2018 年 5 月　　重庆师范大学学报(自然科学版)　　May 2018
第 35 卷 第 3 期　　Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)　　Vol. 35 No. 3

DOI:10.11721/cqnuj20180321

关于一些交错单群的 ONC-刻画*

何立官，童 殷
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】为了弱化有限群数量刻画的数量条件。【方法】用第一 ONC-度量 $\mathrm{ONC}_1(G)$ 刻画了交错单群 $A_n(5\leqslant n\leqslant 13)$。【结果】证明了 $A_n(n=5,6,7,10,11,13)$ 可以由 $\mathrm{ONC}_1(G)$ 唯一确定，而 A_8,A_9,A_{12} 可由 $\mathrm{ONC}_1(G)$ 和 $l_p(G)$ 唯一确定。【结论】结果说明交错单群 $A_n(5\leqslant n\leqslant 13)$ 最多需要 4 个数量就可以唯一刻画。

关键词:交错单群;ONC-度量;ONC-刻画

中图分类号:O152.1　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2018)03-0090-06

1 预备知识与符号说明

20 世纪 80 年代，Fields 奖获得者 J. G. Thompson 提出“同阶型群具有相同的可解性”这一著名猜想，即：

猜想 1(J. G. Thompson 猜想)　设 G,M 都是有限群，$S_n(G)$ 表示群 G 中 n 阶元组成的集合。如果 $|S_n(G)|=|S_n(M)|$，$n=1,2,3\cdots$，那么 G 与 M 有相同的可解性，即 G 可解当且仅当 M 可解。

同一时期，施武杰教授提出“用群阶和元素阶之集刻画有限单群”的著名猜想[1]，即：

猜想 2(施武杰猜想)　设 G 是有限群，M 是有限单群。则 $G\cong M$ 当且仅当 $|G|=|M|$ 且 $\pi_e(G)=\pi_e(M)$，其中 $\pi_e(G)$ 表示群 G 中元素阶的集合。

猜想 2 于 2009 年被完全证明[2-9]，但如何弱化猜想的条件就成为大家关注的热点问题。在文献[10-15]中，作者仅用高阶元的阶和群的阶刻画了系列单群，局部的弱化了猜想 2 的条件。而猜想 1 至今都没有得到完整的解决，但人们从最高阶元的个数出发，证明了猜想在一些特殊条件下是成立的[16-20]。这些工作足以说明最高阶元在刻画群的性质结构中有着特殊的地位。受以上工作的启发，本研究试图去掉“同阶型群”、“群阶相等”、“元素阶集合相同”这些重要的数量条件，只用与最高阶元素有关的几个数量来刻画有限群特别是有限单群。为了叙述方便，下面对本文中出现的一些符号加以说明。

设 G 是有限群，$\pi_e(G)$ 表示群 G 中元素阶的集合。i 是一个正整数，$\pi(i)$ 表示 i 的相异素因子的集合，$\pi(G)=\pi(|G|)$，$l_p(G)$ 表示 $\pi(G)$ 中的最大素因子。$o_1(G)$ 表示 G 中最高阶元素的阶，$n_1(G)$ 表示 G 中最高阶元素的个数。设 G 一共有 r 个 $o_1(G)$ 阶元，且中心化子的阶两两不同，并依次设这些中心化子的阶为 $c_1(G),c_2(G),\cdots,c_r(G)$。令 $\mathrm{ONC}_1(G)=\{o_1(G);n_1(G);c_1(G),c_2(G),\cdots,c_r(G)\}$。称 $\mathrm{ONC}_1(G)$ 为 G 的第一 ONC-度量。$m^k\parallel n$ 表示 $m^k\mid n$ 但 $m^{k+1}\nmid n$。设 K,H 是两个群，用 $K\cdot H$ 表示 K 由 H 的半直积。其余符号及术语是标准的。

设 G 为一个有限群，H 是任意群。如果当 $\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(H)$ 时，一定有 $G\cong H$，那么称 G 是可以 ONC-刻画的。本文主要讨论文献[21]中出现的交错单群 $A_n(5\leqslant n\leqslant 13)$ 的 ONC-刻画。

2 主要引理

引理 1[22]　设 π'-群 H 作用在 π-群 G 上，且 G 和 H 中至少有一个可解。则对任意素数 $p\mid |G|$，G 中存在 H-不变的 Sylow p-子群，并且 G 的任意两个 H-不变 Sylow p-子群在 $C_G(H)$ 下共轭。

