

带初始状态误差的分数阶P型迭代算法的收敛性分析^{*}

李艳芳, 刘向虎, 刘衍民, 何 军
(遵义师范学院 数学学院, 贵州 遵义 563006)

摘要:【目的】为了解决实际的操作中迭代初态相对于期望初态的误差问题。【方法】通过 Laplace 变换和 M-L 函数引导出了弱解的表达式, 证明开闭环 P 型迭代算法收敛的充分条件, 最后举例对结果进行验证。【结果】证明了开闭环迭代算法的收敛性。【结论】所得结果拓展了迭代算法在分数阶领域的研究, 对已有成果进行了补充。

关键词: Caputo 分数阶导数; 迭代学习控制; 收敛性; M-L 函数

中图分类号: O29

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2018)03-0107-06

本文将对如下带初始状态误差的分数阶 P 型迭代算法的收敛性进行分析:

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), t \in J = [0, b] \\ x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \quad (1)$$

其中 ${}^C D_t^\alpha$ 表示 α 阶 Caputo 分数阶导数, $0 < \alpha < 1$ 。 $A, B, C \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $u(t)$ 为控制向量。

迭代学习算法(Iterative learning control, ILC)由日本学者 Uchiyama 在 1978 年提出, 但是直到 1984 年 Arimoto 等人^[1]才研究了 ILC 的算法的有效性, 并创立了迭代学习控制理论。在过去的几十年内, 分数阶微积分和方程得到了众多学者的青睐, 得到了许多开创性的工作^[2-7]。因为分数阶微积分描述的是工程、物理科学、控制等方面的许多现象, 所以许多学者在分数阶迭代学习控制研究方面也作出了一定的工作^[8-20], 其中不乏关于分数阶非线性系统的研究^[14-20]。兰永红^[14]研究了一类分数阶非线性系统的 P 型迭代学习算法, 介绍了 λ 范数, 并利用 Gronwall 不等式得到了算法鲁棒收敛的条件; 李岩^[16]讨论了一类时滞非线性分数阶系统的 P 型迭代学习算法的收敛性。以上关于迭代学习的控制理论的研究, 通常假设被控对象在每次运行时的初始状态都精确到期望轨迹上, 然而实际的操作中往往会引起迭代初态相对于期望初态的误差, 因此本文将主要研究一类分数阶非线性系统的带状态误差的学习率的收敛性。在研究的过程中, 利用已有的 λ 范数、Laplace 变换和 M-L 函数, 对开闭环迭代算法的收敛性进行证明。

本文中 n 维向量 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ 的范数为 $\|w\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{|w_i|\}$, 并且 λ 范数定义为 $\|\cdot\|_\lambda = \sup_{t \in J} \{e^{-\lambda t} \|\cdot\|\}, \lambda > 0$ 。

1 预备知识

本文将利用分数阶微积分的一些基本概念和定义^[4-6]。

定义 1^[6] 两个参数变量的 M-L 型函数为 $E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\alpha m + \beta)}, \alpha > 0, \beta > 0, z \in C$ 。

接下来, 根据文献^[6-9], 首先给出如下引理。

引理 1 方程(1)的弱解为:

* 收稿日期: 2017-03-19 修回日期: 2018-04-20 网络出版时间: 2018-05-22 10:01

资助项目: 遵义师范学院博士基金(No. BS[2014]19; No. BS[2015]09); 贵州省联合基金(No. LH[2015]7002); 贵州省教育厅基金(No. KY[2015]391; No. KY[2016]046); 贵州省教育厅教学改革项目(No. [2015]337); 贵州省科技厅项目黔科合基础(No. [2016]1160; No. [2016]1161); 遵义市科合人才(No. [2016]15)

第一作者简介: 李艳芳, 女, 讲师, 研究方向为分数阶微分方程及其应用, E-mail: liyanfang998@126.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180522.1001.010.html>

$$x(t) = S_{a,1}(A, t)x_0 + \int_0^t S_{a,a}(A, t-s)Bu(s)ds, S_{a,\beta}(A, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m t^{am+\beta-1}}{\Gamma(am+\beta)}. \quad (2)$$

