

# 带抢占优先权和同步多重工作休假的 M/M/c 排队模型<sup>\*</sup>

马占友, 王文博, 郑晓铭

(燕山大学 理学院, 河北 秦皇岛 066004)

**摘要:**【目的】为了丰富随机休假排队理论,在经典 M/M/c 排队模型的基础上,研究带抢占优先权和多重工作休假的 M/M/c 排队模型。【方法】利用拟生灭过程和矩阵几何解的方法,得到了系统稳态队长分布的矩阵几何形式,进而求出系统中 I 级、II 级顾客的平均队长、II 级顾客消失的概率等性能指标,最后举例进行验证。【结果】得到了带抢占优先权和多重工作休假的 M/M/c 排队模型。【结论】所得结果描绘出参数变化对系统性能指标的影响,并得到使社会利益达到最大的最优参数。

**关键词:**抢占优先权;工作休假;稳态分布;优化

**中图分类号:**O226

**文献标志码:**A

**文章编号:**1672-6693(2018)03-0096-05

根据现实生活的需要,排队模型应运而生。Tian 等人<sup>[1]</sup>分析了几类休假排队模型,并根据模型的不同特点将它们应用到了实际生活中。为了处理复杂的排队模型,田乃硕等人<sup>[2]</sup>详细介绍了拟生灭过程和矩阵几何解方法,为平稳分布的求解提供了有利条件。随后,许多学者将工作休假策略、多服务台等策略引入到基础排队模型中,分别做了分析并予以应用。朱翼隽等人<sup>[3]</sup>研究了带有多重工作休假的 M/M/c 排队模型的稳态分布和性能指标,为多服务台排队模型的研究奠定了基础。杨云云等人<sup>[4]</sup>研究了双输入的排队模型,假设服务台像顾客一样可到达也可离去,得到了系统的平均队长和平均服务台数。厉莉等人<sup>[5]</sup>主要分析了带有反馈优先权的多服务台排队模型。Sun 等人<sup>[6]</sup>通过建立顾客的效用函数分析了顾客的均衡行为。Zhao 等人<sup>[7]</sup>将排队模型应用到了认知无线网络,得到了最优信道闭合率。本文在文献<sup>[7]</sup>的基础上加入多服务台策略,并应用到多信道的认知无线网络中,通过合理的频谱资源分配,可以最大程度减少频谱空穴及实现社会利益最优。

## 1 模型分析

本文主要研究抢占优先策略下的 M/M/c 排队模型,系统中有两个级别的顾客,II 级顾客较 I 级顾客有抢占优先权。在此模型中,假设两级顾客单队排列,低优先级顾客的空间容量无限,高优先级顾客遵循消失制排队,即:当部分服务台被低优先级顾客占用且无空闲服务台时,新到达的高优先级顾客抢占队首低优先级顾客的服务。当所有服务台均被高优先级顾客占用时,新到达的高优先级顾客消失。抢占优先策略下的 M/M/c 同步多重工作休假排队模型具体描述如下:

1) I 级顾客和 II 级顾客的到达时间间隔  $T_1, T_2$  分别服从参数为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  ( $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ) 的指数分布,即:

$$P\{T_1 \leq x\} = 1 - e^{-\lambda_1 x}, x > 0; P\{T_2 \leq x\} = 1 - e^{-\lambda_2 x}, x > 0。$$

2) I 级顾客和 II 级顾客的服务时间  $S_1, S_2$  分别服从参数为  $\mu_1$  和  $\mu_2$  ( $\mu_1, \mu_2 > 0$ ) 的指数分布,即:

$$P\{S_1 \leq x\} = 1 - e^{-\mu_1 x}, x > 0; P\{S_2 \leq x\} = 1 - e^{-\mu_2 x}, x > 0。$$

3) 一旦系统为空,服务台立即进入长度为  $V$  的工作休假。当工作休假期结束时,系统中仍无顾客,则服务台继续处于工作休假状态;当工作休假期结束时,系统中有顾客到达,则服务台的工作休假期结束,正规忙期开始;若工作休假期尚未结束,系统中已有顾客到达,则系统以较小的速率为顾客提供服务。休假长度  $V$  服从参数

