

不对称外磁场下 XXZ 型相互作用的两量子比特系统的纠缠^{*}

陈爱民^{1,2}, 苏耀恒¹

(1. 西安工程大学 理学院, 西安 710048; 2. 西安交通大学 理学院, 西安 710049)

摘要:【目的】研究不对称旋转外磁场下两个相互作用的量子比特系统的量子纠缠。【方法】利用数值模拟,得到不对称旋转外磁场下两个相互作用的量子比特系统的4个本征态。为了刻画系统的纠缠,计算了各个本征态的 concurrence。【结果】外加旋转磁场的极角以及相互作用的各向异性参数都会对4个本征态的纠缠产生影响。当各向异性参数 Δ 由0开始增大时,系统的哈密顿量由一种极限下含外场的 XX 模型经过 $\Delta=1$ 时的海森堡模型逐渐演化为另外一种极限下的 Ising 模型。【结论】相互作用和外部磁场之间的竞争决定了系统纠缠的演化。通过对系统纠缠的研究,可以对系统在参数的不同区间范围内模型的转化以及本征态的性质有更进一步的认识。

关键词:量子比特;XXZ型交互作用;纠缠;concurrence

中图分类号:O469

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2018)03-0143-06

量子信息学^[1-4]是量子力学^[5]与经典信息科学^[6]相融合的新兴交叉学科,是以量子力学的态叠加原理为基础,研究信息处理的一门新兴前沿科学。比特是经典计算和经典信息的基本概念,量子信息学中最基本的单元是量子比特^[7-8],这是一个二能级态的量子系统。由量子力学中态矢量的性质可知,量子比特除了可以处于两个可能的状态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 以外,还可以处于它们的叠加态 $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$,其中 α 和 β 是复数,满足 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ 。目前可能的量子比特的物理实现模型包括自然原子(如中性原子和离子等)和人造原子(如超导线路和半导体中的自旋等)。对一个由两个量子比特组成的复合系统,如果系统的纯态波函数不能写成两个子系统纯态的直积,即 $|\Psi^{AB}\rangle \neq |\Psi^A\rangle \otimes |\Psi^B\rangle$,则称对应的量子态为纠缠态,反之则称为乘积态。对于处于纠缠态的两个子系统之一进行测量,虽然并没有对另一个子系统产生直接的相互作用,但是由于被测系统包含了另一个子系统的信息,测量可以在瞬间改变另一子系统的状态,即:两个子系统之间存在一种超空间的、非定域的关联,此类关联塌缩是纠缠态存在的标志。只要量子态中存在某种方式的量子纠缠,那么就一定存在概率上完全或部分的关联塌缩。

量子纠缠^[9]是一种纯粹的量子力学效应,这一概念早在1935年就被提出了,随着量子信息理论的发展,这一概念的重要性才突显出来。伴随着量子信息科学的发展,量子纠缠不仅在量子理论上有着重要的意义,而且已经成为量子信息处理过程中的不可或缺的物理资源。正是因为有了量子纠缠,才能实现用经典资源无法实现的任务。其中代表性的应用包括基于态的量子密码^[10-12]和量子隐形传态^[14-15]等。现在量子纠缠也已经应用到了对多体系统的量子相变的刻画中^[16-19]。

量子比特之间可以通过交互相互作用和外加场来产生纠缠。迄今为止,对于旋转外场作用下的 XXZ 型海森堡相互作用的两量子比特系统的纠缠的研究都是在对称外场的条件下进行^[20]。对于非对称的情况,由于不能直接得到系统本征态的解析解,纠缠的研究变得更加复杂。本文主要通过数值模拟的方法来研究在不对称外磁场下 XXZ 型海森堡相互作用的两量子比特系统的本征态的演化,给出了系统本征态的纠缠随相互作用的各向异性参数的变化情况。对纠缠的研究可以更透彻地了解量子系统的性质,以便进一步应用于实际的量子操作。

1 量子纠缠的度量

系统纠缠的度量有许多不同的方法,包括 von Neumann 熵^[21-22]、生成纠缠^[23-24]、负值度(Negativity)^[25-26]和相对熵^[27]等。1997年,Scott与William提出用 concurrence 来度量两量子比特系统的纠缠^[28-29]。对于由波函数

* 收稿日期:2017-04-05 修回日期:2017-11-13 网络出版时间:2018-05-22 10:01

资助项目:国家自然科学基金(No. 11504283);陕西省教育厅科研计划项目(No. 17JK0339)

