DOI:10.11721/cqnuj20180316

一类非线性微分方程的近似解*

马 瑾,杨 和
(西北师范大学 数学与统计学院,兰州 730070)

摘要:【目的】在偏序 Banach 空间中结合非线性扰动理论,得到一类新的非线性微分方程,并对该方程正解的存在性进行讨论。【方法】运用一个新的不动点定理,将求方程的解的存在性问题转化为证明算子不动点的存在性问题。【结果】证明了该非线性微分方程在满足一定的条件下至少存在一个正解,并给出了解的近似迭代序列。【结论】上述结果推广了已有文献的结论。

关键词:偏序 Banach 空间;不动点定理;正解;存在性;近似迭代序列

中图分类号:O177.5 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2018)03-0113-05

众所周知,把证明方程的解的存在性问题转化为证明算子的不动点的存在性问题是证明代数方程、微分方程和积分方程等方程解的存在性及唯一性的重要方法。1922 年,Banach[1]用度量空间中的压缩映射描述了这个方法,用压缩映射原理证明一类方程解的存在唯一性。此后,这个方法不断发展并取得了很多成果,甚至成为非线性泛函分析的主要内容。近些年来,学者们通过减弱 Banach 压缩映射原理中的压缩条件,得到了许多新的不动点定理[2-9]。Dhage[2]在偏序 Banach 空间中得到一个新的不动点定理,本文试图用此不动点定理证明一类非线性微分方程正解的存在性,同时给出这个解的近似迭代序列。所得结果是对文献[3,5]中结论的推广和改进。

Pathak 和 Rodríguez-lópez[3]运用不动点定理在偏序赋范线性空间中证明了微分方程初值问题

$$\begin{cases}x'(t)=f(t,x(t))+g(t,x(t)),t\in J:=[t_0,t_0+a]\\ x(0)=x_0\end{cases}$$

解的存在性,其中非线性函数表示为两个连续函数的和。

在文献[5]中,Dhage 和 Lakshmikantham 运用不动点定理证明了一类微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right]=g(t,x(t)),t\in J\\ x(0)=x_0\end{cases}$$

解的存在性,其中 $f:J\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}\backslash\{0\}$ 连续,$g:J\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续。

受上述文献启发,本文运用非线性扰动方法和一个新的不动点定理,在偏序 Banach 空间中讨论一类更一般的微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right]+\lambda\left(\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right)=g(t,x(t)),t\in J\\ x(0)=x_0\end{cases}\tag{1}$$

正解的存在性,其中 $\lambda\in\mathbf{R}^+$,$f:J\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+\backslash\{0\}$ 连续,$g:J\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 连续。

函数 $x\in C(J,\mathbf{R})$ 是初值问题(1)的解是指:x 满足条件:1) 对 $\forall t\in J$,函数 $\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}$ 关于 x 是绝对连续的;2) $x\in AC(J,\mathbf{R})$,其中 $AC(J,\mathbf{R})$ 表示绝对连续函数集。

1 预备知识

设 E 为 Banach 空间,其范数为 $\|\cdot\|$,在 E 中定义偏序 $\preceq$ 满足:(a) 自反性:$a\preceq a$,$\forall a\in E$;(b) 传递性:$a\preceq b$,

* **收稿日期:**2017-02-28 **修回日期:**2018-04-24 **网络出版时间:**2018-05-22 10:01

第一作者简介:马瑾,女,研究方向为非线性泛函分析,E-mail:majin950512@163.com;**通信作者:**杨和,男,副教授,博士,E-mail:yanghe256@163.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180522.1001.018.html

$b\preceq c$,则 $a\preceq c$,$\forall a,b,c\in E$;(c) 自反对称性:$a\preceq b$,$b\preceq a$,则 $a=b$,$\forall a,b\in E$。则$(E,\preceq,\|\cdot\|)$为偏序 Banach 空间。

