DOI:10.11721/cqnuj20180324

强泛 G-投射模,强泛 G-内射模和强泛 G-平坦模*

陈　东[1],胡　葵[2]
(1. 成都大学 信息科学与工程学院,成都 610106;2. 西南科技大学 理学院,四川 绵阳 621010)

摘要:【目的】完善相对同调理论中对强泛 G-投射模、强泛 G-内射模和强泛 G-平坦模的研究。【方法】利用同调方法讨论了许多相关性质,举例给出了一个模是强泛 G-投射模但不是强 G-投射模。【结果】给出了强泛 G-投射模(或强泛 G-平坦模)是强 G-投射模(或强 G-平坦模)的充分条件,利用强泛 G-投射模、强泛 G-内射模和强泛 G-平坦模的概念,刻画了强 G-半单环、强 G-VonNeumann 正则环和强 G-遗传环。【结论】补充了已有文献关于强泛 G-投射模、强泛 G-内射模和强泛 G-平坦模性质的研究。

关键词:强泛 G-投射模;强泛 G-内射模;强泛 G-平坦模

中图分类号:O154　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2018)03-0124-06

1 预备知识

1969 年,Auslander 等人[1]在 Noether 环上对有限生成模引入了 G-维数为 0 的模的概念。1995 年,Enochs 等人[2-3]将 G-维数为 0 的模这一概念推广到任意环上,引入了 G-投射模、G-内射模和 G-平坦模的概念。这些是后来形成的所谓 Gorenstein 同调理论的基础。近些年来,Gorenstein 同调理论受到关注,许多学者讨论了 G-投射模、G-内射模和 G-平坦模的性质,并得到许多成果[4-15]。2007 年,Bennis 等人[4]引入了强 G-投射模、强 G-内射模和强 G-平坦模的概念。模 M 称为强 G-投射模,是指存在投射模的正合列

$$P=\cdots\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}\cdots \tag{1}$$

使得 $M\cong\ker(f)$,且对任意投射 R-模 Q,该正合列在函子 $\mathrm{Hom}_R(-,Q)$的作用下仍是正合的。正合列(1)也可以简化为:

$$0\to M\to P\to M\to 0。\tag{2}$$

即判断一个模 M 为强 G-投射模,只需判断 M 是否满足正合列(2),且对任意投射 R-模 Q,该正合列在函子 $\mathrm{Hom}_R(-,Q)$的作用下仍是正合的。文献[4]证明了模 M 是 G-投射模当且仅当 M 是一个强 G-投射模的直和加项。2013 年,文献[5]引入了泛 G-投射模的概念。称模 M 为泛 G-投射模,即指 M 有全投射分解 $P=\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$,使得 $M\cong\ker(P_0\to P^0)$。泛 G-内射模和泛 G-平坦模的概念相应地定义。泛 G-投射模对于刻画 G-半单环(QF 环)有重要的作用。文献[5]证明了 R 是 QF 环当且仅当每个 R-模是泛 G-投射模,当且仅当每个 R-模是泛 G-内射模;R 是 FC 环当且仅当每个 R-模是泛 G-平坦模。文献[6]引入了强泛 G-投射模、强泛 G-内射模和强泛 G-平坦模的概念,并讨论了相关的一些性质。

本文进一步研究了强泛 G-投射模、强泛 G-内射模和强泛 G-平坦模,给出了强泛 G-投射模是强 G-投射模以及强泛 G-投射模是投射模的几个充分条件。这与 Holm 在文献[7]中的条件是不相同的,可以说,本文给的条件更弱。文献[8]中用强 G-投射模和强 G-内射模刻画了强 G-半单环,本文也用强泛 G-投射模和强泛 G-内射模刻画了强 G-半单环,相应地讨论了强泛 G-平坦模是强 G-平坦模的条件以及强泛 G-平坦模与强泛 G-投射模的关系。最后,利用强泛 G-平坦模刻画了强 G-Von Neumann 正则环,推广了文献[9]的结果。