第一作者简介:陈爱民,女,讲师,博士,研究方向为介观物理和量子计算,E-mail:chenaimin_xa@163.com;通信作者:苏耀恒,男,讲师,E-mail:suyaoheng@126.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180522.1001.002.html>

Ψ 描述的纯态系统, concurrence 定义为:

$$C = |\langle \Psi | \tilde{\Psi} \rangle|.$$

其中自旋翻转态 $\tilde{\Psi}$ 定义为:

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y |\Psi^*\rangle,$$

此处 σ_y 为泡利矩阵。如果系统处于叠加态

$$|\Psi\rangle = c_0 |00\rangle + c_1 |01\rangle + c_2 |10\rangle + c_3 |11\rangle,$$

其中 c_i 为相应的叠加系数, concurrence 可以有更简洁地表达为 $C = 2|c_0 c_3 - c_1 c_2|$ 。

Concurrence 的取值范围为 0 到 1。当 $C=0$ 时表示没有纠缠,即对应的量子态为乘积态;当 $C=1$ 时,对应的量子态为最大纠缠态,例如贝尔态即为最大纠缠态;当 $0 < C < 1$ 时,量子态为部分纠缠态。目前, concurrence 已经广泛用于两体系统纠缠的研究中,而对于多体系统,也可以通过计算 concurrence 来获得系统的纠缠^[30]。本文也通过计算 concurrence 来研究两量子比特系统的纠缠。

2 模型

选择由两个量子比特 S_1 和 S_2 组成的复合系统,两个量子比特之间的相互作用处于 XXZ 型相互作用。分别使两个量子比特处于含时外加旋转磁场 $\vec{B}_1(t)$ 和 $\vec{B}_2(t)$ 中,则系统的哈密顿量可以由赝自旋语言描述为:

$$H = \vec{S}_1 \cdot \vec{B}_1(t) + \vec{S}_2 \cdot \vec{B}_2(t) + J(S_1^x S_2^x + S_1^y S_2^y + \Delta S_1^z S_2^z).$$

其中 J 为相互作用常数, Δ 为量子比特之间的相互作用的各向异性参数。取缓慢旋转的不对称外磁场分别为 $\vec{B}_1(t) = B\vec{n}(t)$, $\vec{B}_2(t) = 2B\vec{n}(t)$, $\vec{n}(t) = (\sin\theta\cos\varphi(t), \sin\theta\sin\varphi(t), \cos\theta)$, θ 为旋转外场的极角。若旋转外场的圆频率为常数 ω , 则有 $\varphi(t) = \omega t$ 。在外场旋转一个周期 τ 的过程中, φ 缓慢地由 $\varphi(0) = 0$ 变为 $\varphi(\tau) = 2\pi$ 。注意,当极角 $\theta = 0, \pi$ 时,外加旋转场约化为一个沿 z 方向的静场,此时模型描述的是一个哈密顿量不含时的系统。

哈密顿量的矩阵形式可以写成:

$$H = \begin{pmatrix} \Delta J + 3B\cos\theta & 2Be^{-i\varphi}\sin\theta & Be^{-i\varphi}\sin\theta & 0 \\ 2Be^{i\varphi}\sin\theta & -\Delta J - B\cos\theta & 2J & Be^{-i\varphi}\sin\theta \\ Be^{i\varphi}\sin\theta & 2J & -\Delta J + B\cos\theta & 2Be^{-i\varphi}\sin\theta \\ 0 & Be^{i\varphi}\sin\theta & 2Be^{i\varphi}\sin\theta & \Delta J - 3B\cos\theta \end{pmatrix}.$$

通过对哈密顿量进行研究可以发现,随着各向异性参数 Δ 由 0 增大到无穷大,系统的哈密顿量由一种极限下的含外场的 XX 模型经过中间的 $\Delta=1$ 时的海森堡模型渐演化为另外一种极限下的 Ising 模型。

