DOI:10.11721/cqnuj20180311

具有时滞的反应扩散神经网络模型的输入-状态稳定*

苏 鹏，邱小伟，杨志春
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】研究带有时滞的反应扩散神经网络模型的输入-状态稳定。【方法】首先，建立一类带有时滞的反应扩散神经网络模型，该模型中的神经元激励函数不要求有界，也不要求光滑。然后，利用具有时变输入的时滞微分不等式和矩阵不等式方法。【结果】获得该反应扩散神经网络系统的输入-状态稳定的两个充分条件。【结论】结果改进和推广现有文献的相关工作。

关键词:反应扩散神经网络;输入-状态稳定;时滞微分不等式;时滞

中图分类号:O175 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2018)03-0101-06

Hopfield 神经网络模型在并行计算、联想记忆、信号图像处理、模式识别以及最优化处理等领域有广泛的应用[1-2]。众所周知，在神经网络的硬件运行过程中，由于放大器的转换速度有限，因而不可避免地存在着时滞现象;同时，当电子在非一致电场领域下运动，神经网络的扩散效应是不能被忽略的。因此考虑带有时滞和扩散项的神经网络模型的动力行为成为最近研究的热点[3-10]。

在控制系统中稳定性、有界性和鲁棒性等性质的研究非常广泛。而实际中，控制系统常常会受到干扰，如控制上的微小变化或者观察中的微小误差都会影响最终结果，从而不仅要求网络系统要稳定，还要输入-状态稳定。自 20 世纪 80 年代末，Sontag 等人[11-12]对非线性系统首次提出输入-状态稳定这一重要概念以来，由于有着广泛的应用背景，国内外许多学者对输入-状态稳定性进行了深入研究。特别地，作为一类典型的非线性系统，神经网络模型的输入-状态稳定性吸引了一些学者的注意[13-17]，如 Sanchez & Perez[13]首次用矩阵不等式得到神经网络模型的输入-状态稳定，Ahn[14]利用 Lyapunov 泛函获得带有时滞的模糊神经网络的输入-状态稳定，Zhu & Shen[15]研究了递归神经网络的输入-状态稳定，文献[16-18]利用 Lyapunov 泛函和微分不等式方法，分别得到了具有时滞的递归神经网络、随机双向联想神经网络和 Cohen-Grossberg 神经网络的输入-状态稳定性的一些充分条件。然而，关于反应扩散神经网络的输入-状态稳定性的研究比较有限。

本文将研究带有时滞的反应扩散神经网络的输入-状态稳定性。首先，建立一类带有时滞和扩散项的神经网络模型。然后，利用具有时变输入的时滞微分不等式和矩阵不等式方法，获得该反应扩散神经网络模型的输入-状态稳定的两个充分条件，结果改进和推广了现有文献的相关工作。

1 神经网络模型与预备知识

本文记 $\mathbf{R},\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^n,|\cdot|,\boldsymbol{I}$ 分别表示实数集、非负实数集、n 维欧几里德空间、欧几里德范数和单位矩阵。$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{-1},\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}),\lambda_{\min}(\boldsymbol{A})$ 和 $\|\boldsymbol{A}\|=\sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置、逆、最大和最小特征值、范数。$\boldsymbol{P}>0(\geqslant 0)$ 表示 $\boldsymbol{P}$ 实对称且正定(实对称且半正定)。$\|\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})\|$ 表示状态向量 $\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})$ 的范数，定义为：$\|\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})\|=\sqrt{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})}$。$L_\infty^m$ 表示局部本性有界可测函数 $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$：$\mathbf{R}^+\times\boldsymbol{\Omega}\to\mathbf{R}^n$，其中 $\boldsymbol{\Omega}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}\,|\,|x_k|\leqslant l_k,k=1,2,\cdots,m\}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中具有光滑边界 $\partial\boldsymbol{\Omega}$ 的有界开区域且测度 $|\boldsymbol{\Omega}|>0$，它们的本性有界最大模 $\|\boldsymbol{u}\|_\infty=$

* **收稿日期**:2017-04-05 **修回日期**:2018-04-23 **网络出版时间**:2018-05-22 10:02
资助项目:国家自然科学基金(No. 11471061);重庆市自然科学基金(No. CQCSTC 2014JCYJA40004);重庆市高校创新团队计划(No. CXTDG201602008)
第一作者简介:苏鹏，男，研究方向为微分方程与动力系统，E-mail:su18725677763@126.com;**通信作者**:杨志春，男，教授，博士生导师，E-mail:yangzhch@126.com
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180522.1001.028.html