引理 2 由文献[19]的定义 2.4 可知,算子 $S_{a,1}(A, t), S_{a,a}(A, t)$ 是指数有界的,即是说存在常数 $C_0 = \frac{1}{\alpha}$, $C_1 = \frac{1}{\alpha} \|A\|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, e_a(t) = e^{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}t}, M = e_a(b)$, 使得:

$$\|S_{a,1}(A, t)\| \leq C_0 e_a(t), \|S_{a,a}(A, t)\| \leq C_1 e_a(t). \quad (3)$$

2 开闭环系统

本节研究如下分数阶方程:

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha = Ax_k(t) + Bu_k(t), t \in J = [0, b] \\ y_k(t) = Cx_k(t) \end{cases}, k=1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

在此应用开闭环 P 型 ILC 算法:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + L_1 e_k(t) + L_2 e_{k+1}(t), \quad (5)$$

其中 L_1, L_2 是确定的参数, $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$, $y_d(t)$ 是已知函数。迭代的初始状态是:

$$x_{k+1}(0) = x_k(0) + BL_1 e_k(t). \quad (6)$$

本文假设: (H1): $\|I - \lambda^{-1}C_1M\|C\|L_2B\| > 0$, (H2): $r = \frac{\|I - CS_{a,1}(A, t)BL_1\| + \lambda^{-1}C_1M\|C\|\|L_1B\|}{\|I - \lambda^{-1}C_1M\|C\|\|L_2B\|} < 1$ 。

定理 1 假设开闭环 P 型 ILC 算法(5)式、假设(H1)和(H2)成立,且 $y_k(t)$ 是方程(4)的输出,若每次迭代的初始状态满足(6)式,则有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k\|_\lambda = 0, t \in J$ 。

证明 依据(2), (5), (6)式,可以得出:

$$\begin{aligned} x_{k+1}(t) &= S_{a,1}(A, t)x_{k+1}(0) + \int_0^t S_{a,a}(A, t-s)Bu_{k+1}(s)ds = \\ &= x_k(t) + S_{a,1}(A, t)BL_1 e_k(t) + \int_0^t S_{a,a}(A, t-s)BL_1 e_k(s)ds + \int_0^t S_{a,a}(A, t-s)BL_2 e_{k+1}(s)ds. \end{aligned}$$

取(6)式的范数:

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}(t)\| &\leq \|(I - CS_{a,1}(A, t)BL_1)\| \|e_k(t)\| + \|C\| \int_0^t \|C_1 e_a(s)\| \|BL_1\| \|e_k(s)\| ds + \\ &\quad \|C\| \int_0^t \|C_1 e_a(s)\| \|BL_2\| \|e_{k+1}(s)\| ds. \end{aligned} \quad (7)$$

取(7)式的 λ 范数,有:

$$\|e_{k+1}\|_\lambda = \frac{\|I - CS_{a,1}(A, t)BL_1\| + \lambda^{-1}C_1M\|C\|\|L_1B\|}{\|I - \lambda^{-1}C_1M\|C\|\|L_2B\|} \|e_k\|_\lambda = r \|e_k\|_\lambda. \quad (8)$$

因为 $r < 1$, (8)式是压缩映射,则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k\|_\lambda = 0, t \in J$ 。

证毕

定理 1 说明跟踪误差 $e_k(t)$ 与 C 和 $x_k(t)$ 相关,同时也注意到参数 C, B, L_1, L_2 的有界性也揭示了 $\|e_k\|_\lambda$ 的有界性,所以定理 1 间接的说明输出误差与 r 有关。从结果上看可以进行更深入地讨论。

推论 1 假设所有条件与定理 1 相同,有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k\|_\lambda = 0, \frac{\ln \frac{C_1M\|L_1\| + CM\|L_2\|}{\|L_1\|C_0}}{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}} < t < b$ 。

证明 从定理 1 的条件 $\frac{\|I - CS_{a,1}(A, t)BL_1\| + \lambda^{-1}C_1M\|C\|\|L_1B\|}{\|I - \lambda^{-1}C_1M\|C\|\|L_2B\|} < 1$, 这说明参数满足:

$$\|I - C_0 e_a(t)C\|\|L_1B\| + \lambda^{-1}C_1M\|C\|\|L_1B\| \leq \|I - \lambda^{-1}C_1M\|C\|\|L_2B\|,$$

所以 $\frac{\ln \frac{C_1M\|L_1\| + CM\|L_2\|}{\|L_1\|C_0}}{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}} < t < b$ 。