* **收稿日期:**2017-01-08　**修回日期:**2018-04-06　**网络出版时间:**2018-05-22 10:01

资助项目:国家自然科学基金(No. 11271301);重庆市基础与前沿研究计划(No. cstc2015jcyjA00020);重庆市教委科技项目(No. KJ1600325)

第一作者简介:何立官，男，副教授，博士，研究方向为有限群，E-mail:guanlihe@126.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180522.1001.008.html

3 定理及其证明

定理 1　设 G 为有限群,M 为 $A_n(n=5,6,7,10,11,13)$。则 $G\cong M$ 的充分必要条件是 $\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(M)$。

证明　必要性显然,只讨论充分性。

只讨论 $n=7,10,11$ 的情形,至于 $n=5,6,13$,类似可证。

情形 1,当 $n=7$ 时,有 $G\cong A_7$。

此时 $\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(A_7)=\{7;2^4\cdot 3^2\cdot 5;7\}$。因为 G 的 7 阶元都是自中心化的,所以任何 7 阶元 a 所在的共轭类长度都是 $\left|G/C_G(\langle a\rangle)\right|=\left||G|/\langle a\rangle\right|=|G|/7$。设 G 的 7 阶元一共分为 t 个共轭类,则 $t\cdot |G|/7=2^4\cdot 3^2\cdot 5$,从而有 $|G|\,\big|\,2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$。由 $n_1(G)=2^4\cdot 3^2\cdot 5$ 知 $|G|>2^4\cdot 3^2\cdot 5$。因为 $o_1(G)=7$,所以 $7\in\pi(G)$。如果 $2\notin\pi(G)$,那么 $|G|=3^2\cdot 5\cdot 7<2^4\cdot 3^2\cdot 5$,矛盾,故 $2\in\pi(G)$。同理可证 $3\in\pi(G)$。如果 $5\notin\pi(G)$,那么 $|G|=2^4\cdot 3^2\cdot 7$。设 x 为 G 的 Sylow 7-子群的个数,则 $x=7k+1$ 且 $x\,|\,2^4\cdot 3^2$,显然 $5\nmid x$。而 $n_1(G)=6x=2^4\cdot 3^2\cdot 5$,矛盾,故 $5\in\pi(G)$。于是有 $\pi(G)=\{2,3,5,7\}$。

因为 $|G|\,\big|\,2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$ 且 $o_1(G)=7$,因此可以断言 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$,其中 K/H 为非交换单群,且 $5,7\in\pi\left(H/H\right)$。事实上,令 $1=G_k\lhd G_{k-1}\lhd\cdots\lhd G_1\lhd G_0=G$ 为 G 的一主群列,则存在正整数 i 使得 $\{5,7\}\cap\pi(G_i)\neq\varnothing$,而 $\{5,7\}\cap\pi(G_{i+1})=\varnothing$。取 $K=G_i$,$H=G_{i+1}$,则 $1\lhd H\lhd K\lhd G$ 为 G 的正规列,而 K/H 为 G/H 的极小正规子群。断言 $\{5,7\}\subseteq\pi(K)$。如果 $7\in\pi(K)$ 而 $5\notin\pi(K)$,那么 $5\in\pi\left(G/K\right)$。由 Frattini 论断有 $G=N_G(S_7)K$,其中 S_7 为 K 的一个的 7-Sylow 子群。于是 $5\in\pi(N_G(S_7))$,从而 $35\in\pi_e(G)$,矛盾,故 $5\in\pi(K)$。同理可证,当 $5\in\pi(K)$ 时,$7\in\pi(K)$。所以 $\{5,7\}\subseteq\pi(K)$,即 $\{5,7\}\subseteq\pi\left(K/H\right)$。由于 K/H 为同构单群的直积,故 K/H 只能为非交换单群。而 $|G|\,\big|\,2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$,由文献[21]知只有 $K/H\cong A_7(2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)$。如果 $|G|=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$,那么 $H=1$,$G=K$,即 $G\cong A_7$。设 $|G|=2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$。因为 $|\mathrm{Out}(A_7)|=2$,所以 $\left|G/K\right|=1$ 或 2。如果 $\left|G/K\right|=1$,那么有 $|H|=2$。用 G 中的 7 阶元作用在 H 上,该作用平凡,从而 $14\in\pi_e(G)$,矛盾。因此 $|G/K|=2$。此时 $K/H=K\cong A_7$,故 $G=A_7\times Z_2$ 或 $G=A_7\cdot Z_2$,其中 $G=A_7\cdot Z_2$ 表示 A_7 由 Z_2 的半直积。如果 $G=A_7\times Z_2$,则 $14\in\pi_e(G)$,矛盾。如果 $G=A_7\cdot Z_2$,则 $12\in\pi_e(G)$,矛盾。于是 $G\cong A_7$。