尽管文献[5]指出存在一个模是泛 G-投射模但不是 G-投射模,然而并未给出具体的例子。文献[6]也未能

* **收稿日期:**2017-04-01　**修回日期:**2018-04-18　**网络出版时间:**2018-05-22　10:01
资助项目:国家自然科学基金(No. 11671283);教育部博士点专项基金(No. 20125134110002)
第一作者简介:陈东,男,讲师,研究方向为交换代数与同调代数,E-mail:chendong@cdu.edu.cn
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180522.1001.004.html

给出强泛 G-投射模不是强 G-投射模的例子。本文给出了一个具体的强泛 G-投射模但不是强 G-投射模例子,此例也说明了泛 G-投射模不一定是 G-投射模。

本文设 R 是交换环,模均指 R-模。G-gl. dim(R)表示 R 的 Gorenstein 整体维数,w. G-gl. dim(R)表示 R 的 Gorenstein 弱整体维数,$\mathrm{pd}_R M$,$\mathrm{id}_R M$ 和 $\mathrm{fd}_R M$ 分别表示模 M 的投射维数、内射维数和平坦维数,G-$\mathrm{pd}_R M$,G-$\mathrm{id}_R M$ 和 G-$\mathrm{fd}_R M$ 分别表示模 M 的 Gorenstein 投射维数、Gorenstein 内射维数和 Gorenstein 平坦维数。M^+ 表示 M 的特征模 $\mathrm{Hom}_Z(M,Q/Z)$。

2 强泛 G-投射模和强泛 G-内射模

定义 1　模 M 称为强泛 G-投射模,是指存在投射模的正合列

$$P=\cdots\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}\cdots \tag{3}$$

使得 $M=\ker(f)$。模 M 称为强泛 G-内射模,是指存在内射模 E 的正合列

$$E=\cdots\xrightarrow{f}E\xrightarrow{f}E\xrightarrow{f}E\xrightarrow{f}\cdots \tag{4}$$

使得 $M=\ker(f)$。

注 1　以下的事实是显然的。

1) 由定义 1 及投射模和内射模的性质,强泛 G-投射(内射)模关于直和(直积)封闭。

2) M 是强泛 G-投射(内射)模,当且仅当存在一个短正合列 $0\to M\to X\to M\to 0$,其中 X 是投射(内射)模。

3) 由定义 1 有包含关系:{投射模}⊆{强 G-投射模}⊆{强泛 G-投射模}⊆{泛 G-投射模};相应地有:{内射模}⊆{强 G-内射模}⊆{强泛 G-内射模}⊆{泛 G-内射模}。

4) 设 M 是 R-模,则 M 是泛 G-投射(内射)当且仅当它是强泛 G-投射(内射)的直和加项。

5) 设 $0\to N\to M\to Q\to 0$ 是正合列,Q 是投射模。若 N 是强泛 G-投射,则 M 是强泛 G-投射。

由注 1 知,强 G-投射模是强泛 G-投射模,但强泛 G-投射模不一定是强 G-投射模。下面给一个具体例子。

例 1　设 Q 为有理数域,X 是一个未定元。考虑环 $R=Q+X^3Q[X]$ 及理想 $I=(X^3,X^4,X^5)$,并令 $I_i=I$。则是强泛 G-投射模,但不是强 G-投射模。

证明　考虑以下正合列:

$$0\longrightarrow I\oplus I\xrightarrow{\alpha}R\oplus R\oplus R\xrightarrow{\beta}I\longrightarrow 0, \tag{5}$$

其中 $\alpha(i_1,i_2)=(-i_1X-i_2X^2,i_1,i_2)$;$\beta(r_1,r_2,r_3)=r_1X^3+r_2X^4+r_3X^5$。

易知,有下列关系:$\mathrm{Im}(\alpha)\subseteq\mathrm{Ker}(\beta)$,下证 $\mathrm{Ker}(\beta)\subseteq\mathrm{Im}(\alpha)$。

