

# 一类含有 $n-3$ 条公共弧的三色有向图本原指数上界\*

罗美金, 侯宗毅

(河池学院 数学与统计学院, 广西 宜州 546300)

**摘要:**【目的】在传统单个非负矩阵的基础上, 将非负本原矩阵对指数推广到非负本原矩阵簇指数。【方法】根据非负本原矩阵簇与之伴随有向图的一一对应关系, 借助三色有向图解决一类非负矩阵簇本原指数问题。【结果】研究了一类三色有向图, 它的未着色图中包含  $n$  个顶点, 1 个  $n$ -圈、1 个  $(n-1)$ -圈和 1 个  $(n-2)$ -圈, 且 3 圈有 1 条长为  $n-3$  的公共弧, 给出了本原条件, 并找到了指数上界。【结论】所得结果有助于一般情形下的非负矩阵簇本原指数问题的研究。

**关键词:** 本原; 三色; 有向图; 指数; 上界

**中图分类号:** O157.5

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1672-6693(2018)03-0118-06

## 1 预备知识

设  $D$  是一个有向图。  $D$  的顶点序列为  $v_1, v_2, \dots, v_{l+1}$ , 若  $v_1, v_2, \dots, v_{l+1}$  互不相同, 则称该途径是一条长为  $l$  的路。若  $D$  是包含红弧、黄弧和蓝弧的有向图, 则称  $D$  是一个三色有向图。三色有向图  $D$  是强连通的,  $D$  中每一对顶点  $(i, j)$  都存在从  $i$  到  $j$  的途径。给定  $D$  中的一条途径  $\omega$ , 用  $r(\omega), y(\omega)$  和  $b(\omega)$  分别表示  $\omega$  中红弧、黄弧和蓝弧的数目, 称  $\omega$  为一条  $(r(\omega), y(\omega), b(\omega))$ -途径,  $\omega$  的分解为向量  $(r(\omega), y(\omega), b(\omega))$  或  $(r(\omega), y(\omega), b(\omega))^T$  [1]。

一个三色有向图  $D$  是本原的, 当且仅当存在非负整数  $h, k$  和  $v$ , 且  $h+k+v > 0$ , 使得  $D$  中的每一对顶点  $(i, j)$  都存在从  $i$  到  $j$  的  $(h, k, v)$ -途径,  $h+k+v$  的最小值定义为三色有向图  $D$  的本原指数, 记为  $\exp(D)$  [1]。

设  $C = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l\}$  是  $D$  的圈集合, 定义  $D$  的圈矩阵  $M$  是一个  $3 \times l$  矩阵, 它的第  $i$  列是  $\gamma_i$  的分解。  $M$  的 content (记为  $\text{content}(M)$ ) 定义为 0, 如果  $M$  的秩小于 3, 否则定义为  $M$  的所有非零 3 阶主子式的最大公因数 [2]。

**引理 1** [2] 一个至少包含 1 条红弧、1 条黄弧和 1 条蓝弧的三色有向图  $D$  是本原的, 当且仅当  $D$  是强连通的, 且  $\text{content}(M) = 1$ 。

将传统单个非负本原矩阵的指数问题研究推广到非负本原矩阵对、矩阵簇, 这是组合矩阵论中一个崭新的研究内容。非负本原矩阵对、矩阵簇可以与之伴随的有向图即双色有向图、多色有向图建立一一对应关系, 从而将矩阵的问题转化为图的问题进行研究。目前, 关于双色有向图的本原指数的研究已经取得了不少成果 [5-12], 而对多色有向图的研究甚少 [1-4]。笔者将前期的成果加以深化, 运用双色有向图本原指数的研究方法, 研究了一类含有  $n(n \geq 4)$  个顶点, 至少包含 1 条红弧、1 条黄弧和 1 条蓝弧的三色有向图  $D$ , 而该有向图未着色的状态如图 1 所示。

由图 1 可知,  $D$  中仅包含 3 个圈, 圈长分别为  $n, n-1$  和  $n-2$ , 且 3 圈有 1 条  $n-3$  长的公共弧  $3 \rightarrow 4 \rightarrow \dots \rightarrow n$ 。不妨设  $D$  的圈矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ n-a-b & n-c-d-1 & n-e-f-2 \end{bmatrix}.$$