$\sup\{|\boldsymbol{u}(t)|\ t\geqslant 0\}$。特别地,记 $\boldsymbol{u}_t$ 是 $\boldsymbol{u}$ 在时间 t 时刻的截断函数,即当 $s\leqslant t$ 时,$\boldsymbol{u}_t(s)=\boldsymbol{u}(s)$,当 $s>t$ 时,$\boldsymbol{u}_t(s)=0$。K,KL,K_∞ 分别表示 K 函数,KL 函数,K_∞ 函数。记 $C=C([-\tau,0]\times\boldsymbol{\Omega},\mathbf{R}^n)$ 为在 $[-\tau,0]\times\boldsymbol{\Omega}$ 上的连续泛函空间,$\tau>0$,其范数为 $\|\varphi\|=\sup\limits_{-\tau\leqslant t\leqslant 0}\left(\int_\Omega\varphi^{\mathrm{T}}(s,x)\varphi(s,x)\right)^{\frac{1}{2}},\forall\varphi\in C$。

本文主要研究如下具有时滞的反应扩散神经网络:

$$\frac{\partial y_i(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(d_{ik}\frac{\partial y_i(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\right)-a_iy_i(t,\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}g_j(y_j(t,\boldsymbol{x}))+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}g_j(y_j(t-\tau(t),\boldsymbol{x})+u_i(t,\boldsymbol{x}),\quad(1)$$

其中 $i=1,2,3,\cdots,n$,$\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ 为 $\boldsymbol{\Omega}$ 中的拉普拉斯算子,$y_i(t,\boldsymbol{x})\in\mathbf{R}$ 表示在 t 时刻,空间变量 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}$ 处的第 i 个神经元的状态;u_i 为输入;$d_{ik}>0$ 为第 i 个神经元的传输扩散系数;$g_j(\cdot)$ 表示第 j 个神经元的激活函数;$a_i>0$ 表示在与神经网络不连通且无外部输入的情况下,第 i 个神经元恢复孤立静息状态的速率;b_{ij} 和 c_{ij} 分别表示第 i 和第 j 个神经元的连接强度和时滞连接强度;$\tau(t)$ 表示传输时滞,且满足 $0\leqslant\tau(t)\leqslant\tau$。

为了方便,把系统(1)写成向量形式如下:

$$\frac{\partial\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\boldsymbol{D}_k\frac{\partial\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\right)-\boldsymbol{Ay}(t,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{Bg}(\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x}))+\boldsymbol{Cg}(\boldsymbol{y}(t-\tau(t),\boldsymbol{x}))+\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}),\quad(2)$$

其中 $\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})=(y_1(t,x),y_2(t,x),\cdots,y_n(t,x))^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})=(u_1(t,x),u_2(t,x),\cdots,u_n(t,x))^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x}))=(g_1(y_1(t,x)),g_2(y_2(t,x)),\cdots,g_n(y_n(t,x)))^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$,$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$,$\boldsymbol{D}_k=\mathrm{diag}\{d_{1k},d_{2k},\cdots,d_{nk}\}$。

系统(1)的初始条件和边界条件为 $y_i(t,\boldsymbol{x})=\varphi_i(t,\boldsymbol{x})$,$(t,\boldsymbol{x})\in[-\tau,0]\times\boldsymbol{\Omega}$,$y_i(t,\boldsymbol{x})=0$,$(t,\boldsymbol{x})\in[-\tau,+\infty)\times\partial\boldsymbol{\Omega}$,这里 $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)^{\mathrm{T}}$,记满足初始条件的解为 $\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{u})$。

为了获得主要结论,下面引入一些定义与引理。

定义1 如果存在一个 KL 函数 β 和一个 K 函数 γ,对任意输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 和每一个 $\varphi\in C$ 满足:

$$\|\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{u})\|\leqslant\beta(\|\boldsymbol{\varphi}\|,t)+\gamma(\|\boldsymbol{u}_i\|_\infty),$$

则系统(2)称为输入-状态稳定。

引理1[20] 对于任意合适维数的矩阵 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 和一个合适的可逆对称阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,对任意实数 $\varepsilon>0$,可得:

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\leqslant\varepsilon\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{X}+\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{Y}。$$

引理2[19] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{Q}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,且 $\boldsymbol{Q}$ 为可逆矩阵,则对任意的 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 都满足:

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PAx}\leqslant\|\boldsymbol{QAQ}^{-1}\|^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Px},\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}。$$

引理3[8] 设 $\boldsymbol{\Omega}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}\,|\,|x_k|\leqslant l_k,k=1,2,\cdots,m\}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中具有光滑边界 $\partial\boldsymbol{\Omega}$ 的有界开区域,实值函数 $h(x)\in C^1(\boldsymbol{\Omega})$,且在边界满足 $h(x)|_{\partial\boldsymbol{\Omega}}=0$,则有 $\int_\Omega h^2(x)\mathrm{d}x\leqslant l_k^2\int_\Omega\left(\dfrac{\partial h}{\partial x_k}\right)^2\mathrm{d}x$。

引理4[17] 假定存在一个连续函数 $V(t)$,满足具有时变输入的时滞微分不等式:

$$\dot{V}_i(t)\leqslant\sum_{j=1}^{n}[\boldsymbol{R}_{ij}V_j(t)+\boldsymbol{Q}_{ij}[V_j(t)]_\tau]+J_i(t),t\geqslant 0,$$

其中 $\boldsymbol{R}_{ij}\geqslant 0,i\neq j,\boldsymbol{Q}_{ij}\geqslant 0,[V_j(t)]_\tau=\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}\{V_j(t+s)\}$,$J_i(t)\geqslant 0$ 是输入变量,$i,j=1,2,\cdots,n$。如果存在一个正实数 λ 和一个正向量 $\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\sum\limits_{j=1}^{n}[\boldsymbol{R}_{ij}+\boldsymbol{Q}_{ij}\exp(\lambda\tau)]z_j\leqslant -z_i\lambda$,$i=1,2,\cdots,n$,且初值条件 $V_i(t)\leqslant[k\exp(-\lambda t)+\chi(t)]z_i$,$t\in[-\tau,0)$ 成立。那么 $V_i(t)\leqslant[k\exp(-\lambda t)+\chi(t)]z_i$,$t\geqslant 0$,其中常数 $k>0$,$\chi(t)$ 是一个连续非负的递增函数,且满足 $\chi(t)\geqslant\dfrac{J_i(t)}{-\sum\limits_{j=1}^{n}[\boldsymbol{R}_{ij}+\boldsymbol{Q}_{ij}]}$,$t\geqslant 0$。

2 主要结果

本节将主要研究系统(2)的输入-状态稳定,首先假设(H1):激活函数 $g_i(\cdot)(i=1,2,\cdots,n)$ 满足如下条件,存在正常数 ρ_i,使得 $|g_i(y_i(t,\boldsymbol{x}))|\leqslant\rho_i|y_i(t,\boldsymbol{x})|$。

定理 1　假定(H1)成立,如果存在正实数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\lambda_1$ 和可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得:

$$2\left(-\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_{\min}(\boldsymbol{D}_k)}{l_k^2}-a+\varepsilon_1+\varepsilon_1^{-1}\|\boldsymbol{QBHQ}^{-1}\|^2+\varepsilon_2+\varepsilon_3\right)+2\varepsilon_2^{-1}\|\boldsymbol{QCHQ}^{-1}\|^2\exp(\lambda_1\tau)<-\lambda_1,$$

其中 $\boldsymbol{H}=\operatorname{diag}\{\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n\}$,$a=\dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda_{\min}(\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{AP})}{\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})}$,则系统(2)是输入-状态稳定的。

证明　记 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$,$\boldsymbol{P}$ 为对称正定矩阵,考虑如下 Lyapunov 泛函:

$$V(t)=\int_{\boldsymbol{\Omega}}\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}。\tag{3}$$

针对(3)式两边沿着系统(2)的解分别对 t 求导,可得:

$$\dot{V}(t)\big|_{(2)}=\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}\frac{\partial\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=$$

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}\left\{\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\boldsymbol{D}_k\frac{\partial\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\right)-\boldsymbol{Ay}(t,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{Bg}(\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x}))+\boldsymbol{Cg}(\boldsymbol{y}(t-\tau(t),\boldsymbol{x}))+\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\tag{4}$$