设 $\beta(r_1,r_2,r_3)=0$,则 $r_1X^3+r_2X^4+r_3X^5=0$,即:$r_1=-r_2X-r_3X^2$。于是 $(r_1,r_2,r_3)=(-r_2X-r_3X^2,r_2,r_3)$。由 $r_1=-r_2X-r_3X^2\in R$ 可知 r_2,r_3 的常数项都是 0,从而有 $r_2,r_3\in I$。因此有 $\mathrm{Ker}(\beta)=(r_1,r_2,r_3)=(-r_2X-r_3X^2,r_2,r_3)=\alpha(r_2,r_3)\subseteq\mathrm{Im}(\alpha)$,从而有正合列(5)。

设 $R_i=R$,注意有 $\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty}I_i\right)\oplus\left(\bigoplus_{j=1}^{\infty}I_j\right)\cong\bigoplus_{i=1}^{\infty}I_i$ 及 $\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty}R_i\right)\oplus\left(\bigoplus_{j=1}^{\infty}R_j\right)\oplus\left(\bigoplus_{k=1}^{\infty}R_k\right)\cong\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty}R_i\right)$,故把正合列(5)相加,得到正合列:

$$0\to\bigoplus_{i=1}^{\infty}I_i\to\bigoplus_{i=1}^{\infty}R_i\to\bigoplus_{i=1}^{\infty}I_i\to 0。 \tag{6}$$

故 $\bigoplus_i I_i$ 是强泛 G-投射模。

现在证明 $\mathrm{Ext}_R^1(\bigoplus_i I_i,R)\neq 0$,这就表明 $\bigoplus_i I_i$ 不是强 G-投射模。为此需要证明 $\mathrm{Ext}_R^1(I,R)\neq 0$。

反设 $\mathrm{Ext}_R^1(I,R)=0$。将函子 $\mathrm{Hom}(-,R)$ 作用于(5)式,得到正合列:

$$0\to\mathrm{Hom}_R(I,R)\to\mathrm{Hom}_R(R\oplus R\oplus R,R)\to\mathrm{Hom}_R(I\oplus I,R)\to 0。 \tag{7}$$

现定义同态 $\varphi:I\oplus I\to R$,使得 $\varphi(f,g)=X^2(f+g)$,$f,g\in I$。于是有 $\varphi(X^3,0)=X^5$。由(7)式的正合性,故存在同态 $\theta:R\oplus R\oplus R\to R$,使得 $\varphi=\theta\alpha$。于是有 $\theta\alpha(X^3,0)=\theta(-X^4,X^3,0)=\varphi(X^3,0)=X^5$。

记 $\theta(1,0,0)=a$,$\theta(0,1,0)=b$,则有 $X^5=-aX^4+bX^3$。注意 $a,b\in R=R=Q+X^3Q[X]$,故 $-aX^4+bX^3$ 的展开式中不会包含 X^5 项,因此导出矛盾。从而有 $\mathrm{Ext}_R^1(1,R)\neq 0$。　　证毕

现在来讨论强泛 G-投射(内射)模是强 G-投射(内射)模的条件。

命题 1 设 M 是强泛 G-投射模,若 G-pd$_R M<\infty$,则 M 是强 G-投射模;设 M 是强泛 G-内射模,若G-id$_R M<\infty$,则 M 是强 G-内射模。

证明 设 M 是强泛 G-投射模,故存在正合列 $0\to M\to P\to M\to 0$,其中 P 是投射模。设 G-pd$_R M=n<\infty$,故有正合列 $0\to M\to P_{n-1}\to\cdots\to P_i\to P_0\to M\to 0$,其中 $P_i=P$。因此,M 是强 G-投射模。 证毕

同理有:当 G-id$_R M<\infty$时,强泛 G-内射模 M 是强 G-内射模。

推论 1 设 G-gl. dim(R) $<\infty$,则强泛 G-投射模是强 G-投射模,强泛 G-内射模是强 G-内射模。

环 R 称为 Gorenstein 环,即指 R 是 Noether 环且 id$_R R<\infty$。环 R 称为 n-Gorenstein 环,是指 R 是 Noether 环且 id$_R R\leqslant n$,n 为非负整数。特别地,QF 环就是 0-Gorenstein 环。文献[3]证明了对 Gorenstein 环,有 G-gl. dim(R) $=$ id$_R R<\infty$。文献[5]证明了若 R 是 n-Gorenstein 环,则泛 G-投射模是 G-投射模。由命题 1 可得到如下推论。