\* 收稿日期: 2017-02-17 修回日期: 2018-04-19 网络出版时间: 2018-05-22 10:01

资助项目: 国家自然科学基金(No. 11561019); 广西壮族自治区教育厅高校科学技术研究项目(No. YB2014335; No. KY2015ZD103)

第一作者简介: 罗美金, 女, 副教授, 研究方向为组合数学, E-mail: meijin322@163.com; 通信作者: 侯宗毅, 男, 教授, E-mail: 13610950@qq.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180522.1001.016.html>

其中  $a, b, c, d, e$  和  $f$  都为非负整数。结合图 1 可知  $a, b, c, d, e$  和  $f$  显然满足关系式:

$$\begin{cases} e-1 \leq a \leq e+3 \\ f-1 \leq b \leq f+3 \\ n-3-e-f \leq n-a-b \leq n+1-e-f \\ e-1 \leq c \leq e+2 \\ f-1 \leq d \leq f+2 \\ n-3-e-f \leq n-1-c-d \leq n-e-f \end{cases},$$

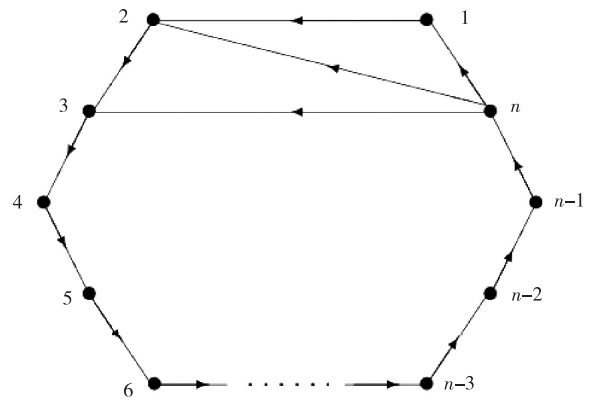


图 1 未着色的有向图 D  
Fig. 1 Uncolored digraph

### 2 本原条件

**定理 1** 若  $D$  是本原的, 当且仅当  $(ad-bc)(n-2-e-f) + (cf-ed)(n-a-b) + (be-af)(n-1-c-d) = \pm 1$ 。

**证明** 显然,  $D$  是强连通的, 且

$$\det(\mathbf{M}) = (ad-bc)(n-2-e-f) + (cf-ed)(n-a-b) + (be-af)(n-1-c-d),$$

由引理 1 可得,  $D$  是本原的当且仅当  $\text{content}(\mathbf{M}) = 1$ , 即

$$\det(\mathbf{M}) = (ad-bc)(n-2-e-f) + (cf-ed)(n-a-b) + (be-af)(n-1-c-d) = \pm 1. \quad \text{证毕}$$

### 3 指数上界

根据  $D$  中弧的不同着色, 分情况讨论各类本原条件下的指数上界。将所得指数上界进行比较, 找到所有本原情况下, 当  $a=e+1, b=f, c=e, d=f-1$  时; 或当  $a=e+1, b=f, c=e+2, d=f-1$  时; 又或当  $a=e, b=f+1, c=e-1, d=f$  时:  $D$  的本原指数最大。以下只证明  $a=e+1, b=f$  的情形, 方法类似, 不再赘述。

**定理 2** 若  $D$  是本原的, 且  $a=e+1, b=f$ , 则

$$\exp(D) \leq \frac{8n^3 - 10n^2 - 13n + 15}{9}.$$

**证明** 显然,  $a=e+1, b=f$  时,  $n$ -圈上有  $n-e-f-1$  条蓝弧。对顶点  $(i, j)$ , 记  $p_{ij}$  是从  $i$  到  $j$  的最短路,  $r(p_{ij})=s, y(p_{ij})=t, b(p_{ij})=w$ 。分以下 3 种类型讨论  $D$  的本原指数上界。

类型一: 当弧  $n \rightarrow 3$  是黄色时, 则公共弧  $3 \rightarrow 4 \rightarrow \dots \rightarrow n$  中含有  $e$  条红弧,  $f-1$  条黄弧和  $n-e-f-2$  条蓝弧。

由图 1 可得,  $n$ -圈上的非公共弧  $n \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  中恰含 1 条红弧、1 条黄弧和 1 条蓝弧。  $(n-1)$ -圈上的红弧、黄弧和蓝弧数目与非公共弧  $n \rightarrow 2 \rightarrow 3$  的着色有关系, 分以下 6 种情况讨论。