由格林公式,利用边界条件和引理 3 可得:

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\boldsymbol{D}_k\frac{\partial\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-\sum_{k=1}^{m}\int_{\boldsymbol{\Omega}}\left(\frac{\partial\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PD}_k\frac{\partial\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant$$

$$-\lambda_{\min}(\boldsymbol{D}_k)\sum_{k=1}^{m}\int_{\boldsymbol{\Omega}}\left(\frac{\partial\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\frac{\partial\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{-\lambda_{\min}(\boldsymbol{D}_k)}{l_k^2}\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}。\tag{5}$$

对于任意的正实数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$,由引理 1 和引理 2,可以得到:

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}}-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{PAy}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-\frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})(\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{AP})\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant$$

$$-\frac{1}{2}\lambda_{\min}(\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{AP})\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant-\frac{1}{2}\frac{\lambda_{\min}(\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{AP})}{\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})}\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=$$

$$-a\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}。\tag{6}$$

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{PBg}(\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\varepsilon_1\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\varepsilon_1^{-1}\int_{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{PBg}(\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{PBg}(\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant$$

$$\varepsilon_1\int_{\boldsymbol{\Omega}}y^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\varepsilon_1^{-1}\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})(\boldsymbol{BH})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PBHy}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant$$

$$\varepsilon_1\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(\mathrm{t},\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\varepsilon_1^{-1}\|\boldsymbol{QBHQ}^{-1}\|^2\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x},\tag{7}$$

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{PCg}(\boldsymbol{y}(t-\tau(t),\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant$$

$$\varepsilon_2\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\varepsilon_2^{-1}\int_{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{PCg}(\boldsymbol{y}(t-\tau(t),\boldsymbol{x})))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{PCg}(\boldsymbol{y}(t-\tau(t),\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant$$

$$\varepsilon_2\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\varepsilon_2^{-1}\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t),\boldsymbol{x})(\boldsymbol{CH})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PCHy}(t-\tau(t),\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant$$

$$\varepsilon_2\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\varepsilon_2^{-1}\|\boldsymbol{QCHQ}^{-1}\|^2\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t),\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t-\tau(t),\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x},\tag{8}$$

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Pu}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\varepsilon_3\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\varepsilon_3^{-1}\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Pu}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}。\tag{9}$$

把(5)～(9)式代入(4)式,可得:

$$\dot{V}(t)\big|_{(2)}\leqslant-a\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\varepsilon_1\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\varepsilon_1^{-1}\|\boldsymbol{QBHQ}^{-1}\|^2\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+$$

$$\varepsilon_2\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\varepsilon_2^{-1}\|\boldsymbol{QCHQ}^{-1}\|^2\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t),\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t-\tau(t),\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+$$

$$\varepsilon_3\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\varepsilon_3^{-1}\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Pu}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\sum_{k=1}^{m}\frac{-\lambda_{\min}(\boldsymbol{D}_k)}{l_k^2}\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{-\lambda_{\min}(\boldsymbol{D}_k)}{l_k^2}-a+\varepsilon_1+\varepsilon_1^{-1}\|\boldsymbol{QBHQ}^{-1}\|^2+\varepsilon_2+\varepsilon_3\right)\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+$$

$$\varepsilon_2^{-1}\|\boldsymbol{QCHQ}^{-1}\|^2\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t),\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t-\tau(t),\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\varepsilon_3^{-1}\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Pu}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=$$

$$2\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{-\lambda_{\min}(\boldsymbol{D}_k)}{l_k^2}-a+\varepsilon_1+\varepsilon_1^{-1}\|\boldsymbol{QBHQ}^{-1}\|^2+\varepsilon_2+\varepsilon_3\right)\int_{\boldsymbol{\Omega}}\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\varepsilon_3^{-1}\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Pu}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+$$

$$2\varepsilon_2^{-1}\|\boldsymbol{QCHQ}^{-1}\|^2\int_{\boldsymbol{\Omega}}\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t),\boldsymbol{x})\boldsymbol{Py}(t-\tau(t),\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}。$$