情形 2,当 $n=10$ 时,有 $G\cong A_{10}$。

此时 $\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(A_{10})=\{21;2^8\cdot 3^3\cdot 5^2;21\}$。类似情形 1 的讨论知 $\pi(G)=\{2,3,5,7\}$,且 $|G|\,\big|\,2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$。由于 $|G|>n_1(G)=2^8\cdot 3^3\cdot 5^2$,所以 $3^3\,\big|\,|G|$ 或 $5^2\,\big|\,|G|$。类似可证 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$,其中 K/H 为非交换单群,且 $5,7\in\pi\left(K/H\right)$。由文献[21]知 $K/H=A_7(2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)$,$L_3(4)(2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)$,$A_8(2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)$,$A_9(2^6\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7)$,$J_2(2^7\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7)$ 或 $A_{10}(2^7\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7)$。

设 $K/H=A_7$。由 $G/C_G\left(K/H\right)$ 同构于 $\mathrm{Aut}\left(K/H\right)$ 的一个子群知 $\left|G/C_G\left(K/H\right)\right|\,\Big|\,\left|\mathrm{Aut}\left(K/H\right)\right|$,而 $\left|\mathrm{Aut}\left(K/H\right)\right|=2\times\left|K/H\right|=2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$。如果 $5^2\,\big|\,|G|$,那么由比较阶得 $5\in\pi\left(C_G\left(K/H\right)\right)$。如果 $5\in\pi(H)$,那么用 G 中的 7 阶元共轭作用在 H 的 Sylow 5-子 L 群上,该作用平凡,从而 $35\in\pi_e(G)$,矛盾。于是 $5\notin\pi(H)$。设 g 为 $C_G\left(K/H\right)$ 中的 5 阶元。则 $|gH|=5$,从而 $K/H\cong A_7$ 中有 35 阶元,矛盾。故 $5\,\|\,|G|$,从而 $|G|=2^x\cdot 3^y\cdot 5\cdot 7$,其中 $6\leqslant x\leqslant 8$,$3\leqslant y\leqslant 4$。此时 $|H|\,\big|\,2^5\cdot 3^2$。设 g 为 G 中的任一 21 阶元。由于 $\mathrm{Aut}\left(K/H\right)=\mathrm{Aut}(A_7)$ 中没有 21 阶元,所以 $|gH|=7$。如果 $gH\in C_G\left(K/H\right)$,那么 $35\in\pi_e\left(K/H\right)$,矛盾。于是对 G 中的任一 21 阶元 g,有

$|gH|=7$ 且 $gH\notin C_G\left(K/H\right)$。因为 G 中一共有 $n_1(G)=2^8\cdot3^3\cdot5^2$ 个 21 阶元,且 $|H|\,\big|\,2^5\cdot3^2$,所以 $G/C_G(K/H)$ 中至少有 $2^3\cdot3\cdot5^2$ 个 7 阶元,特别地 $G/C_G(K/H)$ 中 7 阶元的个数一定是 5^2 的倍数。而 $\mathrm{Aut}\left(K/H\right)=\mathrm{Aut}(A_7)$ 中 7 阶元的个数为 $2^4\cdot3^2\cdot5$,矛盾。故 $K/H\neq A_7$。同理可证 $K/H\neq L_3(4),A_8,A_9$。

设 $K/H=J_2$。如果 $|G|=2^7\cdot3^3\cdot5^2\cdot7$,那么 $G=J_2$,但 J_2 中没有 21 阶元,矛盾。故设 $|G|=2^x\cdot3^y\cdot5^2\cdot7$,其中 $x=8$ 或 $y=4$。仍然有 $G/C_G(J_2)$ 同构于 $\mathrm{A}ut(J_2)$的一个子群。若 $H=1$,则 $K/H=K=J_2$。设 g 为 G 中的 21 阶元。由于 $\mathrm{Aut}(J_2)$中没有 21 阶元,所以 $g\in C_G(J_2)$,从而 $42\in\pi_e(G)$,矛盾。如果 $|H|=2$,那么用 G 中的 21 阶元共轭作用在 H 上,有 $42\in\pi_e(G)$,矛盾。若 $H=3$,且 $G/K=1$,则 $K/H=G/H=J_2$。设 g 为 G 中的 21 阶元。由于 J_2 中没有 21 阶元,所以 $|gH|=7$。于是 G/H 中有 $2^8\cdot3^2\cdot5^2$ 个 7 阶元,但 J_2 中却有 $2^7\cdot3^3\cdot5^2$ 个 7 阶元,矛盾。于是设 $|H|=3$,且 $\left|G/K\right|=2$。此时 $G/H=J_2\times Z_2$ 或 $G/H=J_2\cdot Z_2$,但不管是哪种情形,G 中都有阶大于 21 的元,矛盾。如果 $|H|=6$,那么 $G/H=1$,$K/H=G/H=J_2$。设 g 为 G 中的 21 阶元。由于 J_2 中没有 21 阶元,所以 $|gH|=7$。于是 G/H 中有 $2^7\cdot3^2\cdot5^2$ 个 7 阶元,但 J_2 中却有 $2^7\cdot3^3\cdot5^2$ 个 7 阶元,矛盾。