1) 若弧  $n \rightarrow 2 \rightarrow 3$  是蓝色的。结合图 1 可知,  $(n-1)$ -圈上有  $e$  条红弧,  $f-1$  条黄弧和  $n-e-f$  条蓝弧, 所对应的圈矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} e+1 & e & e \\ f & f-1 & f \\ n-e-f-1 & n-e-f & n-e-f-2 \end{bmatrix}.$$

显然,  $e \geq 0, f-1 \geq 0$ , 且  $\det(\mathbf{M}) = -n+2e-f+2$ 。由引理 1 可得,  $D$  是本原的当且仅当  $\text{content}(\mathbf{M}) = 1$ , 即  $\det(\mathbf{M}) = -n+2e-f+2 = \pm 1$ 。此部分又分以下 2 种情况讨论。

a) 当  $\det(\mathbf{M}) = -n+2e-f+2 = -1$  时, 则  $f = -n+2e+3$ ,  $\mathbf{M}$  的逆矩阵为

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} n-e+f-2 & -2e & -e \\ -f & -n+2e+f+2 & f \\ -n+e+1 & n-f & e-f+1 \end{bmatrix}.$$

因  $f-1 \geq 0$ , 所以  $e \geq \frac{n-2}{2}$ ; 又因  $n-e-f-2 = 2n-3e-5 \geq 0$ , 所以  $e \leq \frac{2n-5}{3}$ 。显然,  $-n+2e+f+2 = -2n+4e+5 \geq 1, -n+e+1 < 0, n-f > 0, e-f+1 = n-e-2 > 0$ 。

只需证明对  $D$  的任意一对顶点  $(i, j)$  都有 1 条  $((e+1)(e+1)(n-e+f-2) + ef((-n+2e+f+2) + (n-$

$e+f)) + e(f(n-f) + (e-f+1)(n-e-f)), f(e+1)(n-e+f-2) + (f-1)f((-n+2e+f+2) + (n-e+f)) + f(f(n-f) + (e-f+1)(n-e-f)), (n-e-f-1)(e+1)(n-e+f-2) + (n-e-f)f((-n+2e+f+2) + (n-e+f)) + (n-e-f-2)f(n-f) + (n-e-f-2)(e-f+1)(n-e-f)$ -途径。取  $\rho_1 = (e+1)(n-e+f-2) - (n-e+f-2)s + 2et + ew, \rho_2 = f((-n+2e+f+2) + (n-e+f)) + fs - (-n+2e+f+2)t - fw, \rho_3 = f(n-f) + (e-f+1)(n-e-f) + (n-e-1)s - (n-f)t - (e-f+1)w$ 。因此,从顶点  $i$  出发,沿  $p_{ij}$  到顶点  $j$ ,转  $n$ -圈  $\rho_1$  次,转  $(n-1)$ -圈  $\rho_2$  次,转  $(n-2)$ -圈  $\rho_3$  次的途径有分解

$$\begin{bmatrix} s \\ t \\ w \end{bmatrix} + \rho_1 \begin{bmatrix} e+1 \\ f \\ n-e-f-1 \end{bmatrix} + \rho_2 \begin{bmatrix} e \\ f-1 \\ n-e-f \end{bmatrix} + \rho_3 \begin{bmatrix} e \\ f \\ n-e-f-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (e+1)(e+1)(n-e+f-2) + ef((-n+2e+f+2) + (n-e+f)) \\ f(e+1)(n-e+f-2) + (f-1)f((-n+2e+f+2) + (n-e+f)) \\ (n-e-f-1)(e+1)(n-e+f-2) + (n-e-f)f((-n+2e+f+2) + (n-e+f)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(f(n-f) + (e-f+1)(n-e-f)) \\ f(f(n-f) + (e-f+1)(n-e-f)) \\ (n-e-f-2)(f(n-f) + (e-f+1)(n-e-f)) \end{bmatrix}.$$