\* 收稿日期:2017-03-24 修回日期:2018-04-19 网络出版时间:2018-05-22 10:01

资助项目:国家自然科学基金(No. 61472342);河北省自然科学基金(No. A2014203096; No. G2013203169);河北省高等学校自然科学研究重点项目(No. ZD2017079);燕山大学青年教师基金(No. 13LGA017);河北省高等学校科学技术研究青年基金(No. QN2016016);校级硕士研究生创新项目(No. 2017XJSS045)

第一作者简介:马占友,男,教授,研究方向为排队论研究及网络性能分析,E-mail:mzhy55@ysu.edu.cn

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180522.1001.020.html>

为  $\theta$  的指数分布。工作休假期内系统为 I 级顾客、II 级顾客服务的时间  $S_{1v}, S_{2v}$  分别服从参数为  $\mu_{1v}$  和  $\mu_{2v}$  ( $\mu_{1v}, \mu_{2v} > 0$ ) 的指数分布, 即  $P(V \leq x) = 1 - e^{-\theta x}, x > 0; P\{S_{1v} \leq x\} = 1 - e^{-\mu_{1v}x}, x > 0; P\{S_{2v} \leq x\} = 1 - e^{-\mu_{2v}x}, x > 0$ 。

4) 假设 II 级顾客较 I 级顾客有抢占优先权, 即: 当 I 级顾客正在接受服务时, II 级顾客进入排队系统, 若有空闲服务台, 系统立即为 II 级顾客服务; 若无空闲服务台, 那么队首的 I 级顾客的服务被抢占。一旦 I 级顾客的服务被抢断, 只有当系统再次出现空闲服务台时, 系统才会重新为 I 级顾客服务。系统中每一级别的顾客都服从先来先服务 (First customer, first service, FCFS) 的规则。到达时间间隔、服务时间与休假时间均相互独立。

## 2 稳态分析

假设  $L_1(t), L_2(t)$  分别表示 I 级顾客和 II 级顾客在  $t$  时刻的顾客数,  $J(t)$  表示系统的服务状态。令:

$$J(t) = \begin{cases} 0, & \text{时刻 } t \text{ 系统处于休假期} \\ 1, & \text{时刻 } t \text{ 系统处于正规忙期} \end{cases},$$

则  $\{(L_1(t), L_2(t), J(t)), t \geq 0\}$  是一个三维马尔科夫 (Markov) 过程, 且有状态空间:

$$\Omega = \{(0, 0, 0)\} \cup \{(0, l, j), 1 \leq l \leq c, j = 0, 1\} \cup \{(i, l, j), i \geq 1, 0 \leq l \leq c, j = 0, 1\}.$$

称所有可能的状态  $(i, 0, 0), (i, 0, 1), (i, 1, 0), (i, 1, 1), \dots, (i, c, 0), (i, c, 1)$  为水平  $i$ , 其中  $i \geq 1$ 。特别地, 将水平 0 定义为  $(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), \dots, (0, c, 0), (0, c, 1)$ 。

将状态按字典序进行排列, 系统的状态转移率矩阵可以写成如下形式:

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00} & \mathbf{A}_{01} & & & & \\ \mathbf{A}_{10} & \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_2 & & & \\ & \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_{c,c-1} & \mathbf{A}_{c,c} & \mathbf{A}_2 \\ & & & & \mathbf{A}_{c,c-1} & \mathbf{A}_{c,c} & \mathbf{A}_2 \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

其中  $\mathbf{A}_{00}, \mathbf{A}_{01}, \mathbf{A}_{10}, \dots, \mathbf{A}_{c,c-1}, \mathbf{A}_{11}, \dots, \mathbf{A}_{c,c}, \mathbf{A}_2$  分别代表水平间的状态转移率。且定义  $\delta_{ijv}, \delta_{ij}, \delta_{icv}, \delta_{ic}, \delta_{iv}, \delta_i, \delta_{cv}, \delta_c$  如下:

$$\begin{aligned} \delta_{ijv} &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + i\mu_{1v} + j\mu_{2v}), 1 \leq i \leq c-1, 1 \leq j \leq c-1; \delta_{ij} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + i\mu_1 + j\mu_2), 1 \leq i \leq c-1, 1 \leq j \leq c-1; \\ \delta_{icv} &= -(\lambda_1 + \theta + i\mu_{1v} + c\mu_{2v}), 1 \leq i \leq c-1; \delta_{ic} = -(\lambda_1 + i\mu_1 + c\mu_2), 1 \leq i \leq c-1; \delta_{iv} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + i\mu_{2v}), 1 \leq i \leq c-1; \\ \delta_i &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + i\mu_2), 1 \leq i \leq c-1; \delta_{cv} = -(\lambda_1 + \theta + c\mu_{2v}); \delta_c = -(\lambda_1 + c\mu_2). \end{aligned}$$

具体矩阵如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{01} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & & \\ & 0 & \lambda_1 & & \\ & & 0 & \lambda_1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{10} &= \begin{bmatrix} \mu_{1v} & & & & \\ \mu_1 & 0 & & & \\ & \mu_{1v} & 0 & & \\ & & \mu_1 & 0 & \\ & & & \mu_{1v} & 0 \\ & & & & \mu_1 & 0 \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \mu_{1v} & 0 \\ & & & & & & & \mu_1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{i,i-1} = \begin{bmatrix} i\mu_{1v} & & & & \\ & i\mu_1 & & & \\ & & i\mu_{1v} & & \\ & & & i\mu_1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & i\mu_{1v} & \\ & & & & & & i\mu_1 \end{bmatrix} \quad (2 \leq i \leq c), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{00} &= \begin{bmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_2) & \lambda_2 & 0 & & & & & & \\ \mu_{2v} & \delta_{1v} & \theta & \lambda_2 & & & & & \\ \mu_2 & 0 & \delta_1 & 0 & \lambda_2 & & & & \\ & 2\mu_{2v} & 0 & \delta_{2v} & \theta & \lambda_2 & & & \\ & 2\mu_2 & 0 & \delta_2 & 0 & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & (c-1)\mu_{2v} & 0 & \delta_{c-1v} & \theta & \lambda_2 & \\ & & & & (c-1)\mu_2 & 0 & \delta_{c-1} & 0 & \lambda_2 \\ & & & & & c\mu_{2v} & 0 & \delta_{cv} & \theta \\ & & & & & & c\mu_2 & 0 & \delta_c \end{bmatrix}, \\
\mathbf{A}_{ii} &= \begin{bmatrix} \delta_{i0v} & \theta & \lambda_2 & & & & & & \\ 0 & \delta_{i0} & 0 & \lambda_2 & & & & & \\ \mu_{2v} & 0 & \delta_{i1v} & \theta & \lambda_2 & & & & \\ \mu_2 & 0 & \delta_{i1} & 0 & \lambda_2 & & & & \\ & 2\mu_{2v} & 0 & \delta_{i2v} & \theta & \lambda_2 & & & \\ & 2\mu_2 & 0 & \delta_{i2} & 0 & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & (c-1)\mu_{2v} & 0 & \delta_{i(c-1)v} & \theta & \lambda_2 & \\ & & & & (c-1)\mu_2 & 0 & \delta_{i(c-1)} & 0 & \lambda_2 \\ & & & & & c\mu_{2v} & 0 & \delta_{icv} & \theta \\ & & & & & & c\mu_2 & 0 & \delta_{ic} \end{bmatrix} \quad (1 \leq i \leq c).
\end{aligned}$$

由矩阵  $\mathbf{Q}$  的结构可知, Markov 过程  $\{(L_1(t), L_2(t), J(t)), t \geq 0\}$  是一个拟生灭过程 (Quasi birth and death, QBD)。当 Markov 过程  $\{(L_1(t), L_2(t), J(t)), t \geq 0\}$  正常返时, 稳态分布如下所示:

$$\pi_{i,l,j} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{L_1(t) = i, L_2(t) = l, J(t) = j\}, (i, l, j) \in \Omega, \boldsymbol{\Pi} = (\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2, \dots).$$