推论 2 设 R 是 n-Gorenstein 环,则每个泛 G-投射(内射)模是 G-投射(内射)模,每个强泛 G-投射(内射)模是强 G-投射(内射)模。

命题 2 若每个投射模有有限的内射维数,则强泛 G-投射模是强 G-投射模;若每个内射模有有限的投射维数,则强泛 G-内射模是强 G-内射模。

证明 设 M 是强泛 G-投射模。由于每个投射模有有限的内射维数,故由文献[5]的命题 2.6 知 M 是 G-投射模。又 M 是强 G-投射模,故 M 是强 G-投射模。

同理有:若每个内射模有有限的投射维数,则强泛 G-内射模是强 G-内射模。 证毕

Holm 在文献[7]的命题 2.27 中证明了 G-投射模 M 是投射模当且仅当 M 有有限的投射维数。Bennis 等人在文献[4]的推论 2.11 中证明了强 G-投射模 M 是平坦模当且仅当 M 有有限的平坦维数。对强泛 G-投射模,有如下结果。

定理 1 设 M 是强泛 G-投射模,则 M 是投射模当且仅当 M 有有限的平坦维数。

证明 充分性。设 M 是泛 G-投射模,且 fd$_R M=n<\infty$。故存在正合列 $0\to M\to P_{n-1}\to\cdots\to P_i\to P_0\to M\to 0$,其中 $P_i=P$ 是投射模,故 M 是平坦模。注意有正合列:$0\to M\to P\to M\to 0$,故由文献[10]中的定理 2.5 知,M 是投射模。

必要性显然成立。 证毕

推论 3 若每个 R-模有有限的平坦维数,则每个强泛 G-投射模是投射模。

环 R 称为强 G-半单环,是指所有的 R-模都是强 G-投射模[8]。文献[5]的定理 2.8 证明了 R 是 QF 环当且仅当每个 R-模是泛 G-投射(泛 G-内射)模。下面用强泛 G-投射模和强泛 G-内射模刻画强 G-半单环。

定理 2 设 R 是一个环,以下陈述等价:1) R 是强 G-半单环;2) 每个 R-模是强泛 G-投射;3) 每个 R-模是强泛 G-内射。

证明 1)⇒2)。R 是强 G-半单环,则每个 R-模是强 G-投射,自然也是强泛 G-投射。

2)⇒3)。先证明 R 是 QF 环。设 I 是内射模,由假设知 I 是强泛 G-投射模,故存在正合列 $0\to I\to Q\to I\to 0$,其中 Q 是投射模。由于 I 是内射模,故该正合列分裂,有 $Q\cong I\oplus I$,故 I 又是投射模。因此,R 是 QF 环。

现设 M 是任何 R-模。由假设,M 是强泛 G-投射,即存在正合列 $0\to M\to P\to M\to 0$,其中 P 是投射模。由刚才所证,P 是内射模。因此,M 是强泛 G-内射模。

3)⇒1)。设 M 是 R-模。由假设知 M 是强泛 G-内射模,由于强泛 G-内射模是泛 G-内射模,由文献[5]中定理 2.8 知,R 是 QF 环。由推论 2 知,M 是强 G-内射模,故 R 是强 G-半单环。 证毕

3 强泛 G-平坦模

定义 2 模 M 称为强泛 G-平坦模,是指存在平坦模的正合列

$$F=\cdots\xrightarrow{f}F\xrightarrow{f}F\xrightarrow{f}F\xrightarrow{f}\cdots \tag{8}$$

使得 $M=\ker(f)$。

注 2 以下事实是显然的:

1) 由定义 2 及平坦模的性质,强泛 G-平坦模关于直和封闭。

2）M 是强泛 G-平坦模，当且仅当存在一个短正合列 $0 \to M \to F \to M \to 0$，其中 F 是平坦模。

3）由定义 2 有包含关系：{平坦模}⊆{强 G-平坦模}⊆{强泛 G-平坦模}⊆{泛 G-平坦模}。

4）设 M 是 R-模，则 M 是泛 G-平坦模当且仅当它是强泛 G-平坦模的直和加项。

容易看到，强 G-平坦模是强泛 G-平坦模，反之则不一定成立。高增辉在文献[5]的定理 3.6 中证明了若每个内射模有有限的平坦维数，则泛 G-平坦模是 G-平坦模。下面讨论强泛 G-平坦模是强 G-平坦模的条件。

命题 3　设 M 是强泛 G-平坦模。若 $\text{G-fd}_R M < \infty$，则 M 是强 G-平坦模。

证明　设 M 是强泛 G-平坦模，故存在正合列 $0 \to M \to F \to M \to 0$，其中 F 是平坦模。设 $\text{G-fd}_R M = n < \infty$，故有正合列 $0 \to M \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$，其中 $F_i = F$。因此，M 是强 G-平坦模。　　证毕

推论 4　若 $w.\ \text{G-gl.}\dim(R) < \infty$，则强泛 G-平坦模是强 G-平坦模。

环 R 称为 n-FC 环，是指 R 是凝聚环且 R 的 FP-内射维数至多为 n（$\text{FP-id}_R R \leqslant n$）。特别地，当 $n = 0$ 时，R 称为 FC 环。文献[11]证明了若 R 是 n-FC 环，则 $w.\ \text{G-gl.}\dim(R) \leqslant n$。故由命题 3 有以下推论。

推论 5　若 R 是 n-FC 环，则强泛 G-平坦模是强 G-平坦模。

命题 4　若每个内射模有有限的平坦维数，则强泛 G-平坦模是强 G-平坦模。

证明　设 M 是强泛 G-平坦模，故存在正合列(8)。由于每个内射模 I 有有限的平坦维数，不妨设为 n。故有：$\text{Tor}_{n+1}^R(M,I) = \text{Tor}_1^R(M,I) = 0$。因而 M 是 G-平坦模，又 M 是强泛 G-平坦模，故 M 是强 G-平坦模。　证毕

由文献[4]中的命题 3.9 知，模 M 是有限生成的强 G-投射模，当且仅当 M 是有限表现的强 G-平坦模。对有限生成的强泛 G-平坦模 M 有如下命题。

命题 5　M 是有限生成的强泛 G-投射模当且仅当 M 是有限表现的强泛 G-平坦模。

证明　充分性。设 M 是有限表现的强泛 G-平坦模。则存在正合列 $0 \to M \to F \to M \to 0$，其中 F 是平坦模。由于 M 是有限表现的，故 F 也是有限表现的。因此，F 是投射模，故 M 是强泛 G-投射模。

必要性显然成立。　　证毕

以下定理讨论强泛 G-投射模、强泛 G-内射模和强泛 G-平坦模与强 G-投射模、强 G-内射模和强 G-平坦模之间的关系。

定理 3　1）设 M 是强泛 G-投射模，若每个内射模有有限的平坦维数，则 M 是强 G-平坦模。

2）设 M 是强泛 G-平坦模，若每个内射模有有限的投射维数，则 M^+ 是强 G-内射模。

3）设 M 是有限表现的强泛 G-平坦模，若每个投射模有有限的内射维数，则 M 是强 G-投射模。

证明　1）设 M 是强泛 G-投射模，故存在投射模的正合列 $P = \cdots \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} \cdots$ 使得 $M = \ker(f)$。容易看到，M 是强泛 G-平坦模。由假设，每个内射的 R-模有有限的平坦维数，再由文献[5]中定理 3.6 知 M 是强 G-平坦模。