此时,  $0 \leq s \leq e+1, 0 \leq t \leq f, 0 \leq w \leq n-e-f$ 。当  $s=e+1$  时,  $t \geq 0, w \geq 0$ ; 当  $t=f, w=n-e-f$  时,  $s \geq 0$ 。容易验证,  $\rho_1 \geq 0, \rho_2 \geq 0, \rho_3 \geq 0$ 。所以

$$\begin{aligned} \exp(D) \leq & (e+1)(e+1)(n-e+f-2) + ef((-n+2e+f+2) + (n-e+f)) + \\ & e(f(n-f) + (e-f+1)(n-e-f)) + f(e+1)(n-e+f-2) + \\ & (f-1)f((-n+2e+f+2) + (n-e+f)) + f(f(n-f) + (e-f+1)(n-e-f)) + \\ & (n-e-f-1)(e+1)(n-e+f-2) + (n-e-f)f((-n+2e+f+2) + (n-e+f)) + \\ & (n-e-f-2)(f(n-f) + (e-f+1)(n-e-f)) = \\ & n(e+1)(n-e+f-2) + (n-1)f((-n+2e+f+2) + (n-e+f)) + \\ & (n-2)(f(n-f) + (e-f+1)(n-e-f)). \end{aligned}$$

将  $f = -n+2e+3$  代入  $\exp(D)$  中,则  $\exp(D)$  是关于  $e$  的函数。利用 Maple 软件计算,当  $\exp'(D) = 0$  时,得  $e = \frac{-5n+1}{4n} < 0; \exp''(D) = 4n > 0$ ,故  $\exp(D)$  在极值点  $e = \frac{-5n+1}{4n}$  取得极小值。又因  $\frac{n}{2} - 1 \leq e \leq \frac{2n-5}{3}$ ,所以  $\exp(D)$  在闭区间  $[\frac{n}{2} - 1, \frac{2n-5}{3}]$  上为增函数,因此

$$\exp(D) \leq \exp(D) \Big|_{e = \frac{2n-5}{3}} = \frac{8n^3 - 10n^2 - 13n + 15}{9}.$$

b) 当  $\det(\mathbf{M}) = -n+2e-f+2=1$  时,则  $f = -n+2e+1, \mathbf{M}$  的逆矩阵为

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} -n+e-f+2 & 2e & e \\ f & n-2e-f-2 & -f \\ n-e-1 & -n+f & -e+f-1 \end{bmatrix}.$$

因  $f-1 \geq 0$ ,所以  $e \geq \frac{n}{2}$ 。又因  $0 \leq n-e-f-2 = 2n-3e-3$ ,所以  $e \leq \frac{2n-3}{3}$ 。显然,  $-n+e-f+2 < 0, n-2e-f-2 = 2n-4e-3 \leq -3, n-e-1 > 0, -n+f < 0, -e+f-1 = -n+e < 0$ 。

只需证明对  $D$  的任意一对顶点  $(i, j)$  都有 1 条  $(2ef(e+1) + e(n-e-f)(e+1) + ef(e+1) + e(e+1)(n-e-1, 2ef^2 + ef(n-e-f) + f(e+1)(f-1) + f(e+1)(n-e-1), 2ef(n-e-f-1) + e(n-e-f)(n-e-f-1) + f(e+1)(n-e-f) + (n-e-f-2)(e+1)(n-e-1))$ -途径。取  $\rho_1 = 2ef + e(n-e-f) + (n-e+f-2)s - 2et - ew, \rho_2 = f(e+1) - fs + (-n+2e+f+2)t + fw, \rho_3 = (e+1)(n-e-1) - (n-e-1)s + (n-f)t + (e-f+1)w$ 。因此,从顶点  $i$  出发,沿  $p_{ij}$  到顶点  $j$ ,转  $n$ -圈  $\rho_1$  次,转  $(n-1)$ -圈  $\rho_2$  次,转  $(n-2)$ -圈  $\rho_3$  次的途径有分解

$$\begin{bmatrix} s \\ t \\ w \end{bmatrix} + \rho_1 \begin{bmatrix} e+1 \\ f \\ n-e-f-1 \end{bmatrix} + \rho_2 \begin{bmatrix} e \\ f-1 \\ n-e-f \end{bmatrix} + \rho_3 \begin{bmatrix} e \\ f \\ n-e-f-2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2ef(e+1)+e(n-e-f)(e+1)+ef(e+1)+e(e+1)(n-e-1) \\ 2ef^2+ef(n-e-f)+f(e+1)(f-1)+f(e+1)(n-e-1) \\ 2ef(n-e-f-1)+e(n-e-f)(n-e-f-1)+f(e+1)(n-e-f)+(n-e-f-2)(e+1)(n-e-1) \end{bmatrix}.$$