设$(E,\preceq,\|\cdot\|)$为完备偏序赋范线性空间,令 $E^{+}=\{x\in E\,|\,x\geqslant\theta\}$,$\boldsymbol{K}=\{E^{+}\subset E\,|\,uv\in E^{+},\forall u,v\in E^{+}\}$。这里 θ 表示 E 中的零元素,$\boldsymbol{K}$ 表示 E 中的正向量。下面引入本文所需的定义,它们均可在文献[2-3,8]中查到。

定义1 设$(E,\preceq,\|\cdot\|)$为偏序 Banach 空间,$T:E\to E$。对 $\forall x,y\in E$,如果当 $x\preceq y$ 时,有 $Tx\preceq Ty$,则称 T 是不减映射。

定义2 设$(E,\preceq,\|\cdot\|)$为偏序 Banach 空间,$a\in E$,对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使得当 $|x-a|<\delta$ 时,有 $|Tx-Ty|<\varepsilon$成立,则称映射 T 在 $x=a$ 处偏连续。若映射 T 在 E 中的任意点均偏连续,则称映射 T 在 E 上偏连续。

定义3 设$(E,\preceq,\|\cdot\|)$为偏序 Banach 空间,C 为 E 中的任意链。对映射 $T:E\to E$,如果 $T(C)\subset E$ 是有界的,则称映射 T 是偏有界的。若存在一个常数 M,使得 $T(C)\leqslant M$,则称映射 T 是一致偏有界的。

定义4 设$(E,\preceq,\|\cdot\|)$为偏序 Banach 空间,C 为 E 中的任意链。对映射 $T:E\to E$,如果 $T(C)$是 E 中的相对列紧子集,则称映射 T 是偏列紧的。若 $T(C)\subset E$ 是偏列紧且一致偏有界的,则称映射 T 是一致偏列紧的。

定义5 设$(E,\preceq,\|\cdot\|)$为偏序 Banach 空间,若有序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$在 E 上单调,则存在一个子列$\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$,使得当 $x_{n_k}\to x^{*}(n\to\infty)$时,有 $x_n\to x^{*}(n\to\infty)$,则称 E 上定义的范数$\|\cdot\|$与序关系$\preceq$是相容的。

定义6 设$(E,\preceq,\|\cdot\|)$为偏序 Banach 空间,如果算子 $T:E\to E$ 满足$\|Ty-Tx\|\leqslant\varphi(\|x-y\|)$,其中函数 $\varphi:\mathbf{R}^{+}\to\mathbf{R}^{+}$是上半连续函数,单调不减且 $\varphi(0)=0$,则称算子 T 是非线性偏序 $\mathfrak{D}$-Lipschitz 算子,称函数 φ 为 $\mathfrak{D}$-函数。如果满足 $\varphi(r)\leqslant r(r>0)$,则称 T 是 E 中的非线性压缩算子。如果满足 $\varphi(r)=kr$,k 为实数,且 $0\leqslant k\leqslant 1$,则称 T 是 E 中的 Lipschitz 压缩算子,k 为 $\mathfrak{D}$-Lipschitz 常数。

引理1[2] 对 $\forall u_1,u_2,v_1,v_2\in\boldsymbol{K}$ 满足 $u_1\preceq v_1$,$u_2\preceq v_2$,则有 $u_1u_2\preceq v_1v_2$。

定理1[2] 设$(E,\preceq,\|\cdot\|)$为偏序 Banach 空间,使得其上定义的范数$\|\cdot\|$与序关系$\preceq$是相容的,C 为 E 中的任意紧链。又设 $A,B:E\to\boldsymbol{K}$ 是两个不减算子,满足:(i) A 是偏有界且非线性偏序 $\mathfrak{D}$-Lipschitz 算子,它的 $\mathfrak{D}$-函数为 φ_A;(ii) B 为偏连续,一致偏列紧算子;(iii) $M\varphi_A(r)<r(r>0)$,其中 $M=\sup\{\|B(C)\|:C\subset E\}$,$C$ 为 E 中的链;(iv) $\exists x_0\in E$,使得 $x_0\preceq Ax_0Bx_0$ 成立。则算子方程 $AxBx=x$ 在 E 中有一个正解 x^{*},且有序列$\{x_n\}$,满足迭代 $x_{n+1}=Ax_nBx_n$,$n=0,1,2,\cdots$,收敛到 x^{*}。