证毕

3 带初态随机扰动的分数阶 P 型迭代算法

本节主要考虑如下分数阶方程:

$$\begin{cases} D_t^\alpha x_k(t) = Ax_k(t) + Bu_k(t) + \omega_k(t) \\ y_k(t) = Cx_k(t) + v_k(t) \end{cases}, k=0,1,2,3,\dots \quad (9)$$

其中 $\omega_k(t), v_k(t)$ 为随机扰动, $t \in J = [a, b]$ 。

首先,针对以上的问题有假设:若 $\|\omega_k\|_\lambda \leq \epsilon_1, \|v_k\|_\lambda \leq \epsilon_2$, 则:

(H3): 对正数 $\epsilon_1, \epsilon_2, \|\omega_k\|_\lambda \leq \epsilon_1, \|v_k\|_\lambda \leq \epsilon_2$;

(H4): $\rho_1 = \|I + CS_{a,1}(A, t)L_2B\| - \lambda^{-1}C_1M\|C\|\|L_2B\| > 0, \rho_2 = \|I - CS_{a,1}(A, t)L_1B\| + \lambda^{-1}C_1M\|C\|\|L_1B\|$ 。

对方程(9),采取开闭环P型迭代算法:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + L_1e_k(t) + L_2e_{k+1}(t), \quad (10)$$

其中 L_1, L_2 为确定的常数, $e_k = y_d(t) - y_k(t)$, $y_d(t)$ 是已知函数, 同时:

$$x_{k+1}(0) = x_k(0) + BL_1e_k(t) + BL_2e_{k+1}(t). \quad (11)$$

定理 2 假设条件(H3), (H4)成立, 设 $y_k(\cdot)$ 为方程(2)的输出, 若 $\epsilon_1 \rightarrow 0$ 和 $\epsilon_2 \rightarrow 0, \rho_1 > \rho_2$, 根据开闭环P型迭代算法(10)式, 得到 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k\|_\lambda = 0, t \in J$ 。

证明 基于(2)和假设(H2), (H3)有:

$$\begin{aligned} x_{k+1}(t) &= x_k(t) + S_{a,1}(A, t)BL_1e_k(t) + S_{a,1}(A, t)BL_2e_{k+1}(t) + \int_0^t S_{a,\alpha}(A, t-s)BL_1e_k(s)ds + \\ &\quad \int_0^t S_{a,\alpha}(A, t-s)BL_2e_{k+1}(s)ds + \int_0^t S_{a,\alpha}(A, t-s)\omega_{k+1}(s)ds. \end{aligned}$$

则上式的 $k+1$ 次迭代误差为:

$$\begin{aligned} e_{k+1}(t) &= y_d(t) - Cx_{k+1}(t) - v_{k+1}(t) = (I - CS_{a,1}(A, t)BL_1)e_k(t) - CS_{a,1}(A, t)BL_2e_{k+1}(t) - \\ &\quad C \int_0^t S_{a,\alpha}(A, t-s)BL_1e_k(s)ds - C \int_0^t S_{a,\alpha}(A, t-s)BL_2e_{k+1}(s)ds - C \int_0^t S_{a,\alpha}(A, t-s)\omega_{k+1}(s)ds - v_{k+1}(t). \end{aligned} \quad (12)$$

取 λ -范数, 可以得到:

$$\begin{aligned} \|I + CS_{a,1}(A, t)L_2B\| \|e_{k+1}\|_\lambda &\leq \|I - CS_{a,1}(A, t)L_1B\| \|e_k\|_\lambda + \sup_{t \in [0, T]} e^{-\lambda t} C_1 \|C\| \|BL_1\| \int_0^t \|e_k(s)\| e^{\lambda s} ds \|e_k\|_\lambda + \\ &\quad \sup_{t \in [0, T]} e^{-\lambda t} C_1 \|C\| \|L_2B\| \int_0^t \|e_k(s)\| e^{\lambda s} ds \|e_{k+1}\|_\lambda + \sup_{t \in [0, T]} e^{-\lambda t} C_1 \|C\| \int_0^t \|e_k(s)\| e^{\lambda s} ds \|\omega_{k+1}\|_\lambda + \sup_{t \in [0, T]} e^{-\lambda t} \|v_{k+1}(t)\|. \end{aligned} \quad (13)$$