此时,  $0 \leq s \leq e+1, 0 \leq t \leq f, 0 \leq w \leq n-e-f$ . 当  $s=e+1$  时,  $t \geq 0, w \geq 0$ ; 当  $t=f, w=n-e-f$  时,  $s \geq 0$ . 容易验证,  $\rho_1 \geq 0, \rho_2 \geq 0, \rho_3 \geq 0$ . 所以

$$\begin{aligned} \exp(D) &\leq \\ &2ef(e+1)+e(n-e-f)(e+1)+ef(e+1)+e(e+1)(n-e-1)+2ef^2+ef(n-e-f)+ \\ &f(e+1)(f-1)+f(e+1)(n-e-1)+2ef(n-e-f-1)+e(n-e-f)(n-e-f-1)+ \\ &f(e+1)(n-e-f)+(n-e-f-2)(e+1)(n-e-1)= \\ &2efn+ne(n-e-f)+(n-1)f(e+1)+(n-2)(e+1)(n-e-1). \end{aligned}$$

将  $f=-n+2e+1$  代入  $\exp(D)$  中, 则  $\exp(D)$  是关于  $e$  的函数, 利用 Maple 软件计算, 由  $\exp'(D)=0$  时, 得  $e=\frac{-n-1}{4n} < 0; \exp''(D)=4n > 0$ , 故  $\exp(D)$  是在极值点  $e=\frac{-n-1}{4n}$  取得极小值. 又因  $\frac{n}{2} \leq e \leq \frac{2n}{3}-1$ , 所以  $\exp(D)$  在闭区间  $[\frac{n}{2}, \frac{2n}{3}-1]$  上为增函数, 因此

$$\exp(D) \leq \exp(D) \Big|_{e=\frac{2n}{3}-1} = \frac{8n^3-18n^2+6n}{9}.$$

2) 若弧  $n \rightarrow 2 \rightarrow 3$  是黄色的. 显然, 此时所对应的圈矩阵

$$M = \begin{bmatrix} e+1 & e & e \\ f & f+1 & f \\ n-e-f-1 & n-e-f-2 & n-e-f-2 \end{bmatrix},$$

则  $\det(M)=n-2e-f-2$ . 类似弧  $n \rightarrow 2 \rightarrow 3$  是蓝色的情形讨论, 可得  $\det(M)=n-2e-f-2=-1$  时,  $\exp(D)$  在  $e=\frac{n}{2}-1$  处取得极大值,  $\exp(D) \leq \frac{n^3-2n^2+3n-2}{2}$ .

3) 若弧  $n \rightarrow 2 \rightarrow 3$  是红色的. 显然, 此时所对应的圈矩阵

$$M = \begin{bmatrix} e+1 & e+2 & e \\ f & f-1 & f \\ n-e-f-1 & n-e-f-2 & n-e-f-2 \end{bmatrix},$$

且  $\det(M)=2e+3f-n+2$ . 类似  $n \rightarrow 2 \rightarrow 3$  是蓝色的情形讨论, 可得  $\det(M)=2e+3f-n+2=1$  时,  $\exp(D)$  在  $e=0$  处取得极大值,  $\exp(D) \leq \frac{8n^3-10n^2-13n+15}{9}$ .

4) 若弧  $n \rightarrow 2 \rightarrow 3$  中一条弧是红色的, 另一条弧是黄色的. 显然, 此时所对应的圈矩阵

$$M = \begin{bmatrix} e+1 & e+1 & e \\ f & f & f \\ n-e-f-1 & n-e-f-2 & n-e-f-2 \end{bmatrix},$$

且  $\det(M)=f=1$ . 类似  $n \rightarrow 2 \rightarrow 3$  为蓝色的情形讨论, 可得  $\exp(D)$  在  $e=0$  处取得极大值,  $\exp(D) \leq 2n^2-4n$ .

5) 若弧  $n \rightarrow 2 \rightarrow 3$  中一条弧是红色的, 另一条弧是蓝色的. 显然, 此时所对应的圈矩阵

$$M = \begin{bmatrix} e+1 & e+1 & e \\ f & f-1 & f \\ n-e-f-1 & n-e-f-1 & n-e-f-2 \end{bmatrix},$$

且  $\det(M)=2e+f-n+2$ . 类似  $n \rightarrow 2 \rightarrow 3$  是蓝色的情形讨论, 可得  $\det(M)=2e+f-n+2=1$  时,  $\exp(D)$  在  $e=\frac{n}{2}-1$  处取得极大值,  $\exp(D) \leq \frac{n^3-2n^2+3n-2}{2}$ .