于是设 $K/H\cong A_{10}$。此时 $|G|=2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$ 或 $|G|=2^7\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$。先设 $|G|=2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$。若 $H\neq1$,则 $|H|=2$。用 G 中的 21 阶元作用在 H 上,该作用平凡,从而 $42\in\pi_e(G)$,矛盾。于是 $H=1$,此时 $G=A_{10}\times Z_2$ 或 $G=A_{10}\cdot Z_2$,但不管是哪种情形,都有 $o_1(G)\neq21$,矛盾。故 $|G|=2^7\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$,从而有 $H=1$,$G=K$,即 $G\cong A_{10}$。

情形 3,当 $n=11$ 时,有 $G\cong A_{11}$。

此时 $\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(A_{11})=\{21;2^8\cdot3^3\cdot5^2\cdot11;21\}$。类似情形 1 的证明知 $|G|\,\big|\,2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7\cdot11$,且 $\{2,3,5,7\}\subseteq\pi(G)$。下证 $11\in\pi(G)$。

如果 $11\notin\pi(G)$,那么 $|G|=2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$。可以证明 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$,其中 K/H 为非交换单群,且 $5,7\in\pi\left(K/H\right)$。因为 $\left|K/H\right|\,\big|\,2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$,所以由文献[21]知 K/H 同构于 $A_7(2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7)$,$A_8(2^6\cdot3^2\cdot5\cdot7)$,$L_3(4)(2^6\cdot3^2\cdot5\cdot7)$,$J_2(2^7\cdot3^2\cdot5^2\cdot7)$,$A_9(2^6\cdot3^4\cdot5\cdot7)$或 $A_{10}(2^7\cdot3^4\cdot5^2\cdot7)$。

设 $K/H\cong A_7A_8,L_3(4),A_9$。如果 $5\,\big|\,|H|$,那么用 G 中的 7 阶元 g 共轭作用在 H 上,由引理 1 知存在 H 的 Sylow 5-子群 L 在该作用下不变。因为 $|L|=5$,所以 $7\nmid|\mathrm{Aut}(L)|$,即该作用为平凡作用,于是 $35\in\pi_e(G)$,矛盾。故 $5\nmid|H|$,即 H 至多为(2,3)-群。由 N/C 定理知 $G/C_G(K/H)$ 同构于 $\mathrm{Aut}(K/H)$的一个子群,即有 $\left|G/C_G(K/H)\right|\,\big|\,|\mathrm{Aut}(K)|$。比较阶知 $5\in\pi\left(C_G\left(K/H\right)\right)$。设 g 为 $C_G\left(K/H\right)$中的一个 5 阶元,由于 $5\nmid|H|$,故 $|Hg|=5$,从而有 $35\in\pi_2\left(K/H\right)$,矛盾。

设 $K/H\cong A_{10}$。如果 $|H|=2$,那么用 G 中的 21 阶元 g 共轭作用在 H 上,有 $42\in\pi_e(G)$,矛盾。故 $|H|=1$,此时有 $G=A_{10}\times Z_2$ 或 $G=A_{10}\cdot Z_2$,其中 $G=A_{10}\cdot Z_2$ 表示 A_{10} 由 Z_2 的半直积。如果 $G=A_{10}\times Z_2$,则 $42\in\pi_e(G)$,矛盾。如果 $G=A_{10}\cdot Z_2$,则 $30\in\pi_e(G)$,矛盾。

设 $K/H\cong J_2$。此时 $|H|\,\big|\,2\cdot3^2$。由 N/C 定理知 $G/C_G(K/H)$ 同构于 $\mathrm{Aut}\left(K/H\right)$的一个子群。设 g 为 G 中的