考虑依据(H3), (H4), 若 $\epsilon = \lambda^{-1}C_1\epsilon_1M\|C\| + \epsilon_2, \rho_1 \|e_{k+1}\|_\lambda \leq \rho_2 \|e_k\|_\lambda + \epsilon$, 这说明 $\|e_k\|_\lambda \leq \frac{\epsilon}{\rho_1 - \rho_2}$, 若 $\epsilon_1 \rightarrow 0$ 和 $\epsilon_2 \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k\|_\lambda = 0$ 。证毕

由定理2可知:一方面,随机扰动对系统(9)产生了一定的影响, $\epsilon_1 \rightarrow 0$ 和 $\epsilon_2 \rightarrow 0$ 说明影响很小;另一方面,因为 $\rho_1 > \rho_2$, 所以得到如下推论。

推论 2 假设所有的条件与定理2相同, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(t)\|_\lambda = 0$, 那么 t 满足:

$$\frac{\ln \left| \frac{C_1M}{\lambda C_0} \right|}{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}} < t < \frac{\ln \frac{\|I - \lambda^{-1}C_1\|C\|\|L_2B\|M}{\|C\|\|L_2B\|}}{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}}. \quad (14)$$

证明 依据假设(H4), $\|I + CS_{a,1}(A, t)L_2B\| - \lambda^{-1}C_1\|C\| + \|L_2B\|M > 0$, 那么

$$t < \frac{\ln \frac{\|I - \lambda^{-1}C_1\|C\| + \|L_2B\|M}{\|C\|\|L_2B\|}}{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}},$$

由定理2知 $\epsilon_1 \rightarrow 0$ 和 $\epsilon_2 \rightarrow 0, \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\|I - CS_{a,1}(A, t)L_1B\| + \lambda^{-1}C_1\|C\|\|L_1B\|M}{\|I + CS_{a,1}(A, t)L_2B\| - \lambda^{-1}C_1\|C\|\|L_2B\|M} < 1$, 这说明 $\frac{\ln \left| \frac{C_1M}{\lambda C_0} \right|}{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}} < t$ 。最后得到

$$\text{不等式 } \frac{\ln \left| \frac{C_1M}{\lambda C_0} \right|}{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}} < t < \frac{\ln \frac{\|I - \lambda^{-1}C_1\|C\|\|L_2B\|M}{\|C\|\|L_2B\|}}{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

证毕

4 数值模拟

为了验证算法的有效性,本节将给出两个实例对算法有效性进行模拟。

4.1 带初始误差的 P 型迭代算法

考虑如下带初始误差的分数阶迭代系统 $\begin{cases} {}^C D_t^{0.5} x_k(t) = x_k(t) + 0.2u_k(t), t \in J = [0, 1.9] \\ x(0) = 0.5 \\ y_k(t) = x_k(t) \end{cases}$, 它的迭代学习

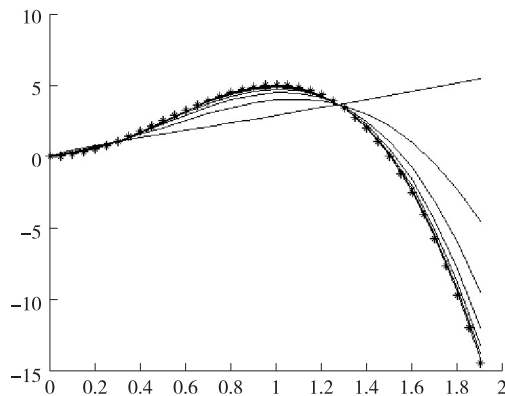
率和初始误差为 $\begin{cases} u_{k+1}(t) = u_k(t) + 0.5e_k(t) + 0.5e_{k+1}(t) \\ x_{k+1}(0) = x_k(0) + 0.1e_k(t) \end{cases}$ 。假设初始控制 $u_0(t) = 0, y_d(t) = 5t^2(3-4t)$, 且:

$$B = 0.2, \alpha = 0.5, A = 1, \lambda = 2, C = L_1 = L_2 = 0.5, C_0 = 2, C_1 = 2, \lambda - \|A\|^{\frac{1}{\alpha}} = 1 > 0,$$

$$M \approx 6 > 0, \|I\| - \lambda^{-1} C_1 \|C\| \|L_2 B\| M \approx 0.7 > 0, \frac{\|I - CS_{\alpha,1}(A, t) B L_1\| + \lambda^{-1} C_1 M \|C\| \|L_1 B\|}{\|I\| - \lambda^{-1} C_1 M \|C\| \|L_2 B\|} \approx \frac{0.5}{0.7} < 1,$$