6) 若弧  $n \rightarrow 2 \rightarrow 3$  中一条弧是黄色的, 另一条弧是蓝色的. 显然, 此时所对应的圈矩阵

$$M = \begin{bmatrix} e+1 & e & e \\ f & f & f \\ n-e-f-1 & n-e-f-1 & n-e-f-2 \end{bmatrix},$$

且  $\det(\mathbf{M}) = -f = -1$ 。类似  $n \rightarrow 2 \rightarrow 3$  为蓝色的情形讨论, 可得  $\exp(D)$  在  $e=0$  处取得极大值,  $\exp(D) \leq 2n^2 - 4n$ 。

综上, 当  $a=e+1, b=f$  时, 且弧  $n \rightarrow 3$  为黄色的, 比较各类本原情况下的指数上界, 可得  $\exp(D) \leq \frac{8n^3 - 10n^2 - 13n + 15}{9}$ 。

类型二: 当弧  $n \rightarrow 3$  是红色时, 公共弧  $3 \rightarrow 4 \rightarrow \dots \rightarrow n$  中含有  $e-1$  条红弧,  $f$  条黄弧和  $n-e-f-2$  条蓝弧。类似类型一的情况讨论, 比较各类本原情况下的指数上界, 可得当  $c=e-1, d=f+1$  时,  $\exp(D)$  在取  $e=1$  得极大值, 即  $\exp(D) \leq \frac{8n^3 - 16n^2 - 12n + 27}{9}$ 。

类型三: 当弧  $n \rightarrow 3$  是蓝色时, 公共弧  $3 \rightarrow 4 \rightarrow \dots \rightarrow n$  中含有  $e$  条红弧,  $f$  条黄弧和  $n-e-f-3$  条蓝弧。类似类型一的情况讨论, 可得当  $c=e+1, d=f+1$  时,  $\exp(D)$  在  $e = \frac{2n}{3} - 2$  取得极大值, 即  $\exp(D) \leq \frac{8n^3 - 16n^2 - 12n + 27}{9}$ 。

综上, 当  $a=e+1, b=f$  时,  $\exp(D) \leq \frac{8n^3 - 10n^2 - 13n + 15}{9}$ 。 证毕

类似定理 2 的证明, 借助 Maple 软件进行计算, 可得各类本原情况下的指数上界如表 1 所示。

表 1  $D$  的本原情况  
Tab. 1 Primitive conditions of  $D$

情况	$a$ 的值	$b$ 的值	是否存在本原情形	$\exp(D)$ 的上界	情况	$a$ 的值	$b$ 的值	是否存在本原情形	$\exp(D)$ 的上界
1	$e+3$	$f-1$ 或 $f$	是	$\exp(D) \leq 6n^2 - 20n + 15$	8	$e$	$f-1$	是	$\exp(D) \leq 6n^2 - 21n + 16$
2	$e+2$	$f-1$ 或 $f+1$	是	$\exp(D) \leq 3n^2 - 6n + 2$	9	$e$	$f$ 或 $f+2$	否	
3	$e+2$	$f$	否		10	$e$	$f+1$	是	$\exp(D) \leq \frac{8n^3 - 10n^2 - 13n + 15}{9}$
4	$e+1$	$f-1$	是	$\exp(D) \leq 3n^2 - 6n + 2$	11	$e$	$f+3$	是	$\exp(D) \leq 6n^2 - 20n + 15$
5	$e+1$	$f$	是	$\exp(D) \leq \frac{8n^3 - 10n^2 - 13n + 15}{9}$	12	$e-1$	$f$ 或 $f+3$	是	$\exp(D) \leq 6n^2 - 20n + 15$
6	$e+1$	$f+1$	是	$\exp(D) \leq \frac{8n^3 - 16n^2 - 12n + 27}{9}$	13	$e-1$	$f+1$ 或 $f+2$	是	$\exp(D) \leq 3n^2 - 6n + 2$
7	$e+1$	$f+2$	是	$\exp(D) \leq 3n^2 - 6n + 2$					

### 4 结论

研究了一类含有  $n-3$  条公共弧的 3 圈三色有向图  $D$  本原指数问题。结合图 1, 找到了  $D$  的本原条件(表 1); 并对在本原条件下的各类情况进行了讨论, 有效借助 Maple 软件计算出本原指数上界。综合定理 2 和表 1, 可得重要结论定理 3。