最终可得$\dot{V}(t)\leqslant rV(t)+q[V(t)]_\tau+\boldsymbol{J}(t)$,其中 $r:=2\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{-\lambda_{\min}(\boldsymbol{D}_k)}{l_k^2}-a+\varepsilon_1+\varepsilon_1^{-1}\|\boldsymbol{QBHQ}^{-1}\|^2+\varepsilon_2+\varepsilon_3\right)$,$q:=2\varepsilon_2^{-1}\|\boldsymbol{QCHQ}^{-1}\|^2$,$\boldsymbol{J}(t)=\varepsilon_3^{-1}\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{Pu}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$。

由引理4(当是一维情况),可得 $V(t)\leqslant\|\varphi\|^2\exp(-\lambda_1 t)+\chi_1(t)$,其中 $\chi_1(t)$是一个连续非负的递增函数且满足 $\chi_1(t)=\frac{\|J_t\|_\infty}{-(r+q)}$,$t\geqslant 0$,因此可得反应扩散神经网络系统(2)是输入-状态稳定。 证毕

定理2 假定(H1)成立,如果存在正实数 ε_{ij},ζ_{ij},υ_i,λ_2,z_i,$i=1,2,\cdots,n$,使得:

$$\left[-\sum_{k=1}^{n}\frac{d_{ik}}{l_k^2}-2a_i+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\varepsilon_{ij}+\sum_{j=1}^{n}b_{ji}\varepsilon_{ji}^{-1}\rho_i^2+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\zeta_{ij}+\upsilon_i+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\zeta_{ij}^{-1}\rho_j^2\exp(\lambda_2\tau)\right]z_j<-z_i\lambda_2,$$

则系统(1)是输入-状态稳定的。

证明 考虑如下 Lyapunov 泛函:

$$V_i(t)=\int_{\Omega}y_i^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})y_i(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}。\tag{10}$$

针对(10)式两边沿着系统(1)的解分别对 t 求导,可得:

$$\dot{V}_i(t)|_{(1)}=2\int_{\boldsymbol{\Omega}}y_i^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\frac{\partial y_i(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=2\int_{\boldsymbol{\Omega}}y_i^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\left\{\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(d_{ik}\frac{\partial y_i(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\right)-a_i y_i(t,\boldsymbol{x})+\right.$$
$$\left.\sum_{j=1}^{n}b_{ij}g_j(y_j(t,\boldsymbol{x}))+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}g_j(y_j(t-\tau(t),\boldsymbol{x}))+u_i(t,\boldsymbol{x})\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}。\tag{11}$$

通过格林公式,并利用边界条件可得:

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}}y_i^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(d_{ik}\frac{\partial y_i(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\boldsymbol{\Omega}}y_i^{\mathrm{T}}(t,x)\nabla\left(d_{ik}\frac{\partial y_i(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\right)_{k=1}^{m}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=$$
$$\int_{\boldsymbol{\Omega}}\nabla\left(y_i(t,\boldsymbol{x})d_{ik}\frac{\partial y_i(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\right)_{k=1}^{m}\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_{\boldsymbol{\Omega}}\left(d_{ik}\frac{\partial y_i(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\right)_{k=1}^{m}\nabla y_i(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=$$
$$\int_{\partial\boldsymbol{\Omega}}\left(y_i(t,\boldsymbol{x})d_{ik}\frac{\partial y_i(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\right)_{k=1}^{m}\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_{\boldsymbol{\Omega}}\sum_{k=1}^{m}d_{ik}\left(\frac{\partial y_i(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\right)^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-\int_{\boldsymbol{\Omega}}\sum_{k=1}^{m}d_{ik}\left(\frac{\partial y_i(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\right)^2\mathrm{d}\boldsymbol{x},\tag{12}$$

其中$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_m}\right)$是一个梯度算子,且:

$$\left(d_{ik}\frac{\partial y_i(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\right)_{k=1}^{m}=\left(d_{i1}\frac{\partial y_i(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_1},d_{i2}\frac{\partial y_i(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_2},\cdots,d_{im}\frac{\partial y_i(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_m}\right)。$$

由引理3,(12)式可以推导为

$$-\int_{\boldsymbol{\Omega}}\sum_{k=1}^{m}d_{ik}\left(\frac{\partial y_i(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\right)^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant-\int_{\boldsymbol{\Omega}}\sum_{k=1}^{m}\frac{d_{ik}}{l_k^2}y_i^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})y_i(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}。\tag{13}$$