其中:  $\boldsymbol{\pi}_0 = (\pi_{0,0,0}, \pi_{0,1,0}, \pi_{0,1,1}, \dots, \pi_{0,c,0}, \pi_{0,c,1})$ ,  $\boldsymbol{\pi}_i = (\pi_{i,0,0}, \pi_{i,0,1}, \pi_{i,1,0}, \pi_{i,1,1}, \dots, \pi_{i,c,0}, \pi_{i,c,1}), i \geq 1$ 。

QBD  $\{(L_1(t), L_2(t), J(t)), t \geq 0\}$  是正常返的充分必要条件是矩阵方程  $\mathbf{R}^2 \mathbf{A}_{c,c-1} + \mathbf{R} \mathbf{A}_c + \mathbf{A}_2 = \mathbf{0}$  有一个最小非负解  $\mathbf{R}$ , 且谱半径  $\text{SP}(\mathbf{R}) < 1$ ,  $2c^2 + 4c + 1$  维矩阵

$$\mathbf{B}[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00} & \mathbf{A}_{01} & & & & & \\ \mathbf{A}_{10} & \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_2 & & & & \\ & \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mathbf{A}_{c-1,c-2} & \mathbf{A}_{c-1,c-1} & \mathbf{A}_2 & \\ & & & & \mathbf{A}_{c,c-1} & \mathbf{R} \mathbf{A}_{c,c-1} + \mathbf{A}_{c,c} \end{bmatrix}$$

有左零向量。当 QBD 是正常返时, 稳态分布为 
$$\begin{cases} (\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1, \dots, \boldsymbol{\pi}_c) \mathbf{B}[\mathbf{R}] = \mathbf{0} \\ \sum_{i=0}^{c-1} \boldsymbol{\pi}_i \mathbf{e} + \boldsymbol{\pi}_c (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{e} = \mathbf{1}, \text{ 其中 } \mathbf{e} \text{ 是一个适当维数且所有元素} \\ \boldsymbol{\pi}_i = \boldsymbol{\pi}_c \mathbf{R}^{i-c}, i \geq c \end{cases}$$

均为 1 的列向量。

### 3 性能指标

根据上述分析可以得到各性能指标: 1) I 级顾客的平均队长为  $E(L_1) = \sum_{i=0}^{\infty} i P(L_1 = i) = \sum_{i=1}^{\infty} i \sum_{j=0}^1 \sum_{l=0}^c \pi_{i,l,j}$ ;

2) II 级顾客的平均队长为  $E(L_2) = \sum_{l=0}^c l P(L_2 = l) = \sum_{l=1}^c l \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i,l,j}$ ; 3) II 级顾客消失的概率为  $P_d =$

$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^1 \pi_{i,c,j}$ ; 4) 服务台的利用率为  $P_u = \frac{\min\{E(L_1) + E(L_2), c\}}{c}$ 。

#### 4 数值例子

在实际生活中,不同的系统性能指标有不同的要求,而且性能指标常随系统参数的变化而变化。利用 Matlab 给出数值例子来刻画性能指标随系统参数的变化趋势。令  $\lambda_1=6, \mu_1=3, \mu_{1v}=0.5, \mu_{2v}=1, \theta=3$ 。

图 1 反映了当  $\lambda_2=10$  时, I 级顾客的平均队长  $E(L_1)$  随  $\mu_2$  和  $c$  变化的趋势。当  $c$  固定时,随着  $\mu_2$  逐渐增大,  $E(L_1)$  增大。当  $\mu_2$  为定值时,  $c$  越大对应的  $E(L_1)$  越小。这主要由于  $c$  越大, II 级顾客抢占服务台的几率越小,服务台可以为更多的 I 级顾客服务,故系统中 I 级顾客的平均队长  $E(L_1)$  减小。

图 2 反映了当  $c=4$  时, II 级顾客平均队长  $E(L_2)$  随  $\mu_2$  和  $\lambda_2$  变化的趋势。当  $\mu_2$  固定时,随着  $\lambda_2$  逐渐增大,  $E(L_2)$  逐渐增大。当  $\lambda_2$  为定值时,  $\mu_2$  越大对应的  $E(L_2)$  越小。