3 数值模拟

通过系统哈密顿量本征方程的求解可以发现,系统哈密顿量有 4 个本征态 $|\Psi_n\rangle (n \in \{1, 2, 3, 4\})$, 通过应用前边给出的 concurrence 的计算式可以分别算出其对应的纠缠 $C_n (n \in \{1, 2, 3, 4\})$ 。对于不对称外场中的两量子比特系统, concurrence 的解析表达式不容易得出,因此可以通过 Mathematica 软件来进行数值模拟。事实上,由于系统处于旋转外场中,而外场对本征态的影响主要是加入了一个相因子,因此系统本征态的纠缠并不会随着时间发生变化。在本文的后续讨论中,都令 J 作为能量单位,外场强度 $B=J$, 且主要讨论各向异性参数 Δ 以及旋转外场的极角 θ 对系统本征态 concurrence 的影响。

3.1 不同极角 θ 对应的 concurrence 随各向异性参数 Δ 的改变

首先考虑当外加磁场的极角处于不同位置时系统哈密顿量的本征态 $|\Psi_n\rangle (n \in \{1, 2, 3, 4\})$ 的 concurrence 随各向异性参数 Δ 的变化。当极角取值分别 $\theta = 0.01\pi, 0.2\pi, 0.4\pi, 0.5\pi$ 时, $C_n (n \in \{1, 2, 3, 4\})$ 的变化曲线如图 1 所示。

由图 1a 可知:当 $\theta = 0.01\pi$ 时,随着 Δ 的增大, C_1 的值先保持 0 不变(本征态对应为乘积态),后在 $\Delta \approx 0.3$ 处迅速增大到最大值 C_{m1} (约为 0.89),处于部分纠缠态; C_2 的值先保持 C_{m1} 不变,后在 $\Delta \approx 0.3$ 处迅速减小到 0 后保持不变,得到乘积态,当 Δ 继续增大到 $\Delta \approx 2.2$ 附近时, C_2 的值再一次迅速增大到 C_{m1} 后保持不变; C_3 的值先保持 C_{m1} 不变,后在 $\Delta \approx 2.2$ 附近迅速减小到 0 后保持不变; C_4 的值始终保持 0 不变,即不管各向异性参数怎么改变本征态始终为乘积态。在整个参数区间中一共有两个 concurrence 转变的点,这是由于随着 Δ 的增大,磁场强度 B_0 和相互作用 J 以及 Δ 共同影响了系统的本征态。特别地,随着 θ 的值趋于 0,外加旋转场约化为一个沿着 z 方向的静场,模型描述的 H 不含时的情形。此时各个本征态的纠缠就不随时间改变,分别为 $C_1 = C_4 = 0$, $C_2 = C_3 = C_m$, 对应本征态始终为乘积态或者部分纠缠态。

由图 1a 还可以看出,4 个本征态的 concurrence 之间还满足以下关系:在 $\Delta \approx 0.4$ 附近, $C_1 = C_2$; 当 $\Delta = 1$ 时, $C_1 = C_3 \approx 0.89$, $C_2 = C_4 = 0$; 而在 $\Delta \approx 2.6$ 附近, $C_2 = C_3$ 。

由图 1b 可知:当 $\theta = 0.2\pi$ 时,随着 Δ 的增大, C_1 的值单调增大, Δ 越大,增大得越缓慢,最终饱和在一个最大值 C_{m2} (约为 0.93); C_2 的值先减小,在 $\Delta = 1$ 处减小到 0 (得到乘积态) 后缓慢增大,最终也可达到 C_{m2} ; C_3 的值先增大后减小,最终逐渐达到 0, 得到乘积态; 而 C_4 的值先减小,在 $\Delta = 1$ 处减小到 0 (得到乘积态) 后缓慢增大,再十分缓慢地减小到 0。因此,在 $\Delta \rightarrow 0$ 情况下的纠缠对应的值与系统参数有关系; 而当 $\Delta \rightarrow \infty$, 系统的本征态总会演化到部分纠缠态 ($C_1 = C_2 \approx 0.93$) 和乘积态 ($C_3 = C_4 = 0$)。

由图 1b 还可以看出,4 个本征态的 concurrence 之间还满足以下关系:在 $\Delta \approx 0.3$ 附近, $C_1 = C_2$; 当 $\Delta = 1$ 时, $C_1 = C_3 \approx 0.89$, $C_2 = C_4 = 0$; 而在 $\Delta \approx 2.8$ 附近, $C_2 = C_3$ 。