任一 21 阶元。由于 $\mathrm{Aut}\left(K/H\right)=\mathrm{Aut}(J_2)$ 中没有 21 阶元，所以 $|gH|=7$。如果 $gH\in C_G\left(K/H\right)$，那么 $35\in\pi_e\left(K/H\right)$，矛盾。于是对 G 中的任一 21 阶元 g，都有 $|gH|=7$ 且 $gH\notin C_G\left(K/H\right)$。因为 G 中一共有 $n_1(G)=2^8\cdot3^3\cdot5^2\cdot11$ 个 21 阶元，且 $|H|\,\big|\,2\cdot3^2$，所以 $G/C_G\left(K/H\right)$ 中至少有 $n_1(G)=2^7\cdot3^2\cdot5^2\cdot11$ 个 7 阶元，特别地 $G/C_G\left(K/H\right)$ 中 7 阶元的个数一定是 11 的倍数。而 $\mathrm{Aut}\left(K/H\right)=\mathrm{Aut}(J_2)$ 中 7 阶元的个数为 $2^7\cdot3^3\cdot5^2$，矛盾。

故 $11\in\pi(G)$，即 $\pi(G)=\{2,3,5,7,11\}$。此时 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，其中 K/H 为非交换单群，且 $7,11\in\pi\left(K/H\right)$。又因为 $|G|\,\big|\,2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7\cdot11$ 且 $n_1(G)=2^8\cdot3^3\cdot5^2\cdot11$，故由文献[21]知 $K/H\cong M_{22}(2^7\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11)$ 或 $A_{11}(2^7\cdot3^4\cdot5^2\cdot7\cdot11)$。

设 $K/H\cong M_{22}$。由 $n_1(G)=2^8\cdot3^3\cdot5^2\cdot11$ 知 $|G|>2^7\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11$。从而设 $|G|=2^x\cdot3^y\cdot5^z\cdot7\cdot11$，其中 $x=8$ 或 $3\leqslant y\leqslant4$ 或 $z=2$。如果 $|H|\neq1$，则 $p\,\big|\,|H|$，其中 $p=2,3$ 或 5。用 G 中的 11 阶元 g 共轭作用在 H 上，由引理 1 知存在 H 的 Sylow p-子群 L 在该作用下不变。因为 $|L|\,\big|\,p^2$，所以 $11\nmid|\mathrm{Aut}(L)|$，即该作用为平凡作用，于是 G 中有阶大于 21 的元，矛盾。于是 $|H|=1$，从而有 $K/H=K\cong M_{22}$。由 N/C 定理知 $G/C_G(M_{22})$ 同构于 $\mathrm{Aut}(M_{22})$ 的一个子群。设 g 为 G 中的 21 阶元。由于 $\mathrm{Aut}(M_{22})$ 中没有 21 阶元，所以 $g\in C_G(M_{22})$，从而 $42\in\pi_e(G)$，矛盾。

设 $K/H\cong A_{11}$。先设 $|G|=2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7\cdot11$。若 $|H|\neq1$，则 $|H|=2$。用 G 中的 11 阶元 g 共轭作用在 H 上，则有 $22\in\pi_e(G)$，矛盾。于是 $|H|=1$，从而 $G=A_{11}\times Z_2$ 或 $G=A_{11}\cdot Z_2$。若 $G=A_{11}\times Z_2$，则 $22\in\pi_e(G)$，矛盾。若 $G=A_{11}\cdot Z_2$，则 $o_1(G)=30$，矛盾。故 $|G|=2^7\cdot3^4\cdot5^2\cdot7\cdot11$，则有 $H=1,K=G$，即 $G\cong A_{11}$。　　证毕

定理 2　设 G 为有限群，M 为 $A_n(n=8,9,12)$。则 $G\cong M$ 的充要条件 $\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(M)$ 且 $l_p(G)=l_p(M)$。

证明　必要性显然，下证充分性。只讨论 $n=8,9$ 的情形，至于 $n=12$，类似可证。

情形 1，当 $n=8$ 时，有 $G\cong A_8$。

此时 $\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(A_8)=\{15;2^7\cdot3\cdot7;15\}$，且 $l_p(G)=7$。类似情形 1 的讨论知 $\pi(G)=\{2,3,5,7\}$ 且 $|G|\,\big|\,2^7\cdot3^2\cdot5\cdot7$，同时 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，其中 K/H 为非交换单群，且 $5,7\in\pi\left(K/H\right)$。由文献[21]知有 K/H 同构于 $A_7(2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7)$，$L_3(4)(2^6\cdot3^2\cdot5\cdot7)$ 或 $A_8(2^6\cdot3^2\cdot5\cdot7)$。