**定理 3** 若  $D$  是本原的, 则  $\exp(D) \leq \frac{8n^3 - 10n^2 - 13n + 15}{9}$ 。

在此基础上可以进一步讨论更为一般情形的图形, 如不限定 3 圈的圈长, 不限定公共弧数目及对达到本原指数上界的极图进行刻画等, 这些可以成为后续的研究问题。

### 参考文献:

[1] 罗美金, 高玉斌. 一类恰含三个圈的三色有向图的本原指数[J]. 山东大学学报(理学版), 2008, 43(1): 65-72.

- LUO M J, GAO Y B. Primitive exponent of three-colored digraphs with three cycles[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2008, 43(1): 65-72.
- [2] 严庆, 邵燕灵. 一类三色有向图的本原指数[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2009, 30(6): 512-517.
- YAN Q, SHAO Y L. Exponent of three-colored digraphs [J]. Journal of North University of China (Natural Science), 2009, 30(6): 512-517.
- [3] 周会玲, 宋秋艳. 一类三角有向图的本原指数[J]. 吉林师范大学学报(自然科学版), 2011, 32(2): 82-89.
- ZHOU H L, SONG Q Y. Exponent of three-colored digraphs[J]. Journal of Jilin Normal University (Natural Science Edition), 2011, 32(2): 82-89.
- [4] 王玉香. 几类矩阵簇的本原指数[D]. 太原: 中北大学, 2009.
- WANG Y X. Exponent of several classes of colored mutidigraphs[D]. Taiyuan: North University of China, 2009.
- [5] SHAO Y L, GAO Y B. On the exponent of two-colored digraphs with two cycles[J]. Linear and Multilinear Algebra Appl, 2009, 57(2): 185-199.
- [6] SHADER B L, SUWILO S. Exponents of nonnegative matrix pairs[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2003, 363(4): 275-293.
- [7] GAO Y B, SHAO Y L. Double vertex digraphs of digraphs [J]. Discrete Mathematics, 2009, 309(8): 2432-2444.
- [8] GAO Y B, SHAO Y L. Bound on the exponents of a class of two-colored digraphs[J]. Ars Combinatoria, 2009, 90: 425-434.
- [9] AKELBEK M, KIRKLAND S. Primitive digraph with the largest scrambling index[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2009, 430(4): 1099-1110.
- [10] 罗美金. 一类双色有向图的本原指数上界[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(23): 142-150.
- LUO M J. Upper bound on primitive of exponent of a class of two-colored digraphs[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2013, 43(23): 142-150.
- [11] 罗美金. 一类特殊非负矩阵对本原指数集[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2017, 34(2): 59-66.
- LUO M J. The primitive exponent set of a class of special nonnegative matrix pairs[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2017, 34(2): 59-66.
- [12] 杨盼足, 邵燕灵. 一类本原不可幂定号有向图的基[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2015, 32(1): 64-67.
- YANG P Z, SHAO Y L. The base of a class of primitive non-powerful signed digraphs[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2015, 32(1): 64-67.

## Upper Bound of Exponent of a Class of Primitive Three-Colored Digraphs with $n-3$ Common Arcs

LUO Meijin, HOU Zongyi

(School of Mathematics and Statistics, Hechi University, Yizhou Guangxi 546300, China)

**Abstract:** [Purposes] On the basis of the traditional single nonnegative matrix, the exponent of nonnegative primitive matrix pairs is extended to the exponent of nonnegative primitive tuples. [Methods] Using a one-to-one relationship between nonnegative primitive matrix tuples and the associated directed digraph of nonnegative matrix tuples, the problem of primitive exponent of nonnegative matrix tuples can be transformed into three-colored digraphs. [Findings] A class of primitive three-colored digraphs with three cycles whose uncolored digraph has  $n$  vertices, consists of one  $n$ -cycle, one  $(n-1)$ -cycle and one  $(n-2)$ -cycle, and there is a common arc which is  $n-3$  in length on three cycles. Some primitive conditions and the tight upper bound of primitive exponents are given. [Conclusions] The results are helpful to the study of the exponent of nonnegative primitive tuples in the general case.

**Keywords:** primitive; three-colored; digraph; exponent; upper bound

(责任编辑 方 兴)