由图 1c 可知:当 $\theta = 0.4\pi$ 时,随着 Δ 的增大, C_1 的值单调增大, Δ 越大,增大得越缓慢,最终饱和在一个最大值 C_{m3} (约为 0.99); C_2 的值先减小,在 $\Delta = 1$ 处减小到 0 (得到乘积态) 后缓慢增大,最终也可达到 C_{m3} ; C_3 的值先增大后减小,最终逐渐达到 0, 得到乘积态; C_4 的值先减小,在 $\Delta = 1$ 处减小到 0 (得到乘积态) 后缓慢增大一些再十分缓慢地减小到 0。在 $\Delta \rightarrow 0$ 情况下的纠缠对应的值与系统参数有关系, 而 $\Delta \rightarrow \infty$, 系统的本征态总会演化到部分纠缠态 ($C_1 = C_2 \approx 0.99$) 和乘积态 ($C_3 = C_4 = 0$)。

由图 1c 还可以看出,4 个本征态的 concurrence 之间还满足以下关系:与 $\theta = 0.2\pi$ 相比,在 $\Delta \approx 0$ 附近, C_1 与 C_2 的交叉点消失; 而在 $\Delta = 1$ 处, 仍有 $C_1 = C_3 \approx 0.89$, $C_2 = C_4 = 0$; 在 $\Delta \approx 3.6$ 附近, $C_2 = C_3$ 。

由图 1d 可知:当 $\theta = 0.5\pi$ 时,无论各向异性参数 Δ 怎么变化,始终有 $C_1 = C_3$, $C_2 = C_4$, 即对应的两个本征态的纠缠相等。随着 Δ 由 0 开始增大, C_1 与 C_3 的值都逐渐增大,并最终趋于 1, 得到最大纠缠态; 而 C_2 与 C_4 的值相等, 都先减小到 0, 后再迅速增大并达到 1, 得到最大纠缠态。因此,当外场处于 xy 平面内时,在 $\Delta \rightarrow 0$ 情况下的纠缠对应的值与系统参数有关系, 而 $\Delta \rightarrow \infty$, 系统的本征态总会演化到最大纠缠态。特别地,当 $\Delta = 1$ 时, 仍有 $C_1 = C_3 \approx 0.89$, $C_2 = C_4 = 0$ 。