设 $K/H\cong A_7$。由 $n_1(G)=2^7\cdot3^3\cdot7$ 知 $|G|>2^7\cdot3\cdot7$。从而设 $|G|=2^x\cdot3^2\cdot5\cdot7$，其中 $x\geqslant4$。如果 $|H|\neq1$，则 H 为 2-群。设 g 为 G 中的 15 阶元，则 $|gH|=15$。因为 $G/C_G\left(K/H\right)$ 同构于 $\mathrm{Aut}\left(K/H\right)$ 的一个子群，而 $\mathrm{Aut}\left(K/H\right)=\mathrm{Aut}(A_7)$ 中没有 15 阶元，所以 $gH\in C_{G/H}\left(K/H\right)$，即 $30\in\pi_e(G)$，矛盾。于是 $|H|=1$，从而有 $K/H=K\cong A_7$。此时 $G/C_G(A_7)$ 同构于 $\mathrm{Aut}(A_7)$ 的一个子群。设 g 为 G 中的 15 阶元。由于 $\mathrm{Aut}(A_7)$ 中没有 15 阶元，所以 $g\in C_G(A_7)$，即 $30\in\pi_e(G)$，矛盾。

设 $K/H\cong L_3(4)$。此时 $|G|=2^x\cdot3^2\cdot5\cdot7$，其中 $6\leqslant x\leqslant7$。如果 $|G|=2^6\cdot3^2\cdot5\cdot7$，那么 $H=1,G=K$，即 $G\cong L_3(4)$。于是有 $o_1(G)=o_1(L_3(4))=7$，矛盾。设 $|G|=2^7\cdot3^2\cdot5\cdot7$。若 $H\neq1$，则 $|H|=2$。用 G 中的 15 阶元作用在 H 上，该作用平凡，从而 $30\in\pi_e(G)$，矛盾。于是 $H=1$，此时 $G=L_3(4)\times Z_2$ 或 $G=L_3(4)\cdot Z_{2_1}$ 或 $G=L_3(4)\cdot Z_{2_2}$ 或 $G=L_3(4)\cdot Z_{2_3}$，其中 Z_{2_1},Z_{2_2},Z_{2_3} 为 $\mathrm{Out}(L_3(4))$ 的 3 个 2 阶元。不管是哪种情形，都有 $o_1(G)\neq15$，矛盾。

设 $K/H\cong A_8$。此时 $|G|=2^x\cdot3^2\cdot5\cdot7$，其中 $6\leqslant x\leqslant7$。先设 $|G|=2^7\cdot3^2\cdot5\cdot7$。若 $H\neq1$，则 $|H|=2$。用

G 中的15阶元作用在 H 上,该作用平凡,从而 $30\in\pi_e(G)$,矛盾。于是 $H=1$,此时 $G=A_8\times Z_2$ 或 $G=A_8\cdot Z_2$,但不管是哪种情形,都有 $o_1(G)\neq 15$,矛盾。故 $|G|=2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$,从而有 $H=1,G=K$,即 $G\cong A_8$。

情形2,当 $n=9$ 时,有 $G\cong A_9$。

此时 $\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(A_9)=\{15;2^7\cdot 3^3\cdot 7;15\}$,且 $l_p(G)=7$。类似情形1的讨论知 $\pi(G)=\{2,3,5,7\}$ 且 $|G|\,\big|\,2^7\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$。由于 $|G|>n_1(G)=2^7\cdot 3^3\cdot 7$,所以 $3^3\,\big|\,|G|$ 或 $2^7\,\big|\,|G|$。G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$,其中 K/H 为非交换单群,且 $5,7\in\pi(K/H)$。由文献[21]知有 K/H 同构于

$$A_7(2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7),L_3(4)(2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7),A_8(2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)\text{或}A_9(2^6\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7)。$$

设 $K/H\cong A_7$。如果 $|H|=1$ 则有 $K/H=K\cong A_7$。此时 $G/C_G(A_7)$ 同构于 $\mathrm{Aut}(A_7)$ 的一个子群。设 g 为 G 的15阶元。由于 $\mathrm{Aut}(A_7)$ 中没有15阶元,所以 $g\in C_G(A_7)$,即 $30\in\pi_e(G)$,矛盾。如果 $|H|\neq 1$,则 H 为(2,3)-群。若 $3\,\big|\,|H|$,用 G 的7阶元共轭作用在 H 的Sylow 3-子群上,该作用平凡,从而 $21\in\pi_e(G)$,矛盾。故 $3\nmid|H|$,即 H 为2-群。设 g 为 G 中的15阶元。则 $|gH|=15$。因为 $G/C_G(K/H)$ 同构于 $\mathrm{Aut}(K/H)$ 的一个子群,而 $\mathrm{Aut}(K/H)=\mathrm{Aut}(A_7)$ 中没有15阶元,所以 $gH\in C_{G/H}(K/H)$,即 $30\in\pi_e(G)$,矛盾。

