ 为 l_y 。

注 1 需要注意的是,在步骤 2.3 中动态控制 S 中被选择点的数量,不仅保证种群的多样性还遵循一种原则,即较低层次的 Pareto 前沿面需要选择更多的有效点。另外在步骤 2.6 中,概率的定义可表示为间隔的数量越少则间隔被选择的概率更大。本文改进的选择算子需要结合算法 1 和算法 2。这仅需要改变算法 2 的步骤 2.1 为:

步骤 2.1,Pareto 层:选择 sele-value 中的有效点 y_i ,有效点集被定义为 S ,并从 sele-value 中移除该有效点和位于 $y_i+\mathbf{R}^n_{++}$ 中的全部点。

3 数值实验

本节对改进的基因算法进行数值实验。首先,将算法应用于 3 个多目标测试函数^[11]。数值实验均在 Matlab 2010a 环境中执行。针对文献[10,15]中的测试函数,见表 1。图 1-3 描绘了这 3 个模型的目标函数值空间,曲线为 Pareto 前沿面。

表 1 多目标测试问题
Tab.1 Multi-objective text problems

问题	维数	定义域	目标函数	最优解	凸性
SCH	1	$[-5,10]$	$f_1(x)=x^2,f_2(x)=(x-2)^2$	$x\in[0,2]$	凸
FON	3	$[-4,4]$	$f_1(x)=1-\exp\left(-\sum_{i=1}^3\left(x_i-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$	$x_1=x_2=x_3\in\left[\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$	非凸
		$[-4,4]$	$f_2(x)=1-\exp\left(-\sum_{i=1}^3\left(x_i+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$		
KUR	3	$[-5,5]$	$f_1(x)=\sum_{i=1}^{n-1}(-10\exp(-0.2\sqrt{x_i^2+x_{i+1}^2}))$	见文献[11]	非凸
			$f_2(x)=\sum_{i=1}^n(x_i ^{0.8}+5\sin^3(x_i))$		

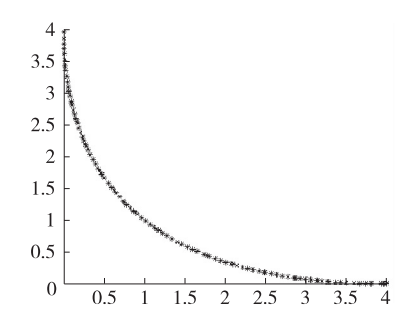


图 1 SCH
Fig.1 SCH

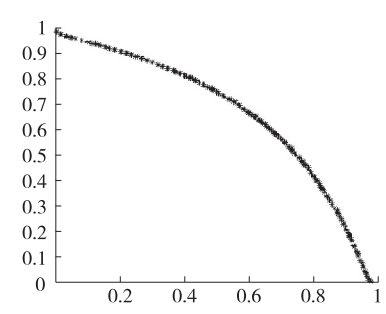


图 2 FON
Fig.2 FON

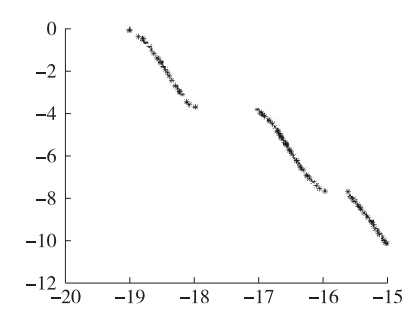


图 3 KUR
Fig.3 KUR

针对文献[10,15]中的测试问题。图 4-12 给出了这些测试问题的目标函数值空间,曲面或曲线代表了 Pareto 前沿面。在这些测试问题中,UF1-7 有 2 个目标函数,UF8-10 有 3 个目标函数,UF5-6 和 9 的 Pareto 点是不连续的。因 UF1 和 UF2 的图相似,这里只给出 UF1 的图。

本文使用文献[15]中的性能指标,这里用 H_{IGD} 表示,假设 P^* 是沿着 Pareto 前沿均匀分布点的集合,令 A 是求解得到的点集合。则 P^* 与 A 的平均距离定义为 $H_{IGD}(A,P^*) = \frac{\sum_{v \in P^*} d(v,A)}{|P^*|}$, 其中 $d(v,A) = \min_{y \in A} \|v-y\|$ 。 $H_{IGD}(A,P^*)$ 的数值越小意味着集合 A 更接近理论的 Pareto 前沿 P^* 且最终获得的点有更好的差异性。双目标问题的种群数量为 100,三目标问题的种群数量为 150,函数评估的数量少于 300 000。每次实验,独立运行算法 30 次, H_{IGD} 指标见表 2。