2 主要结论

设 $C(J,\mathbf{R})$为定义于 J 取值于$\boldsymbol{R}$ 的连续函数全体做成的集合。在 $C(J,\boldsymbol{R})$上定义范数 $\|x\|_C=\sup\limits_{t\in J}|x(t)|$,则 $C(J,\mathbf{R})$按范数$\|\cdot\|_C$ 构成 Banach 空间。定义序关系$\preceq$,满足 $x\preceq y\Rightarrow x(t)\preceq y(t)$,$\forall t\in J$,则$(C(J,\boldsymbol{R}),\preceq,\|\cdot\|_C)$构成偏序 Banach 空间。

引理2[2] 设$(C(J,\mathbf{R}),\preceq,\|\cdot\|_C)$为偏序 Banach 空间,则 $C(J,\boldsymbol{R})$的任意列紧子集上定义的范数$\|\cdot\|_C$ 与偏序关系$\preceq$都是相容的。

定义7 设 $v(t)\in C(J,\mathbf{R})$,如果$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{v(t)}{f(t,v(t))}\right]+\lambda\left(\dfrac{v(t)}{f(t,v(t))}\right)\leqslant g(t,v(t)),t\in J\\ v(t_0)\leqslant v_0\end{cases}$,则称 $v((t)$是初值问题(1)的一个下解。

为了证明初值问题(1)解的存在性,引入下列假设条件:

(H1) $f:J\times\mathbf{R}^{+}\to\mathbf{R}^{+}\setminus\{0\}$连续,$g:J\times\mathbf{R}^{+}\to\mathbf{R}^{+}$连续;

(H2) 对 $\forall t\in J$,映射 $x\to\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}$是单射,即函数$\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}$关于 x 是绝对连续的;

(H3) $\exists M_f>0$,使得 $0<f(t,x(t))\leqslant M_f$,且$\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}$关于 x 不减;

(H4) 存在 $\mathfrak{D}$-函数 φ 使得 $0\leqslant f(t,x)-f(t,y)\leqslant\varphi(x-y)$,$\forall t\in J$,$x,y\in\mathbf{R}^{+}$,$x\geqslant y$;

(H5) $g(t,x(t))$在 J 上关于 x 是一个单调不减函数;

(H6) $\exists h\in L^1(J,\mathbf{R})$,使得 $g(t,x(t))\leqslant h(t)$,$\forall t\in J$,$x\in\mathbf{R}^{+}$;

（H7）初值问题（1）有下解 $v(t)\in C(J,\mathbf{R})$。

定理 2　设满足条件（H1）～（H7）。如果不等式

$$\left|\frac{x_0}{f(t_0,x_0)}\right|+\|h\|_{L^1}<1 \tag{2}$$

成立，则初值问题（1）至少有一个正解 x^*，且有序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足迭代

$$x_1(t)=v(t),x_{n+1}(t)=f(t,x_n(t))\left[\frac{x_0}{f(t_0,x_0)}\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}g(s,x_n(s))\mathrm{d}s\right],n=1,2,\cdots \tag{3}$$

收敛到 x^*。

证明　设 $E=C(J,\mathbf{R})$。因为（H1），（H2）成立，所以可以将初值问题（1）转换为等价的积分方程：

$$x(t)=f(t,x(t))\left[\frac{x_0}{f(t_0,x_0)}\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}g(s,x(s))\mathrm{d}s\right],t\in J\ 。\tag{4}$$