设 $K/H\cong L_3(4)$。如果 $H=1$,那么 $K\cong L_3(4)$。$G/C_G(L_3(4))$ 同构于 $\mathrm{Aut}(L_3(4))$ 的一个子群,从而 $\left|G/C_G(L_3(4))\right|\,\big|\,|\mathrm{Aut}(L_3(4))|$。由于 $\mathrm{Out}(L_3(4))=Z_2\times S_3$,所以 $|\mathrm{Aut}(L_3(4))|=2^8\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7$。如果 $3^4\,|\,|G|$,那么 $3\in\pi_e(C_G(L_3(4)))$,从而有 $21\in\pi_e(G)$,矛盾。于是设 $3^3\,\big|\,|G|$。此时 $|G|=2^7\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7$ 或 $|G|=2^6\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7$。由文献[21]知 $G\cong L_3(4)\times Z_2,G\cong L_3(4)\times Z_3,G\cong L_3(4)\times Z_6$ 或 $G\cong L_3(4)\cdot Z_2,G\cong L_3(4)\cdot Z_3,G\cong L_3(4)\cdot Z_6$,但不管是哪种情形,都有 $o_1(G)\neq 15$,矛盾。如果 $|H|\neq 1$,则 H 为(2,3)-群。若 $3\,\big|\,|H|$,用 G 的7阶元共轭作用在 H 的Sylow 3-子群上,该作用平凡,从而 $21\in\pi_e(G)$,矛盾。于是设 $3\nmid|H|$,即 H 为2-群且 $|H|=2$。用 G 的15阶元共轭作用在 H 上,该作用平凡,从而 $30\in\pi_e(G)$,矛盾。

设 $K/H\cong A_8$。若 $H=1$,则 $K\cong A_8$。$G/C_G(A_8)$ 同构于 $\mathrm{Aut}(A_8)$ 的一个子群,从而 $\left|G/C_G(A_8)\right|\,\big|\,|\mathrm{Aut}(A_8)|$。由于 $|\mathrm{Out}(A_8)|=2$,所以 $|\mathrm{Aut}(A_8)|=2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$。如果 $3^3\,\big|\,|G|$,那么 $3\in\pi_e(C_G(A_8))$,从而有 $21\in\pi_e(G)$,矛盾。于是设 $3^2\parallel|G|$。此时 $|G|=2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$。由文献[21]知 $G=A_8\times Z_2$ 或 $G=A_8\cdot Z_2$。如果 $G=A_8\times Z_2$,那么 $o_1(G)=30$,矛盾。如果 $G=A_8\cdot Z_2$,则有 $n_1(G)=2^7\cdot 3\cdot 7$,矛盾。如果 $|H|\neq 1$,则 H 为(2,3)-群。若 $3\,\big|\,|H|$,用 G 的7阶元共轭作用在 H 的Sylow 3-子群上,该作用平凡,从而 $21\in\pi_e(G)$,矛盾。于是设 $3\nmid|H|$,即 H 为2-群且 $|H|=2$。用 G 的15阶元共轭作用在 H 上,该作用平凡,从而 $30\in\pi_e(G)$,矛盾。

设 $K/H\cong A_9$。此时 $|G|=2^6\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$ 或 $|G|=2^7\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$。先设 $|G|=2^7\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$。若 $H\neq 1$,则 $|H|=2$。用 G 中的15阶元作用在 H 上,该作用平凡,从而 $30\in\pi_e(G)$,矛盾。于是 $H=1$,此时 $G=A_9\times Z_2$ 或 $G=A_9\cdot Z_2$,但无论哪种情形,都有 $o_1(G)\neq 15$,矛盾。故 $|G|=2^6\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$,则有 $H=1,G=K$,即 $G\cong A_9$。 证毕

参考文献:

[1] MAZUROV V D, KHUKHRO E I. Unsolved problems in group theory, russian academy of sciences[M]. Novosibirsk: Institute of Mathematics, 2010.

[2] SHI W J. A new characterization of the sporadic simple groups: Proceedings of the Singapore Group Theory Conference, June 8-19, 1987[C]. Berlin: Walter de Gruyter, 1989:531-540.