2）设 M 是强泛 G-平坦模，则存在平坦模的正合列 $F = \cdots \xrightarrow{f} F \xrightarrow{f} F \xrightarrow{f} F \xrightarrow{f} \cdots$ 使得 $M = \ker(f)$。故有正合列 $F^+ = \cdots \xrightarrow{f'} F^+ \xrightarrow{f'} F^+ \xrightarrow{f'} F^+ \xrightarrow{f'} \cdots$ 使得 $M^+ = \ker(f')$，其中 F^+ 是内射模。因此，M^+ 是强泛 G-内射。由命题 2.7，M^+ 是强 G-内射模。

3）设 M 是有限表现的强泛 G-平坦模，由命题 5，M 是强泛 G-投射模。由命题 2，M 是强 G-投射模。文献[13]中定理 2.4 证明了若 R 是凝聚环，则 M 是强 G-平坦模当且仅当 M^+ 是强 G-内射模。由于强 G-平坦模是强泛 G-平坦模，对强泛 G-平坦模有如下命题。　　证毕

命题 6　若 R 是凝聚环，则 M 是强泛 G-平坦模当且仅当 M^+ 是强泛 G-内射模，其中 $M^+ = \text{Hom}_Z(M, Q/Z)$。

证明参见文献[13]中的定理 2.4。

环 R 称为强 G-VonNeumann 正则环，是指所有的 R-模都是强 G-平坦模[9]。高增辉在文献[5]的推论 3.9 中证明了 R 是 FC 环，当且仅当每个 R-模是泛 G-平坦模。以下用强泛 G-平坦模刻画强 G-VonNeumann 正则环。

定理 4　R 是强 G-Von Neumann 正则环当且仅当每个 R-模是强泛 G-平坦模。

证明　充分性。设 I 是内射模，由假设 I 是强泛 G-平坦模。故存在正合列 $0 \to I \to F \to I \to 0$，其中 F 是平坦模。由于 I 是内射模，正合列分裂，故 I 是平坦模。因此，R 是 IF 环。由于 IF 环是 FC 环，故 R 是强 G-Von-Neumann 正则环。

必要性。设 R 是强 G-VonNeumann 正则环,则每个 R-模是强 G-平坦模,自然也是强泛 G-平坦模。 证毕

环 R 称为(强)G-遗传环,是指投射模的子模是(强)G-投射模;环 R 称为(强)G-半遗传环,是指 R 是凝聚环,且平坦模的子模是(强)G-平坦模。由文献[14]知,(强)G-遗传环是(强)G-半遗传环;反之,若 R 是 Noether 环,则(强)G-半遗传环是(强)G-遗传环。下面对强 G-遗传环给出一个新的刻画。

定理 5 设 R 是 n-Gorenstein 环。若对每个 R-模 M,存在正合列 $0\to M\to Q\to M\to 0$,其中 $\mathrm{fd}_R Q\leqslant 1$,则 R 是强 G-遗传环。

证明 由于 R 是 Noether 环,故只需证明 R 是强 G-半遗传环。设 M 是平坦模 F 的子模,故存在正合列 $0\to M\to F\to F/M\to 0$,其中 F 是平坦模。由题设有:正合列 $0\to F/M\to Q\to F/M\to 0$,其中 $\mathrm{fd}_R Q\leqslant 1$。故又有正合列 $0\to (F/M)^+\to F^+\to M^+\to 0$,其中 F^+ 是内射模,以及正合列 $0\to (F/M)^+\to Q^+\to (F/M)^+\to 0$,其中 $\mathrm{id}_R Q^+\leqslant 1$。因而存在以下正合列的交换图(图 1)。

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & (F/M)^+ \arrow[r] \arrow[d] & Q^+ \arrow[r] \arrow[d] & (F/M)^+ \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^+ \arrow[r] \arrow[d] & F^+ \oplus F^+ \arrow[r] \arrow[d] & F^+ \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M^+ \arrow[r] \arrow[d] & Q^+ \arrow[r] \arrow[d] & M^+ \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 1 正合列的交换图

Fig. 1 Complement graph

由于 R 是 Noether 环,故 $F^+\oplus F^+$ 也是内射模。由于 $\mathrm{id}_R Q^+\leqslant 1$,$Q'^+$ 是内射模,故 M^+ 是强泛 G-内射模。由于 R 是 n-Gorenstein 环,由推论 2 知,M^+ 是强 G-内射模。再由文献[13]中的定理 2.4 知,M 是强 G-平坦模,故 R 是强 G-半遗传环。 证毕

参考文献:

[1] AUSLANDER M,BRIDGER M. Stable module theory[M]. Providence RI:Am Math Soc,1969,94(94):1-146.