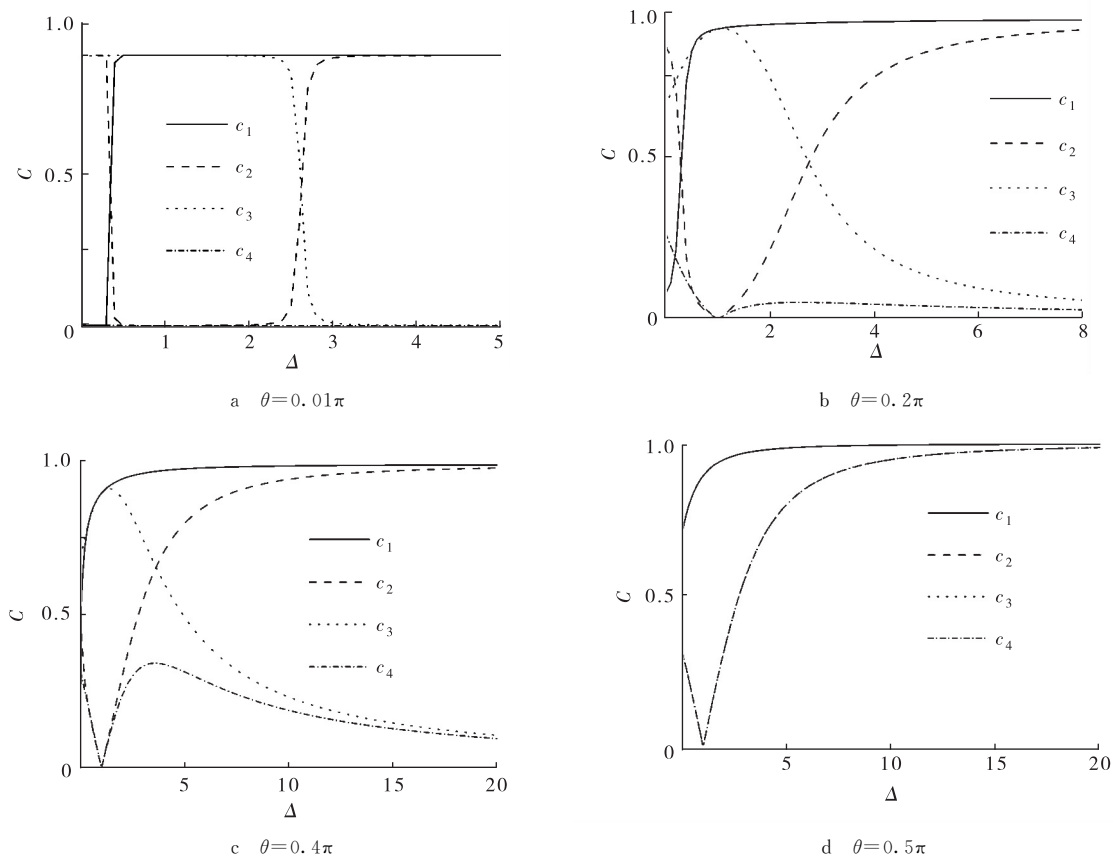


图 1 不同极角下 concurrence 随各向异性参数 Δ 的变化曲线

Fig. 1 Concurrence via the anisotropic parameter Δ for different angle θ

事实上,这里对极角 θ 取值从 0 到 π 的系统哈密顿量的 4 个本征态的 concurrence 随着各向异性参数 Δ 的变化曲线都进行了模拟。结果表明:当所选取的两个极角 θ 关于 $\frac{\pi}{2}$ 对称时,对应系统本征态的 concurrence 相等,即 $C_n(\theta) = C_n(\pi - \theta)$ 。

综上可知,当保持极角 θ 不变时,随着各向异性参数 Δ 由 0 增大到无穷大时,模型本征态的 concurrence 发生了很大的改变。这是因为系统由一种极限下的 XX 模型经过中间 $\Delta=1$ 的海森堡模型而逐渐演化为另外一种极限的 Ising 模型。 $\Delta < 1$ 的 XX 模型的 4 个本征态的 concurrence 的值随着极角的改变会发生剧烈变化。其中当 θ 较小时,存在 $C_1 = C_2$ 的点。且交叉点的位置随着 θ 的增大而减小,并最终当 θ 增大到一定程度,交叉点消失。对于 $\Delta=1$ 的海森堡模型,系统本征态的纠缠不会随着极角的变化而改变,始终有 $C_1 = C_3 \approx C_0, C_2 = C_4 = 0$ 。 C_0 的值仅与两个量子比特上边所有不对称性外场的强度之比有关。对于 $\Delta > 1$ 的 Ising 模型,与 XX 模型类似,当 θ 较小时系统本征态的 concurrence 存在 $C_3 = C_4$ 的点。且交叉点的位置随着 θ 的增大而增大,并最终当 θ 增大到一定程度,交叉点消失。 $\Delta \rightarrow \infty$ 时,系统的本征态始终是自旋单态和三重态,对应的 concurrence 分别为 0 和 1,对应乘积态和最大纠缠态。当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,无论各向异性参数 Δ 怎么变化,始终有 $C_1 = C_3, C_2 = C_4$ 。而当外场的极角 θ 关于 $\frac{\pi}{2}$ 对称时,对应的本征态的 concurrence 相等,即 $C_n(\theta) = C_n(\pi - \theta)$ 。

3.2 不同本征态的 concurrence 随各向异性参数 Δ 的改变

通过比较不同极角时对应的 concurrence 的情况,可以发现各个本征态的 concurrence 随极角的变化存在一定的规律。由于系统本征态的 concurrence 关于 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 对称,此处只考虑 $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ 的情况。当极角 θ 取值为 $\theta = 0, 1\pi, 0.2\pi, 0.3\pi, 0.4\pi, 0.5\pi$ 时,系统哈密顿量的 4 个本征态 $|\Psi_n\rangle (n \in \{1, 2, 3, 4\})$ 的 concurrence 分别随着各向异性参数 Δ 的变化曲线如图 2 所示。

对比图 2 中的 4 个图可知,当 $\Delta=1$ 即当系统处于海森堡模型时,不管极角如何变化,系统 4 个本征态的纠缠都不会改变,始终有 $C_1 = C_3 \approx 0.89, C_2 = C_4 = 0$ 。而对于 $\Delta < 1$ 的 XX 模型和 $\Delta > 1$ 的 Ising 模型,4 个本征态的纠缠随极角的改变有各自的规律。