令 $E^+=\{x\in E\mid x\geqslant\theta\}$，$\boldsymbol{K}=\{E^+\subset E\mid uv\in E^+,\forall u,v\in E^+\}$，定义两个算子 $A,B:E\to\boldsymbol{K}$ 如下：

$$Ax(t)=f(t,x(t)),t\in J,Bx(t)=\frac{x_0}{f(t_0,x_0)}\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}g(s,x(s))\mathrm{d}s,t\in J\ 。$$

故积分方程（4）可等价于算子方程 $Ax(t)Bx(t)=x(t)$，$t\in J$。则初值问题（1）有解等价于算子方程存在不动点。因此，只需证明算子方程满足定理 1 中的条件即可。

首先证明算子 A，B 在 E 上均为不减算子。对 $\forall x,y\in E$，满足 $x\geqslant y$，由条件（H4）有：

$$Ax(t)=f(t,x(t))\geqslant f(t,y(t))=Ay(t)。$$

所以算子 A 是不减算子。同理，由条件（H5）可以证明算子 B 也是不减算子。

下证算子 A 是偏有界且非线性偏序 $\mathfrak{D}$-Lipschitz 算子。对 $\forall x\in E$，由条件（H3）可得 $|Ax(t)|=|f(t,x(t))|\leqslant M_f$，其中 $t\in J$，$M_f>0$，所以 $\|Ax\|_C\leqslant M_f$，故 A 是一个有界算子，所以 A 在 $(C(J,\mathbf{R}),\preceq,\|\cdot\|_C)$ 上是一个偏有界算子。

对 $\forall x,y\in E$，满足 $x\geqslant y$，由条件（H4）有：

$$Ax(t)-Ay(t)=f(t,x(t))-f(t,y(t))\leqslant\varphi(x(t)-y(t))\leqslant\varphi(\|x-y\|_C),t\in J,$$

两边取范数，得 $\|Ax-Ay\|_C\leqslant\varphi(\|x-y\|_C)$。所以算子 A 是一个偏 $\mathfrak{D}$-Lipschitz 算子。

对算子 B 来说，需证明算子 B 不仅是一个偏连续算子，还是一个一致偏列紧算子。设存在一链 $C\subset E$，在 C 上定义一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $x_n\to x(n\to\infty)$。因为 $g(t,x(t))$ 在 J 上是连续函数，由条件（H6），运用 Lebesgue 控制收敛定理可得：

$$\lim_{n\to\infty}Bx_n(t)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_0}{f(t_0,x_0)}\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}g(s,x_n(s))\mathrm{d}s\right)=$$

$$\frac{x_0}{f(t_0,x_0)}\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\lim_{n\to\infty}g(s,x_n(s))\mathrm{d}s)=\frac{x_0}{f(t_0,x_0)}\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}g(s,x(s))\mathrm{d}s=Bx(t)。$$

所以算子 B 是一个连续算子，故 B 在 $(C(J,\mathbf{R}),\preceq,\|\cdot\|_C)$ 是一个偏连续算子。

对 $\forall t_1,t_2\in J$，满足 $t_1>t_2$，有：

$$|Bx(t_1)-Bx(t_2)|=\left|\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{e}^{-\lambda(t_1-s)}g(s,x(s))\mathrm{d}s-\int_{t_0}^{t_2}\mathrm{e}^{-\lambda(t_2-s)}g(s,x(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant$$

$$\left|\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{e}^{-\lambda(t_1-s)}g(s,x(s))\mathrm{d}s-\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{e}^{-\lambda(t_2-s)}g(s,x(s))\mathrm{d}s-\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{e}^{-\lambda(t_2-s)}g(s,x(s))\mathrm{d}s\right|=$$

$$\left|\int_{t_0}^{t_1}(\mathrm{e}^{-\lambda(t_1-s)}-\mathrm{e}^{-\lambda(t_2-s)})g(s,x(s))\mathrm{d}s\right|+\left|\int_{t_2}^{t_1}\mathrm{e}^{-\lambda(t_2-s)}g(s,x(s))\mathrm{d}s\right|\to 0(|t_1-t_2|\to 0)\ 。$$