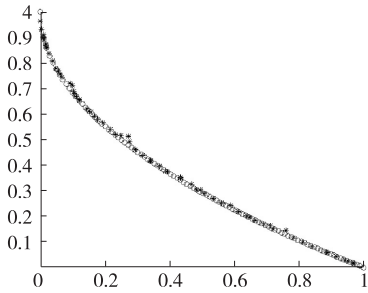


图 4 UF1
Fig. 4 UF1

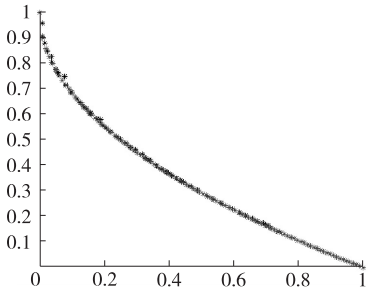


图 5 UF3
Fig. 5 UF3

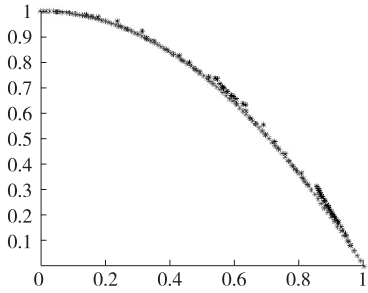


图 6 UF4
Fig. 6 UF4

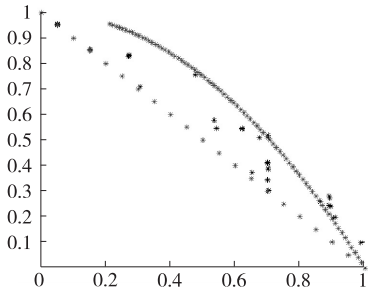


图 7 UF5
Fig. 7 UF5

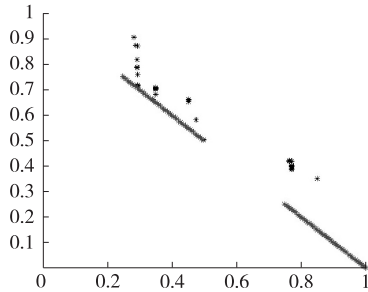


图 8 UF6
Fig. 8 UF6

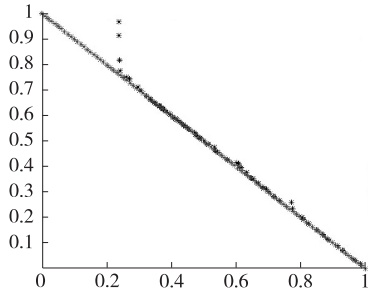


图 9 UF7
Fig. 9 UF7

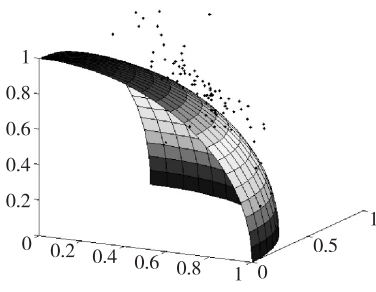


图 10 UF8
Fig. 10 UF8

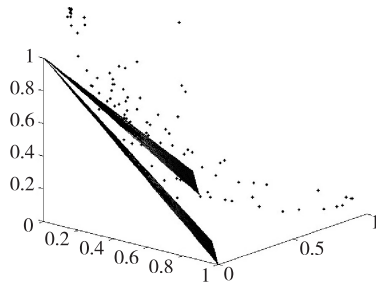


图 11 UF9
Fig. 11 UF9

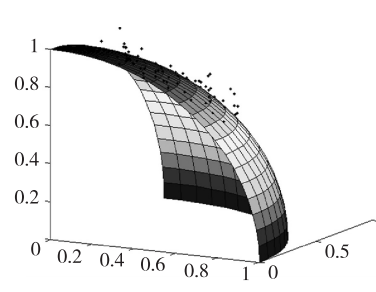


图 12 UF10
Fig. 12 UF10

表 2 H_{IGD} 的数值性能
Tab. 2 Numerical performance of H_{IGD}

函数	UF1	UF2	UF3	UF4	UF5	UF6	UF7	UF8	UF9	UF10
平均值	0.009 6	0.008 5	0.038 4	0.016 4	0.103 8	0.120 0	0.062 5	0.132 3	0.101 1	0.163 0
最小值	0.006 4	0.006 2	0.008 0	0.010 3	0.079 1	0.032 4	0.025 3	0.092 8	0.073 4	0.100 2
最大值	0.020 7	0.018 0	0.118 5	0.021 6	0.170 3	0.438 9	0.121 5	0.191 7	0.151 8	0.252 1