那么可以看出以上参数满足定理 1 的条件。

由图 1 和图 2 可以看到,对于开闭环 P 型迭代系统来说,随着迭代次数的增加,输出结果逐渐逼近目标。本文没有使用单一的迭代率,因为单一的迭代率会导致在迭代的后期,系统的输出可能在目标的上下波动,因此文中使用自适应矫正的方法,即当 $e_k(t) > 0, u_k(t) = u_k(t) - 0.5e_k(t)$ 或者 $e_k(t) < 0, u_k(t) = u_k(t) + 0.5e_k(t)$, k 是迭代次数,所以算法的输出是稳定和高效的。从图 2 可以看出,在迭代次数为 7 次时,迭代误差为 0,所以此迭代学习控制算法是收敛的。



注: *** 表示目标曲线, —— 表示系统的迭代输出,下同。

图 1 目标曲线与迭代结果

Fig. 1 The desired trajectory and the result of iteration

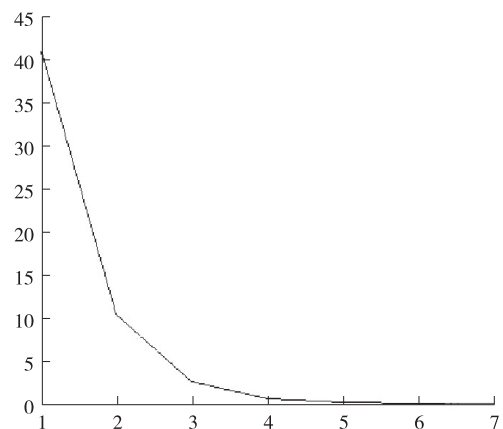


图 2 迭代次数与迭代误差

Fig. 2 The number of iteration and the tracking error

4.2 带随机扰动的 P 型迭代算法

考虑如下带随机扰动的分数阶 P 型迭代系统

$$\begin{cases} {}^C D_t^{0.5} x_k(t) = x_k(t) + 0.2u_k(t) + 10^{-15}t, t \in J = [0, 1.9] \\ x(0) = 0.5 \\ y_k(t) = 0.5x_k(t) + 10^{-10}t^2 \end{cases},$$

它的迭代学习率和初始状态为:

$$\begin{cases} u_{k+1}(t) = u_k(t) + e_k(t) + 0.5e_{k+1}(t) \\ x_{k+1}(0) = x_k(0) + 0.2e_k(t) + 0.1e_{k+1}(t) \end{cases}.$$

设定初始控制函数 $u_0(t) = 0, y_d(t) = 5t^3$, 并且:

$$\alpha = 0.5, A = 1, B = 0.2, C = 1, \lambda = 2, L_1 = L_2 = 0.5,$$

$$C_0 = 2, C_1 = 2, \rho_1 \approx 1.65, \rho_2 \approx 0.65, \epsilon_1 = 10^{-15} \rightarrow 0, \epsilon_2 = 10^{-10} \rightarrow 0,$$

那么以上参数均满足定理 2 的条件。本实例也利用自适应矫正的方法,即 $e_k(t) > 0, u_k(t) = u_k(t) - 0.5e_k(t)$ 或者 $e_k(t) < 0, u_k(t) = u_k(t) + 0.5e_k(t)$, k 是迭代次数, m 为参数,设定 $m = 0.5, 0.7, 1$, 图 3、图 5、图 7 为系统的输出结果,图 4、图 6、图 8 是迭代误差曲线。