[3] SHI W J, BI J X. A characteristic property for each finite projective special linear group[J]. Lecture Notes in Math, 1990, 1456:171-180.

[4] SHI W J, BI J X. A characteristic of Suzuki-Recgroups[J]. Science in China (Ser A), 1991, 34(1):14-19.

[5] SHI W J, BI J X. A characteristic of the alternating groups [J]. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 1992, 16(1): 81-90.

[6] SHI W J. Pure quantitative characterization of finite simple

groups[J]. Progress in Nature Science, 1994, 4(3): 316-326.

[7] CAO H P, SHI W J. Pure quantitative characterization of finite projective special unitary groups[J]. Science in China (Ser A), 2002, 45(6): 761-772.

[8] XU M C, SHI W J. Pure quantitative characterization of finite simple groups ${}^2D_n(q)$ and $D_l(q)$ (l odd)[J]. Algebra Colloquium, 2003, 10(3): 427-443.

[9] VASIL'EV A V, GRECHKOSEEVA M A, MAZUROV V D. Characterization of the finite simple croups by spectrum and order[J]. Algebra and Logic, 2009, 48(6): 385-409.

[10] HE L G, CHEN G Y. A new characterization of simple K_3-groups[J]. Communications in Algebra, 2012, 40(10): 3903-3911.

[11] HE L G, CHEN G Y. A new characterization of $L_2(q)$ where $q \leqslant 125$[J]. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2011, 28: 127-136.

[12] HE L G, CHEN G Y, XU H J. A new characterization of sporadic simple groups[J]. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2013, 30: 373-392.

[13] HE L G, CHEN G Y. A new characterization of simple K_4-groups with type $L_2(p)$[J]. Advances in Mathematics (CHINA), 2014, 43(5): 667-670.

[14] 何立官，徐海静. 关于单 K_3-群的自同构群的刻画[J]. 数学进展，2015，44(3)：363-368.
HE L G, XU H J. A characterization of automorphism groups of simple K_3-groups[J]. Advances in Mathematics (CHINA), 2015, 44(3): 363-368.

[15] HE L G, CHEN G Y. A new characterization of simple K_4-groups[J]. Journal of Mathematical Research with Applications, 2015, 35(4): 400-406.

[16] 杨成. 最高阶元素个数不同的有限群[J]. 数学年刊，1993，14(5)：561-576.
YANG C. Finite groups based on the numbers of elements of maximal order[J]. Ann Math, 1993, 14(5): 561-576

[17] 姜友谊. 最高阶元素个数为 $2p^2$ 的有限群是可解群[J]. 数学年刊，2000，21(1)：61-64.
JANG Y Y. Finite groups with $2p^2$ elements of maximal order are solvable[J]. Ann Math, 2000, 21(1): 61-64.

[18] 杜祥林，姜友谊. 最高阶元素个数为 $4p$ 的有限群[J]. 数学年刊，2004，29(3)：198-200.
DU X L, JANG Y Y. On finite groups with $4p$ elements of maximal order[J]. Ann Math, 2004, 29(3): 198-200.

[19] HE L G, CHEN G Y. Solvability of finite groups with 10p elements of maximal order[J]. Appl Math Computer, 2006, 21(1): 431-436.

[20] 何立官，陈贵云. 最高阶元素个数为 $10p^m$ 的有限群可解[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2007，29(6)：1-4.
HE L G, CHEN G Y. Finite groups with $10p^m$ elements of maximal order are solvable[J]. Journal of Southwest China University (Nature Science Edition), 2007, 29(6): 1-4.

[21] CONWAY J H, CURTIS R T, Norton S P, et al. ATLAS of finite groups[M]. Oxford: Clarendon Press, 1985.

[22] GORENSTEIN D. Finite groups[M]. New York: Chelsea Publishing Company, 1980.

An ONC-Characterization of Alternating Group A_n Where $5 \leqslant n \leqslant 13$

HE Liguan, TONG Yin

(School of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]It is aimed to find fewer numbers to characterize a finite simple group. [**Methods**]Alternating groups A_n ($5 \leqslant n \leqslant 13$) are characterized only $\mathrm{ONC}_1(G)$. [**Findings**]A_n ($n=5,6,7,10,11,13$) can be uniquely determined by $\mathrm{ONC}_1(G)$, and A_8, A_9, A_{12} can be uniquely determined by $\mathrm{ONC}_1(G)$ and $l_p(G)$. [**Conclusions**]The present study showed that A_n ($5 \leqslant n \leqslant 13$) can be uniquely determined by at most four numbers.

Keywords: alternating group; ONC-degree; ONC-characterization

(责任编辑　黄　颖)