从表 2 中可得,算法在解决 UF2 中执行效果最好, H_{IGD} 平均值为 0.008 5。UF1-2 的 H_{IGD} 平均值少于 0.01。UF3,4,7 的 H_{IGD} 平均值介于 0.01 和 0.10。其他问题的 H_{IGD} 值在 0.10 和 0.20 之间。

参考文献:

- [1] 林铨云,董家礼.多目标最优化的方法与理论[M].吉林:吉林教育出版社,1992.
LIN C Y,DONG J L. The method and theory of multi-objective optimization[M]. Jilin: Jinlin Education Publishing House,1992.
- [2] 胡毓达.多目标决策[M].上海:上海科学技术出版社,2010.
HU Y D. Multi-objective decision[M]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers,2010.
- [3] CHANKONG V, HAIMES Y. Multiobjective decision making: theory and methodology[M]. New York: Elsevier Science Publishing Co,1983.
- [4] EHRGOTT M. Multicriteria optimization[M]. Berlin, Heidelberg: Springer,2005.
- [5] CHINCHULUUN A, PARDALOS P M. A survey of recent developments in multiobjective optimization[J]. Annals of Operations Research,2007,154:29-50.
- [6] SCHAFFER J D. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms[C]// GREFENSTETTE J J. Proceedings of an International Conference on Genetic Algorithms and Their Applications, Pittsburgh, PA, USA: [s. n.],1985:93-100.
- [7] HAJELA P, LIN C Y. Genetic search strategies in multi-criterion optimal design[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization,1992,4(2):99-107.
- [8] FONSECA C M, FLEMING P J. Multiobjective genetic algorithms[C]//IEEE. IEE Colloquium on Genetic Algorithms for Control Systems Engineering. London, UK: IET,1993(6):1-5.
- [9] LONG Q. A constraint handling technique for constrained multi-objective genetic algorithm[J]. Swarm and Evolutionary Computation,2013,15:66-79.
- [10] LONG Q, WU C, HUANG T, et al. A genetic algorithm for unconstrained multi-objective optimization[J]. Swarm and Evolutionary Computation,2015,22:1-14.
- [11] DEB K, PRATAP A, AGARWAL S, et al. A fast and elitist multi objective genetic algorithm: NSGA-II[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation,2002,6(2):182-197.
- [12] GAO S, ZENG S Y, XIAO B, et al. An orthogonal multi-objective evolutionary algorithm with lower-dimensional crossover[C]//IEEE. Proceedings of the Eleventh conference on Congress on Evolutionary Computation. Piscataway, NJ, USA: IEEE Press,2009:1959-1964.
- [13] CHEN C M, CHEN Y P, ZHANG Q F. Enhancing MOEA/D with Guided Mutation and Priority Update for Multi-objective Optimization[C]//IEEE. Proceedings of the Eleventh conference on Congress on Evolutionary Computation. Piscataway, NJ, USA: IEEE Press,2009:209-216.
- [14] ZHANG Q, SUGANTHAN P. Final report on CEC'09 MOEA competition[C]//IEEE. Proceedings of the Eleventh conference on Congress on Evolutionary Computation. Piscataway, NJ, USA: IEEE Press,2009:569-580.
- [15] ZHANG Q F, ZHOU A M, ZHAO S Z, et al. Multi-objective optimization test instance for the CEC 2009 Special session and computaiton[EB/OL]. (2009-04-20)[2017-02-15]. <http://dces.essex.ac.uk/staff/qzhang/MOEA-competition/cec09testproblem0904.pdf>, pdf.

Operations Research and Cybernetics

Improved Multi-objective Optimization Genetic Algorithm Based on Selection Operater

XU Weina, WANG Dingguo, ZHAO Kequan

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] To improve the effectiveness of multi-objective genetic algorithm was for the sake of obtaining a more real Pareto front. [Methods] Computational complexity was reduced by using the definition of effective point. And on the basis of dynamic programming for sorting Pareto frontiers, a density index depicting the degree of density of points in a Pareto frontier, was defined, which in return, could leave selected points with great difference more than other points and become much closer to Pareto frontier. [Findings] The multi-objective genetic algorithm was improved by reducing the computational complexity and increasing the diversity of selected points. [Conclusions] Numerical experimental result shows that this method is efficient.

Keywords: genetic algorithm; multi-objective optimization; Pareto frontier; selection operator

(责任编辑 黄 颖)