所以当 $|t_1-t_2|\to 0$ 时，$|Bx(t_1)-Bx(t_2)|\to 0$。所以序列 $\{Bx:x\in C\}$ 是等度连续的。

设 $C\subset E$ 是 E 中的任意链，需要证明 $B(C)$ 是一致有界的。事实上，对 $\forall t\in J$，$\exists x\in C$，使得 $y=Bx(y\in B(C))$，根据条件（H6），有：

$$|y(t)|=|(Bx)(t)|=\left|\frac{x_0}{f(t_0,x_0)}\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}g(s,x(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant\left|\frac{x_0}{f(t_0,x_0)}+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}g(s,x(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant$$

$$\left|\frac{x_0}{f(t_0,x_0)}+\int_{t_0}^{t}g(s,x(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant\left|\frac{x_0}{f(t_0,x_0)}\right|+\|h\|_{L^1}\triangleq M,$$

在上述不等式两边取范数可得 $\|y\|_C=\sup\limits_{t\in J}|y(t)|\leqslant M$。由此可知 $B(C)\subset E$ 是一致有界的，再由 Arela-Ascoli 定理可知，算子 B 是一个一致偏列紧算子。

根据条件(H7)可知，初值问题(1)存在下解 $v(t)$，即：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v(t)}{f(t,v(t))}\right)+\lambda\left(\frac{v(t)}{f(t,v(t))}\right)\leqslant g(t,v(t)),t\in J。$$

在上式两边同时乘以积分因子 $\mathrm{e}^{\lambda t}$，并在 J 上积分，得 $\mathrm{e}^{\lambda t}\dfrac{v(t)}{f(t,v(t))}\leqslant \mathrm{e}^{\lambda t_0}\dfrac{v(t_0)}{f(t_0,v(t_0))}+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\lambda s}g(t,v(s))\mathrm{d}s$。

又因为 $v(t_0)\leqslant v_0$，所以有：

$$\mathrm{e}^{\lambda t}\frac{v(t)}{f(t,v(t))}\leqslant \mathrm{e}^{\lambda t_0}\frac{v_0}{f(t_0,v_0)}+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\lambda s}g(t,v(s))\mathrm{d}s,\frac{v(t)}{f(t,v(t))}\leqslant \mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}\frac{v_0}{f(t_0,v_0)}+\mathrm{e}^{-\lambda t}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\lambda s}g(t,v(s))\mathrm{d}s。$$

因此：

$$v(t)\leqslant f(t,v(t))\left[\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}\frac{v_0}{f(t_0,v_0)}+\mathrm{e}^{-\lambda t}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\lambda s}g(t,v(s))\mathrm{d}s\right]=$$

$$f(t,v(t))\left[\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}\frac{v_0}{f(t_0,v_0)}+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}g(t,v(s))\mathrm{d}s\right]。$$

这说明存在 $v\in E$，使得 $v(t)\leqslant Av(t)Bv(t)$，$\forall t\in J$，所以 $v\leqslant AvBv$。

最后，验证定理 1 的条件(iii)，由上面的证明过程，取 $M=\left|\dfrac{x_0}{f(t_0,x_0)}\right|+\|h\|_{L^1}$，又由(2)式，可得：

$$M\varphi_A(r)\leqslant\left|\frac{x_0}{f(t_0,x_0)}\right|+\|h\|_{L^1}\varphi(r)<r,r>0。$$

所以算子 A，B 满足定理 1 中的所有条件，由定理 1 知算子方程 $x=AxBx$ 至少有一个不动点，即初值问题(1)至少有一个解，设为 x^*，取序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足迭代(3)，则序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 x^*。 证毕

例 1 考虑有界闭集 $t\in J=[0,1]$ 上的方程 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right]+\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}=\dfrac{|x(t)|}{1+|x(t)|},t\in J\\ x(0)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$，其中 $f(t,x)=\begin{cases}1,x\leqslant 0\\1+x,0<x\leqslant 3\\4,x>3\end{cases}$，$g(t,x)=\dfrac{|x|}{1+|x|}$。