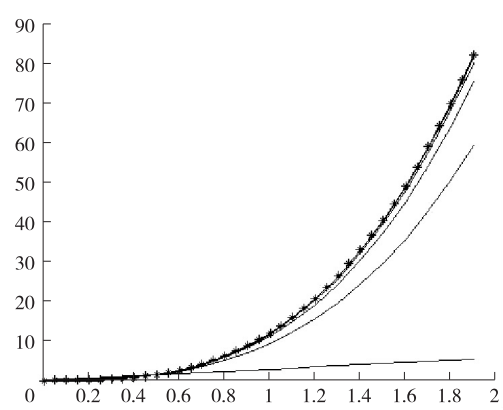


图 3 $m=0.5$ 时目标曲线与迭代结果

Fig. 3 The desired trajectory and the result of iteration as $m=0.5$

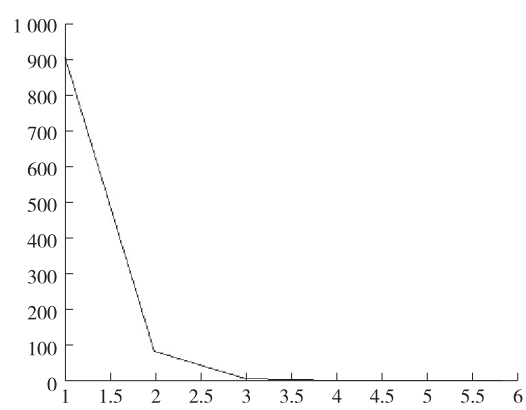


图 4 $m=0.5$ 时迭代次数与迭代误差

Fig. 4 The number of iteration and the tracking error as $m=0.5$

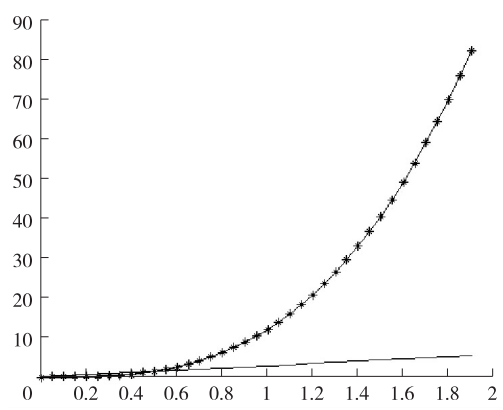


图 5 $m=0.7$ 时目标曲线与迭代结果

Fig. 5 The desired trajectory and the result of iteration as $m=0.7$

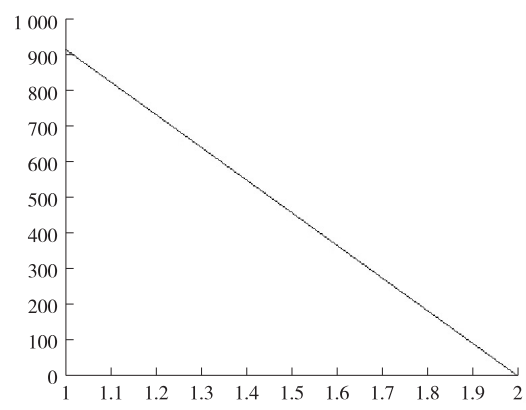


图 6 $m=0.7$ 时迭代次数与迭代误差

Fig. 6 The number of iteration and the tracking error as $m=0.7$

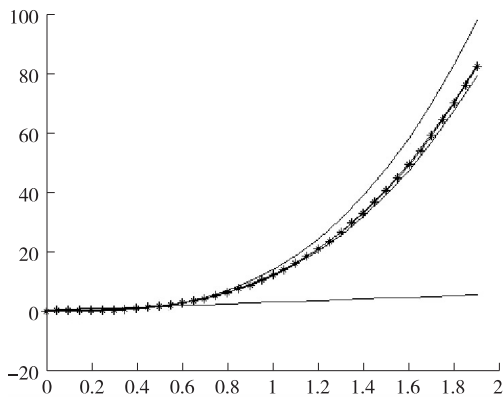


图 7 $m=1$ 时目标曲线与迭代结果

Fig. 7 The desired trajectory and the result of iteration as $m=1$

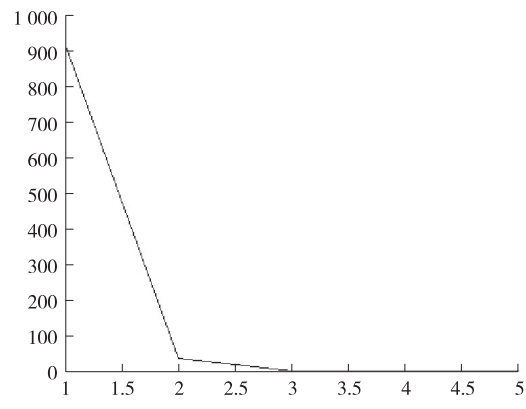


图 8 $m=1$ 时迭代次数与迭代误差

Fig. 8 The number of iteration and the tracking error as $m=1$

从图 3-8 和表 1 中不难看出出迭代次数为 7 时,迭代误差趋近 0,所以系统的输出是比较精确地跟踪了目标曲线。通过 3 种情况的比较,可见当 $m=1$ 时,迭代次数仅仅为 2,迭代误差为 0.000 1,所以此时算法的收敛效果最好。