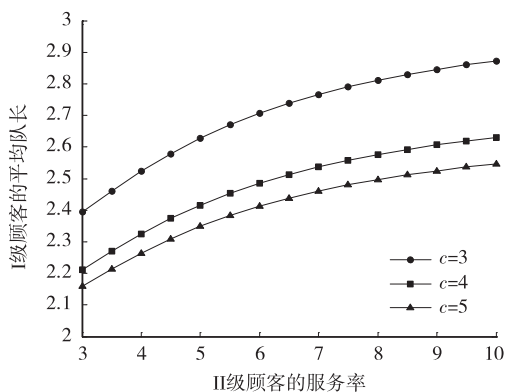


图 1  $E(L_1)$  与  $\mu_2$  和  $c$  的关系

Fig. 1 The relation of  $E(L_1)$  with  $\mu_2$  and  $c$

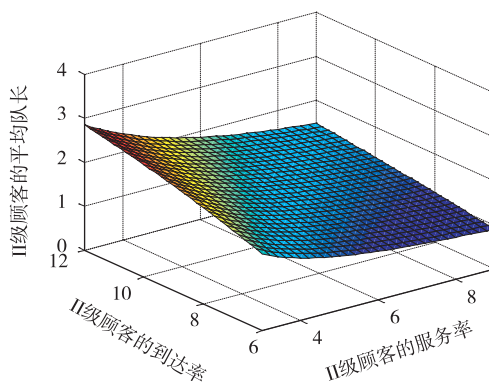


图 2  $E(L_2)$  与  $\mu_2$  和  $\lambda_2$  的关系

Fig. 2 The relation of  $E(L_2)$  with  $\mu_2$  and  $\lambda_2$

#### 5 社会最优策略

本节主要讨论系统的社会利益最优问题。假设  $R_0$  表示系统服务完两级顾客后获得的平均收益;  $C$  表示单位服务时间内系统服务一个顾客的平均成本;  $C_p$  表示每个服务台在正规忙期内的损失;  $C_d$  表示一个 II 级顾客消失时系统的潜在损失。则系统的社会利益  $U_s$  可以表示为:

$$U_s = \lambda_s \left( \frac{\mu_s}{\lambda_s} R_0 - w_s C \right) - c C_p - C_d P_d,$$

其中  $w_i = \frac{E(L_i)}{\lambda_i}$ ,  $i=1, 2$ ,  $w_s = \frac{w_1 + w_2}{2}$ ,  $\lambda_s = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ ,  $\mu_s = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$ 。

通过上式可得,能使系统达到最大利益  $U_s^*$  的最优到达率为:

$$\lambda_2^* = \arg \max_{\lambda_2 > 0} \left\{ \lambda_s \left( \frac{\mu_s}{\lambda_s} R_0 - w_s C \right) - c C_p - C_d P_d \right\}.$$

图 3 反映了当  $\lambda_1=6, \mu_s=8, \theta=3, R_0=23, C=1.7, C_p=15, C_d=48$  时, 社会利益  $U_s$  随  $\lambda_2$  和  $c$  变化的趋势。当  $c$  固定时,随着  $\lambda_2$  逐渐增大,  $U_s$  先增大后减小。当  $\lambda_2$  为定值时,  $c$  越大对应的  $U_s$  越小。这主要是因为在其他条件不变的情况下,  $c$  越大,产生的系统损失越大,故  $U_s$  越小。对社会利益函数利用 Matlab 编程后可得,当  $c=4$  时,  $\lambda_2=8.2$  可以使  $U_s$  达到最大;当  $c=6$  时,  $\lambda_2=7.7$  可以使  $U_s$  达到最大;当  $c=8$  时,  $\lambda_2=7.5$  可以使  $U_s$  达到最大。