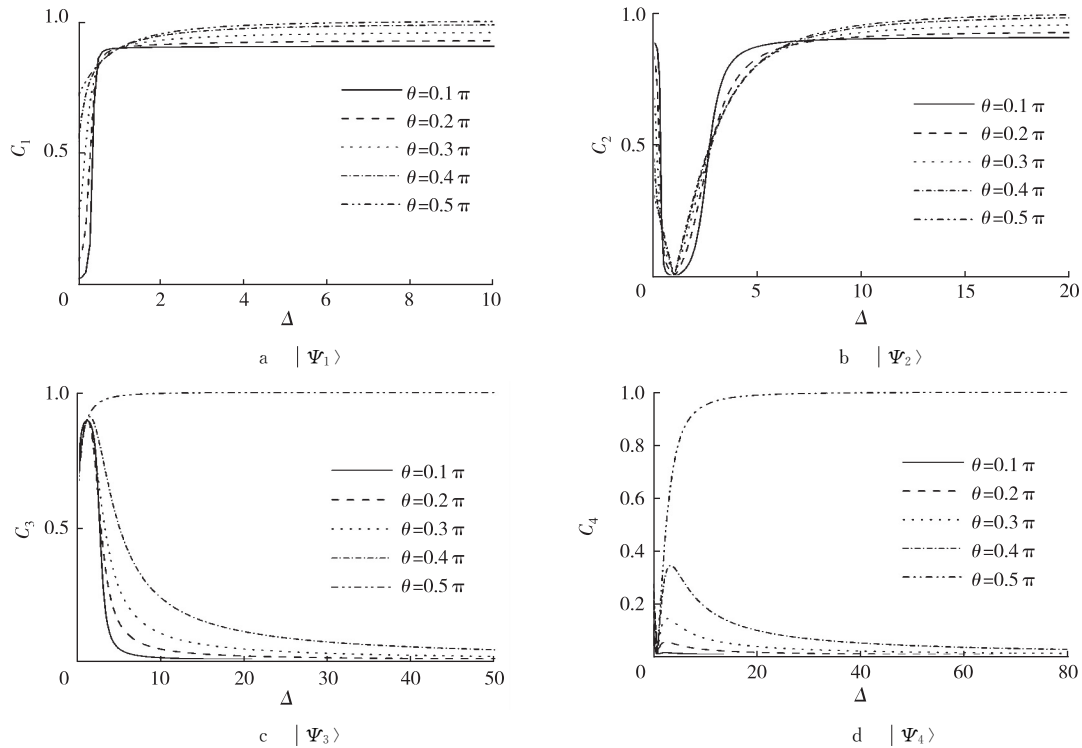
由图 2a 可知,随着 Δ 的增大, C_1 的值总趋势是逐渐增大到某一个饱和的值而后保持不变,且极角越小越快达到饱和。 $\Delta < 1$ 时, C_1 的值随 Δ 的增大快速增长,增长的剧烈程度与 $\Delta=0$ 时对应的起点有关,这个值随着极角的增大而增大。当 $\Delta > 1$ 时, C_1 的值增长缓慢,并逐渐达到一个与极角有关的饱和的值 $C(\theta)$ 。 $C(\theta)$ 随极角的增大而增大,当 $\theta = 0.5\pi$ 时, $C(0.5\pi) = 1$ 得到最大纠缠态。在 $\Delta=1$ 前后,系统本征态的 concurrence C_1 随着极角的变化趋势不同,说明在此前后系统的性质发生了很大的变化。

由图 2b 可知:随着 Δ 的增大, C_2 的值总趋势是先减小并在 $\Delta=1$ 时达到 $C_2=0$ 后增大最终达到某一个饱和的值而后保持不变,且极角越小越快达到饱和。 $\Delta < 1$ 时, C_2 的值随 Δ 的增大快速减小,增长的剧烈程度与 $\Delta=0$ 时对应的起点有关,这个值随着极角的增大而减小。当 $\Delta > 1$ 时, C_2 的值先迅速增大后增长速度变缓,并逐渐达到一个与极角有关的饱和的值 $C(\theta)$ 。这个饱和值与 C_1 所得到的结果相等。

由图 2c 可知:随着 Δ 的增大,除了 $\theta = 0.5\pi$ 对应的曲线外, C_3 的值总趋势是先增大后减小。 $\Delta < 1$ 时, C_3 的值随 Δ 的增大而快速增大, $\Delta=0$ 时对应的起点的值随着极角的增大有较小的减小。当 $\Delta > 1$ 时, C_3 的值经过一个小幅度的短期增大后迅速减小,并最终达到 0,得到乘积态。 θ 越大,得到乘积态的速度越慢。值得注意的是,当 $\theta = 0.5\pi$ 时, C_3 的值总是随 Δ 的增大而增大。当 $\Delta \rightarrow \infty$ 时 C_3 的值趋于 1,得到最大纠缠态。