对于任意的正实数 ε_{ij},ζ_{ij},υ_i,由引理1,可得:

$$2\int_{\boldsymbol{\Omega}}y_i^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\sum_{j=1}^{n}b_{ij}g_j(y_j(t,\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\varepsilon_{ij}\int_{\boldsymbol{\Omega}}y_i^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})y_i(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\varepsilon_{ij}^{-1}\rho_j^2\int_{\boldsymbol{\Omega}}y_j^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})y_j(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x},\tag{14}$$

$$2\int_{\boldsymbol{\Omega}}y_i^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\sum_{j=1}^{n}c_{ij}g_j(y_j(t-\tau(t),\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant$$
$$\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\zeta_{ij}\int_{\boldsymbol{\Omega}}y_i^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})y_i(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\zeta_{ij}^{-1}\rho_j^2\int_{\boldsymbol{\Omega}}y_j^{\mathrm{T}}(t-\tau(t),\boldsymbol{x})y_j(t-\tau(t,\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x},\tag{15}$$

$$2\int_{\boldsymbol{\Omega}}y_i^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})u_i(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\upsilon_i\int_{\boldsymbol{\Omega}}y_i^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})y_i(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\upsilon_i^{-1}\int_{\boldsymbol{\Omega}}u_i^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})u_i(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}。\tag{16}$$

把(13)~(16)式代入(11)式,可得:

$$\dot{V}_i(t)\mid_{(1)}\leqslant\left\{-\sum_{k=1}^{n}\frac{d_{ik}}{l_k^2}-2a_i+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\varepsilon_{ij}+\sum_{j=1}^{n}b_{ji}\varepsilon_{ji}^{-1}\rho_i^2+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\zeta_{ij}+\upsilon_i\right\}\int_{\boldsymbol{\Omega}}y_i^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})y_i(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+$$
$$\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\zeta_{ij}^{-1}\rho_j^2\int_{\boldsymbol{\Omega}}y_j^{\mathrm{T}}(t-\tau(t),\boldsymbol{x})y_j(t-\tau(t,\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\upsilon_i^{-1}\int_{\boldsymbol{\Omega}}u_i^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})u_i(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}。$$

最终可得 $\dot{V}_i(t)\leqslant\sum_{j=1}^{n}[\boldsymbol{R}_{ij}V_j(t)+[\boldsymbol{Q}_{ij}V_j(\boldsymbol{t})]_\tau]+J_i(\boldsymbol{t})$，其中：

$$\boldsymbol{R}_{ij}:=-\sum_{k=1}^{n}\frac{d_{ik}}{l_k^2}-2a_i+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\varepsilon_{ij}+\sum_{j=1}^{n}b_{ji}\varepsilon_{ji}^{-1}\rho_i^2+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\zeta_{ij}+\upsilon_i,$$
$$\boldsymbol{Q}_{ij}:=c_{ij}\zeta_{ij}^{-1}\rho_j^2,J_i(t):=\upsilon_i^{-1}\int_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})u_i(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}。$$

则由引理 4 可得 $V_i(t)\leqslant\|\varphi_i\|^2\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}+\chi_2(t)$，其中 $\chi_2(t)$ 是一个连续非负的递增函数，且满足 $\chi_2(t)=\max\left(\frac{\|J_{i,t}\|_\infty}{-\sum_{j=1}^{n}[R_{ij}+Q_{ij}]}\right),t\geqslant 0$。因此，反应扩散神经网络系统(1)是输入-状态稳定。　证毕

注 1　定理 1 和定理 2 中，当输入 $J(t)=0$ 时，则该反应扩散神经网络系统是指数渐近稳定，本文结果推广了文献[3]中的稳定性结论。

注 2　上述关于输入-状态稳定的结果中，所得反应扩散系统的输入-状态稳定中增益函数是时变的，因而所对应的状态估计更为精确。

参考文献：

[1] HOPFIELD J J, TANK D W. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-stage neurons[J]. Proc Nat Acad Sci，1984，81(10)：3088-3092.

[2] LI X F，DING D. Mean square exponential stability of stochastic Hopfield neural networks with mixed delays[J]. Statistics & Probability Letters，2017，126：88-96.