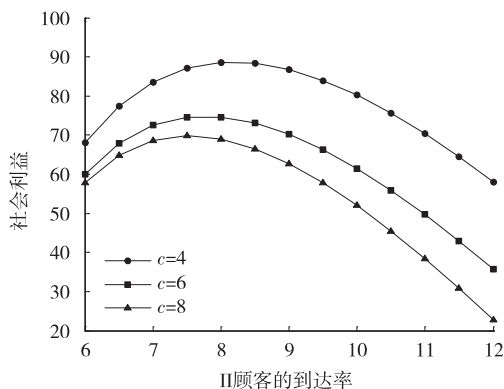


图 3  $U_s$  与  $\lambda_2$  和  $c$  的关系

Fig. 3 The relation of  $U_s$  with  $\lambda_2$  and  $c$

#### 6 结论

本文研究了带抢占优先权和多重工作休假的 M/M/c 排队模型,在已知排队模型基础上,建立、分析并得到

了更加详细的排队模型结果。主要利用拟生灭过程和矩阵几何解的方法,得到了系统稳态队长分布的矩阵几何形式,进而求出系统中 I 级、II 级顾客的平均队长、II 级顾客消失的概率等性能指标。最后,通过数值例子,分析参数变化对系统性能指标的影响以及达到最大社会利益的最优参数。

### 参考文献:

- [1] TIAN N S, ZHANG Z G. Vacation queueing models theory and applications[M]. Boston: Springer, 2006.
- [2] 田乃硕, 岳德全. 拟生灭过程与矩阵几何解[M]. 北京: 科学出版社, 2002.  
TIAN N S, YUE D Q. QBD process and Matrix-geometric solution[M]. Beijing: Science Press, 2002.
- [3] 朱翼隽, 徐剑, 周宗好. 多重工作休假的 M/M/c 排队系统[J]. 江苏大学学报(自然科学版), 2012, 33(3): 369-372.  
ZHU Y J, XU J, ZHOU Z H. M/M/c queue with multiple working vacation[J]. Journal of Jiangsu University(Natural Science), 2012, 33(3): 369-372.
- [4] 杨云云, 马占友, 李艳兰, 等. 基于 Geom/Geom (Geom/Geom)/H 的双输入排队模型[J]. 辽宁工程技术大学学报(自然科学版), 2012, 31(4): 573-576.  
YANG Y Y, MA Z Y, LI Y L, et al. Dual input queueing system based on Geom/Geom(Geom/Geom)/H[J]. Journal of Liaoning Technical University (Natural Science), 2012, 31(4): 573-576.
- [5] 厉莉, 朱翼隽. 带反馈优先的 M/M/c 排队在通信网络中的应用[J]. 成都信息工程学院学报, 2006, 21(6): 897-902.  
LI L, ZHU Y J. Application of M/M/c queue with feedback priority to communication network[J]. Journal of Chengdu University of Information Technology, 2006, 21(6): 897-902.
- [6] SUN W, TIAN N S. Contrast of the equilibrium and socially optimal strategies in a queue vacation[J]. Journal of Computational Information Systems, 2008, 4(5): 2167-2172.
- [7] ZHAO Y, JIN S F, YUE W Y. Performance optimization of a dynamic channel bonding strategy in cognitive radio networks[J]. Pacific Journal of Optimization, 2013, 9(4): 679-696.

## The M/M/c Queueing Model with Preemptive Priority and Multiple Synchronous Working Vacation

MA Zhanyou, WANG Wenbo, ZHENG Xiaoming

(School of Science, Yanshan University, Qinhuangdao Hebei 066004, China)

**Abstract:** [Purposes] In order to enrich the queueing theory of random vacations, the M/M/c queueing model with preemptive priority and multiple working vacations is studied. There are two types of customers, when the high-priority customer arrives at the system, if partial servers are occupied by low-priority customers and there is no free server, the new arriving high-priority customer will preempt the service of the low-priority customer at the head of the queue. When all servers are occupied by the high-priority customers, the new arriving high-priority customer will disappear. [Methods] According to the state transition rate matrix, the distribution of the queueing length in the boundary state is obtained by using the quasi birth-and-death process and the method of matrix-geometric solution, the matrix geometric form of the system steady-state distribution is analyzed. [Findings] The expressions of performance measures such as the system average queue length and the serving rate of the servers are given. [Conclusions] Finally, by analyzing some numerical examples, the influence of the parameters on the system performance measures and the optimal parameter which leads to the maximal social benefit are obtained.

**Keywords:** preemptive priority; working vacation; steady-state distribution; optimization

(责任编辑 黄 颖)