由图 2d 可知:随着 Δ 的增大,除了 $\theta = 0.5\pi$ 对应的曲线外, C_4 的值总趋势是先减小,在 $\Delta=1$ 处都减小到 0 后增大,到一定的峰值后再逐渐缓慢地减小到 0。 $\Delta < 1$ 时, C_4 的值随 Δ 的增大而快速减小, $\Delta=0$ 时对应的起点的值随着极角的增大有较小的增大使得减小变得更剧烈。当 $\Delta > 1$ 时, C_4 的值先快速增大后逐渐减小,并最终达到 0,得到乘积态。 θ 越大,得到乘积态的速度越慢。注意,当 $\theta = 0.5\pi$ 时, C_4 的值在 $\Delta > 1$ 的区域是单调增大的。当 $\Delta \rightarrow \infty$ 时 C_4 的值趋于 1,得到最大纠缠态。

综上可知,随着极角 θ 的变化,各个本征态的 concurrence 的变化都有各自的特征。当 $\Delta \rightarrow 0$ 时,即对应 XX 模型时,4 个本征态的 concurrence C_n 都具有确定的非零值,这个值与极角的值有关。而当 $\Delta \rightarrow \infty$ 时,无论极角如何变化总有 $C_3 = C_4 = 0$ 得到乘积态。而 C_1 和 C_2 都将趋于同一个饱和的值 $C(\theta)$, $C(\theta)$ 随极角的增大而增大。

图 2 各本征态 concurrence 随各向异性参数 Δ 的变化曲线Fig. 1 Concurrence via polar angle θ for eigenstate $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle, |\Psi_3\rangle, |\Psi_4\rangle$ respectively

4 结束语

本文对不对称外加旋转磁场作用下的具有 XXZ 型相互作用两个量子比特组成的复合系统的纠缠进行了研究。随着外场极角的改变,系统各本征态在各向异性参数的不同区间有各自不同的演化规律。这代表系统在整个参数空间中发生了本质的变化,即随着各向异性参数的增大,系统从 XX 模型逐渐演化为海森堡模型并最终演化成为了 Ising 模型。

参考文献:

- [1] BENIOFF P. The computer as a physical system: a microscopic quantum mechanical Hamiltonian model of computers as represented by turing machines[J]. J Stat Phys, 1980, 22: 563-591.
- [2] DEUTSCH D. Quantum computational networks[J]. Proceedings Royal Society London A, 1989, 425: 73-90.
- [3] LLOYD S. A potentially realizable quantum computer[J]. Science, 1993, 261(17): 1569-1571.
- [4] NIELSEN M A, CHUANG I L. Quantum computation and quantum information[M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000.
- [5] 曾谨言. 量子力学[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [6] ZENG J Y. Quantum mechanics[M]. Beijing: Science Press, 1999.
- [7] SHANNON C E. A mathematical theory of communication[J]. Bell System Tech J, 1948, 27: 379-382.
- [8] DIVINCENZO D P. Quantum computation[J]. Science, 1995, 270(5234): 255-261.
- [9] DIVINCENZO D P, LOSS D. Quantum information is physical[J]. Superlattice and Microstructure, 1998, 23: 419-432.
- [10] EINSTEIN A, PODOLSKY B, ROSEN N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete[J]. Phys Rev, 1935, 47: 777-780.
- [11] EKERT A K. Quantum cryptography based on Bell's theorem[J]. Phys Rev Lett, 1991, 67(6): 661-663.
- [12] MATTLE K, WEINFURTER H, KWIATT P G, et al. Dense coding in experimental quantum communication[J]. Phys Rev Lett, 1996, 6(25): 4656-4659.
- [13] INOUE K. Differential phase-shift quantum key distribution systems[J]. Phys Rev Lett, 2015, 21(3): 109-115.
- [14] WANG D, LI M, GUO G C, et al. An improved scheme on decoy-state method for measurement-device-independent quantum key distribution[J/OL]. Scientific Reports, 2015, 5: 15130 [2017-11-20]. <https://www.nature.com/articles/srep15130.pdf>.
- [15] BOUWMEESTER D, PAN J W, MATTLE K, et al. Experi-