方程中的函数 $f:J\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+\backslash\{0\}$ 连续的，$g:J\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ 连续，满足条件(H1)；

取 $\lambda=1$，函数 f 满足 $0<f\leqslant 4=M_f$，$\dfrac{x}{f(t,x)}$ 是单射且关于 x 不减，则 f 满足条件(H2)，(H3)；

现取 $\mathfrak{D}$-函数 $\varphi(r)=r$，对于函数 f 有 $0\leqslant f(t,x)-f(t,y)\leqslant x-y$，$\forall t\in J$，$x,y\in\mathbf{R}^+$，$x\geqslant y$，满足条件(H4)；

函数 g 是一个单调不减函数，$\exists h\in L^1(J,\mathbf{R})$，使得 $g(t,x(t))\leqslant h(t)=|x(t)|$，则满足条件(H5)，(H6)；根据定义 7，方程有下解 $v(t)=-3$，则有序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足迭代

$$x_{n+1}(t)=f(t,x_n(t))\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-t}\int_0^t\mathrm{e}^{s}\frac{|x_n(s)|}{1+|x_n(s)|}\mathrm{d}s\right],n=1,2,\cdots,$$

收敛到 x^*，这里 $x_1(t)=-3$。

参考文献：

[1] 张恭庆，林源渠. 泛函分析讲义[M]. 北京：北京大学出版社，2005.
ZHANG G Q，LIN Y Q. The lecture of nonlinear analysis [M]. Beijing：Peking University Press，2005.

[2] DHAGE B C，DHAGE S B. Approximating positive solutions of PBVPs of nonlinear first order ordinary quadratic differential equations[J]. Applied Mathematics Letters，2015，46：133-142.

[3] PATHAK H K，RODRíGUEZ-LóPEZ R. Existence and approximating of solutions to nonlinear hybrid ordinary differential equations[J]. Applied Mathematics Letters，2015，39(39)：101-106.

[4] BARROSO C S. Krasnoselskii's fixed point theorem for weakly continuous maps[J]. Nonlinear Analysis，2003，55(1)：25-31.

[5] DHAGE B C，LAKSHMIKANTHAM V. Basic results on

hybrid differential equations[J]. Nonlinear Analysis, 2010, 4(3): 414-424.

[6] SERBAN M A. Some fixed point theorems for nonself generalized contraction in gauge space[J]. International Journal on Fixed Point Theory Computation Applications, 2015, 16 (2): 393-398.

[7] BURTON T A, ZHANG B. Fractional equations and generalizations of Schaefer's and Krasnoselskii's fixed point theorems[J]. Nonlinear Analysis, 2012, 75(18): 6485-6495.

[8] DHAGE B C, DHAGE S B, NTOUYAS S K. Approximating solutions of nonlinear hybrid differential equation[J]. Applied Mathematics Letters, 2014, 34: 76-80.

[9] DHAGE B C. Quadratic perturbations of periodic boundary value problems of second order ordinary differential equations[J]. Differential Equations and Applications, 2010, 2 (4): 465-486.

Approximate Solutions for a Class of Nonlinear Differential Equations

MA Jin, YANG He

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: [**Purposes**]By using nonlinear perturbed technique, a new class of nonlinear differential equations were studied, and discuss the existence of positive solution for this equation in partially Banach spaces. [**Methods**] The proof of the main results based on a new fixed point theorem, and transforming the existence of solutions of equations to the existence of fixed points of operators. [**Findings**] Then prove the nonlinear differential equations has a positive solution at least under some certain conditions, approximate iterative sequence is also given. [**Conclusions**]This result is generalized a conclusion of existing literatures.

Keywords: partially Banach spaces; fixed point theorem; positive solutions; existence; approximate iterative sequence

(责任编辑 黄 颖)