[3] WANG L S，XU D Y. Global exponential stability of Hopfield reaction-diffusion neural networks with time-varying delays[J]. Science in China Series F-Information Sciences，2003，46(6)：466-474.

[4] MA Q，FENG G，XU S Y. Delay-dependent stability criteria for reaction-diffusion neural networks with time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Cybernetics，2013，43(6)：1913-1920.

[5] YANG X S，CAO J D，YANG Z C. Synchronization of coupled reaction-diffusion neural networks with time-varying delays via pinning impulsive controller[J]. SIAMJ Control Optim，2013，51(5)：3486-3510.

[6] XU B B，HUANG Y L，WANG J L，et al. Passivity of linearly coupled reaction-diffusion neural networks with switching topology and time-varying delay[J]. Neurocomputing，2016，182(19)：274-283.

[7] LU G J. Global exponential stability and periodicity of reaction-diffusion delayed recurrent neural networks with Dirichlet boundary conditions[J]. Chaos，Solitons and Fractals，2007，35(1)：116-125.

[8] SONTAG E D. On the input to state stability property[J]. European Journal of Control，1995，1(1)：24-36.

[9] 蒲浩，蒋海军，刘衍民，等. 具有非线性脉冲效应和混合时滞的神经网络的指数同步[J]. 重庆理工大学学报(自然科学)，2016，30(9)：143-150.
PU H，JIANG H J，LIU Y M，et al. Exponential synchronization of neural networks with nonlinear impulsive effects and mixed time delays[J]. Journal of Chongqing University of Technology(Natural Science)，2016，30(9)：143-150.

[10] 张韬，苏亚坤，朱进. 具有分布时滞脉冲 Cohen-Grossberg 神经网络的稳定性分析[J]. 重庆理工大学学报(自然科学)，2015，29(3)：134-140.
ZHANG T，SU Y K，ZHU J. Exponential stability for impulsive Cohen-Grossberg neural network with infinite distributed delays[J]. Journal of Chongqing University of Technology(Natural Science)，2015，29(3)：134-140.

[11] SONTAG E D. Further facts about input-to-state sttabilization[J]. IEEE Transaction on Automatic Control，1989，35(4)：473-476.

[12] SANCHEZ E，PEREZ J P. Input-to-state stability(ISS) analysis for dynamical neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits Systems I Fundamental Theory Applications，1999，46(11)：1395-1398.

[13] AHN C K. Some new results on stability of Takagi Sugeno fuzzy Hopfield neural networks[J]. Fuzzy Set and Systems，2011，179(1)：100-111.

[14] ZHU S，SHEN Y. Two algebraic criteria for input-to-state stability of recurrent neural networks with time-varying delays[J]. Neural Compute Appl，2013，22(6)：1163-1169.

[15] YANG Z C，ZHOU W S，HUANG T W. Exponential input-to-state stability of recurrent neural net-works with

multiple time-varying delays[J]. Cognitive Neurodynamics, 2014, 8(1): 47-54.

[16] LI J J, ZHOU W S, YANG Z C. State estimation and input-to-state stability of impulsive stochastic BAM neural networks with mixed delays[J]. Neurocomputing, 2017, 227: 37-45.

[17] ZHOU W S, TENG L Y, XU D Y. Mean-square exponentially input-to-state stability of tochastic Cohen-Grossberg neural networks with time-varying delays[J]. Neurocomputing, 2014, 153: 54-61.

[18] YANG Z C, XU D Y. Stability analysis and design of impulsive control systems with time delay[J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2007, 52(8): 1448-1454.

[19] HORN R A, JOHNSON C R. Topic in matrix analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

Input-to-State Stability of Reaction-Diffusion Neural Networks with Time-Varying Delay

SU Peng, QIU Xiaowei, YANG Zhichun

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]It primarily investigate input-to-state stability of reaction-diffusion neural networks with time delay. [**Methods**] Firstly, a model of reaction-diffusion neural network with time delay is established, in which the active function aren't required to be smooth and bounded. Then, by using Lyapunov functions and utilizing delay differential inequality with time-varying input. [**Findings**] Several input-to-state stability sufficient conditions are derived for reaction-diffusion neural networks with time delay. [**Conclusions**] The results improve and promote the relevant work of the existing literature.

Keywords: reaction-diffusion neural networks; input-to-state stability; delayed differential inequalities; time delay

(责任编辑　黄　颖)