- mental quantum teleportation[J]. *Nature*, 1997, 390: 575.
- [15] WANG X L, CAI X D, SU Z E, et al. Quantum teleportation of multiple degrees of freedom of a single photon[J]. *Nature*, 2015, 518(7540): 516.
- [16] OSTERLOH A, AMICO L, FALCI G, et al. Scaling of entanglement close to a quantum phase transition[J]. *Nature (London)*, 2002, 416: 608.
- [17] KOREPIN V E. Universality of entropy scaling in one dimensional gapless models[J/OL]. *Phys Rev Lett*, 2004, 92: 096402 [2017-11-20]. <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.92.096402>.
- [18] AMICO L, FAZIO R, OSTERLOH A, et al. Entanglement in many-body systems[J]. *Rev Mod Phys*, 2008, 80: 517.
- [19] CHUNG M, LANDAU D P. Von Neumann entropy and bipartite number fluctuation in quantum phase transitions[J/OL]. *Phys Rev B*, 2011, 83: 113104 [2017-11-20]. <https://journals.aps.org/prb/abstract/10.1103/PhysRevB.83.113104>.
- [20] CHEN A M, CHO S Y, SU Y H, et al. Relation between quantum entanglement and the Berry phase in systems of two interacting qubits[J]. *J Korean Phys Soc*, 2010, 57(4): 696-703.
- [21] BENNETT C H, BERNSTEIN H J, POPESCU S, et al. Concentrating partial entanglement by local operations[J]. *Phys Rev A*, 1996, 53: 2046.
- [22] SU Y H, CHEN A M, XIANG C, et al. Gaussian phase transition and critical exponents in spin 1 bond alternative Heisenberg chains[J/OL]. *J Stat Mech-Theory E*, 2016, 123102 [2017-11-20]. <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-5468/aa4f9a/meta>.
- [23] TERHAL B M. A family of indecomposable positive linear maps based on entangled quantum states[J]. *Linear Algebra Appl*, 2001, 323: 61-73.
- [24] LEWENSTEIN M, KRAUS B, CIRAC J I, et al. Optimization of entanglement witnesses[J/OL]. *Phys Rev A*, 2000, 62: 052310 [2017-11-20]. <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.62.052310>
- [25] ZYCZKOWSKI K, HORODECKI P, SANPERA A, et al. Volume of the set of separable states[J]. *Phys Rev A*, 1998, 58(2): 883-892.
- [26] VIDAL G, WENER R F. Computable measure of entanglement[J/OL]. *Phys Rev A*, 2002, 65(3): 032314 [2017-11-20]. <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.65.032314>.
- [27] VEDRAL V, PLENIO M B. Entanglement measures and purification procedures[J]. *Phys Rev A*, 1998, 57(3): 1619-1633.
- [28] WOOTTERS W K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits[J]. *Phys Rev Lett*, 1998, 80: 2245-2248.
- [29] HILL S, WOOTEERS W K. Entanglement of a pair of quantum bits[J]. *Phys Rev Lett*, 1997, 78: 5022-5025.
- [30] MA F W, LIU S X, KONG X M. Entanglement and quantum phase transition in the one-dimensional anisotropic XY model[J/OL]. *Phys Rev A*, 2011, 83: 062309 [2017-11-20]. <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.83.062309>.

Entanglement of Two Qubits System with XXZ Interaction in the Asymmetry Magnetic Fields

CHEN Aimin^{1,2}, SU Yaoheng¹

(1. School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048;

2. Department of Applied Physics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: [Purposes] To investigate the entanglement of two qubits system in the asymmetry rotate magnetic fields. [Methods] By using numerical simulation, the four eigenstates of two qubits system in the asymmetry rotate magnetic fields are obtained. To measure the entanglement, the concurrence is calculated. [Findings] Both the polar angle of the rotate magnetic field and the anisotropy parameter of the interaction have important influence to the entanglement for the eigenstates. When the anisotropy parameter is increased from zero to infinity, the Hamiltonian of system will be changed from the XX model to the Heisenberg model, and finally to the Ising model. [Conclusions] The competition between interaction and external magnetic field determines the evolution of entanglement. Through the study of the entanglement, the transition process of the system via the parameter can be obtained and phase transition for the eigenstates can be understood more deeply.

Keywords: qubit; XXZ interaction; entanglement; concurrence

(责任编辑 许 甲)