[2] ENOCHS E E,JENDA O M G,Torrecillas B. Gorenstein flat modules[J]. Nanjing Univ Math Biquarterly,1993,10(1):1-9.

[3] ENOCHS E E,JENDA O M G. Gorenstein injective and flat dimensions[J]. Math Japon,1996,44(44):261-268.

[4] BENNIS D,MAHDOU N. Strongly Gorenstein projective, injective, and flat modules[J]. J Pure Appl Algebra,2007,210(2):437-445.

[5] GAO Z H. Weak Gorenstein projective, injective and flat modules[J]. J Algebra Appl,2013,12(2):961-973.

[6] YAN T T. Strongly universal Gorenstein projective, injective and flat modules[J]. Journal of Hebei Normal University(Natural Science Edition),2014,38(3):217-221.

[7] HOLM H. Gorenstein homological dimensions[J]. J Pure Appl Algebra,2004,189(1/2/3):167-193.

[8] BENNIS D, MAHDOU N,OUARGHI K. Rings over which all modules are strongly Gorenstein projective[J]. Rocky Mountain J Math,2008,40(3):749-759.

[9] MAHDOU N, TAMEKKANTE M, YASSEMI S. On (strongly) Gorenstein Von Neumann regular rings[J]. CommAlgebra,2011,39(9):3242-3252.

[10] BENSON D J,GOODEARL K R. Periodic flat modules, and flat modules for finite Groups[J]. Pacific J Math,2000,196(1):45-67.

[11] DING N Q,CHEN J L. Coherent rings with finite self-FP-injective dimension[J]. Comm Algebra,1996,24(9):2963-2980.

[12] ENOCHS E E,JENDA O M G. Gorenstein injective and projective modules[J]. Math Z,1995,220(1):611-633.

[13] Yang X Y,Liu Z K. Strongly Gorenstein projective, injec-

tive and flat modules[J]. J Algebra, 2008, 320(7): 2659-2674.

[14] MAHDOU N, TAMEKKANTE M. On (strongly) Gorenstein (semi)hereditary rings[J]. Arab J Sci Eng, 2011, 36(3): 431-440.

[15] 蹇红,孙春涛. Gorenstein (n,0)-内射模[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2014, 31(6): 50-53.
JIAN H, SUN C T. Gorenstein (n, 0)-injective modules [J]. Journal of Chongqing Normal University(Natural Science), 2014, 31(6): 50-53.

Strongly Universal G-Projective, Injective and Flat Modules

CHEN Dong[1], HU Kui[2]

(1. College of Information Science and Engineering, Chengdu University, Chengdu 610106;
2. College of Science, Southwest University of Science and Technology, Mianyang Sichuan 621010, China)

Abstract: [**Purposes**]To complete the research of strongly universal G-projective modules, injective andflat modules in relative homology theory. [**Methods**] Many related properties are discussed by homology method. An example is given to show that a module is a strongly universal G-projective module, but not a SG-projective module. [**Findings**] A sufficient condition is giving to show that strong universal G-projective module (or strong universalG-flat mode) is SG-projective (or SG-flat), the SG-semisimple ring, SG-VonNeumann regular ring and SG-hereditary ring are characterizedare characterized in terms of strongly universal G-projective, injective and flat modules. [**Conclusions**] The study of strongly universal G-projective modules, injective modules and flat modules is supplemented in existing papers.

Keywords: strongly universal G-projective modules; strongly universal G-injective modules; strongly universal G-flat modules

(责任编辑 黄 颖)