表 1 不同参数的迭代次数和跟踪误差比较

Tab. 1 The comparison of the number of iterations and tracking errors with different parameters

m	迭代次数	迭代误差	迭代时间/s
0.7	4	0.002	53.307
1	2	0.000 1	43.123
1.2	3	0.000 21	44.833 2

参考文献:

- [1] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robots by learning[J]. Journal of Robotic Systems, 1984, 1(2): 123-140.
- [2] MILLER K S, ROSS B. An introduction to the fractional calculus and differential equations [M]. New York: John Wiley, 1993.
- [3] KILBAS A A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and applications of fractional differential equations [M]. Oxford, UK: Elsevier, 2006.
- [4] LAKSHMIKANTHAM V, LEELA S, DEVI J V. Theory of fractional dynamic systems [M]. Cambridge: Cambridge Academic Publishers, 2009.
- [5] DIETHELM K. The analysis of fractional differential equations [M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.
- [6] WANG J R, ZHOU Y, MEDVED M. On the solvability and optimal controls of fractional integro differential evolution systems with infinite delay [J]. J Optim Theory Appl, 2012, 152: 31-50.
- [7] BIEN Z, XU J X. Iterative learning control analysis; analysis, design, integration and applications [M]. Norwell, MA, USA: Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [8] CHEN Y Q, WEN C. Iterative learning control: convergence, robustness and applications [M]. London, UK: Springer-Verlag, 1999.
- [9] MIKAEL N. Iterative learning control: analysis, design, and experiments [EB/OL]. (2015-08-01) [2017-02-25]. https://www.researchgate.net/publication/2866895_Iterative_Learning_Control_-_Analysis_Design_and_Experiments.
- [10] XU J X, TAN Y. Linear and nonlinear iterative learning control [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- [11] WANG Y Q, GAO F R, FRANCIS J D. Survey on iterative learning control, repetitive control, and run-to-run control [J]. J Process Control, 2009, 19(10): 1589-1600.
- [12] JEROEN V D W, TIJS D, OKKO B. Iterative learning control for uncertain systems: robust monotonic convergence analysis [J]. Automatica, 2009, 45(10): 2383-2391.
- [13] LI Y, CHEN Y Q, HYO S A. Fractional-order iterative learning control for fractional-order systems [J]. Asian Journal of Control, 2011, 13(1): 1-10.
- [14] LAN Y H. Iterative learning control with initial state learning for fractional order nonlinear systems [J]. Comput Math Appl, 2012, 64(10): 3210-3216.
- [15] MING T L, CHUNG Y, MENG S T, et al. Application of robust iterative learning algorithm in motion control system [J]. Mechatronics, 2013, 23(5): 530-540.
- [16] LI Y, JIANG W. Fractional order nonlinear systems with delay in iterative learning control [J]. Appl Math Comput, 2015, 257(C): 546-552.
- [17] WANG J R, FECKAN M, ZHOU Y. Center stable manifold for planar fractional damped equations [J]. Appl Math Comput, 2017, 296: 257-269.
- [18] LIU S D, WANG J R, WEI W. Iterative learning control based on a noninstantaneous impulsive fractional-order system [J]. J Vib Control, 2016, 22(8): 1972-1979.
- [19] BAJLEKOVA E G. Fractional evolution equations in Banach spaces [J]. Eindhoven University of Technology Ndhoven, 2001, 14(8): 737-745.

The Convergence Analysis of *P*-Type Iterative Learning Control with Initial State Error for Some Fractional System

LI Yanfang, LIU Xianghu, LIU Yanmin, HE Jun

(School of Mathematics, Zunyi Normal College, Zunyi Guizhou 563002, China)

Abstract: [Purposes] In order to solve the error of the initial state of the iteration compared to the expected initial state in the actual operation. [Methods] According to the Laplace transform and the M-L function, the concept of mild solutions is showed. [Findings] The sufficient conditions of convergence for the open and closed *P*-type iterative learning control is obtained. Some examples are given to illustrate our main results. [Conclusions] The results extend the research of iterative algorithms in the fractional domain and supplement the existing results.

Keywords: caputo fractional derivative; iterative learning control; convergence; Mittag-Leffler function.

(责任编辑 黄 颖)