2018 年 9 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Sep. 2018
第 35 卷 第 5 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 35 No. 5

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20180502

预不变凸性的一阶与二阶刻画*

杨 玉 红
(长江师范学院 数学与统计学院，重庆 涪陵 408100)

摘要:【目的】研究实值函数的预不变凸性的一阶与二阶刻画问题。【方法】利用 Lebourg 中值定理与二阶 Taylor 定理。【结果】首先，获得了不可微严格预不变凸函数和 ρ-预不变凸函数的一阶刻画；然后，利用所获得的一阶刻画结论，得到了这些函数在可微情形时的二阶刻画。【结论】所得的结果表明可微函数的预不变凸性和不变凸性之间有着密切的联系，不可微函数的预不变凸性与非光滑的不变凸性也有密切关联。

关键词:预不变凸；严格预不变凸；ρ-预不变凸；条件 C

中图分类号:O221 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2018)05-0001-09

凸性理论对最优化理论影响非常深远，它在数理经济、对策论、工程技术和管理科学等方面都起着非常重要的作用。研究凸性理论是数学规划的一个重要方向，而对不变凸性的研究又是凸性理论中的一项重要内容。

1981 年，Hanson[1]第一个提出不变凸函数，而后被 Craven[2]正式命名。1986 年，Ben-Israel 和 Mond[3]在研究不变凸函数在非线性规划中的应用时，表明了预不变凸函数与不变凸函数的关系：即可微的预不变凸函数就是不变凸函数。但文献[3]并没有给出预不变凸函数这个概念，而是由 Weir 和 Mond[4]正式引入并使用的。1995 年，Mohan 和 Neogy[5]引入条件 C，证明了在条件 C 下不变凸函数就是预不变凸函数。从而，对于可微函数而言，当条件 C 成立时，预不变凸函数和不变凸函数是等价的，即：

命题 1[3,5] 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，$f:S\rightarrow\mathbf{R}$ 是一个可微函数，其中 S 是包含 K 的开集。

1) 设 η 满足条件 C，若 f 在 K 上关于 η 是不变凸函数，则 f 在 K 上关于相同的 η 是预不变凸函数。

2) 若 f 在 K 上关于 η 是预不变凸函数，则 f 在 K 上关于相同的 η 是不变凸函数，即：

$$f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{y})+\nabla f(\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K。\tag{1}$$

可见，预不变凸函数与不变凸函数有着密切联系，从而引起了人们对预不变凸性的极大关注。鉴于预不变凸函数与不变凸函数的着密切关系，后来有不少学者也开始考虑严格预不变凸函数、半严格预不变凸函数等情形，发现也有相似结论。

2001 年，Yang 和 Li[6]给出了可微情形的半严格预不变凸函数的一个刻画。

命题 2[6] 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}^n$ 的开不变凸集，其中 η 满足条件 C，设 $f:K\rightarrow\mathbf{R}$ 是一个实值可微函数且满足条件 A。则 f 在 K 上关于 η 是半严格预不变凸函数当且仅当：

$$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:f(\boldsymbol{x})\neq f(\boldsymbol{y}),\ \text{s.t.}\ \ f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{y})+\nabla f(\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})。\tag{2}$$

如果把满足(2)式的函数称为半严格不变凸函数的话，那么上面的命题 2 就表明了可微半严格预不变凸函数与半严格不变凸函数的密切联系。

类似地，2005 年颜丽佳和刘芙萍[7]也得到了可微的强预不变凸函数与强不变凸函数的关系。

命题 3[7] 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}^n$ 的开不变凸集，$f:K\rightarrow\mathbf{R}$ 是一个实值函数。则：

1) 设 f 在 K 上是可微函数，若 f 在 K 上关于 η 是强预不变凸函数，则 f 在 K 上关于相同的 η 是强不变凸

* **收稿日期:**2018-08-04 **网络出版时间:**2018-09-26 13:26

资助项目:国家自然科学基金(No. 11431004)；重庆市科委项目(No. cstc2016jcyjA0178)；重庆市教委项目(No. KJQN201801427)；长江师范学院科研启动项目(No. 2018KYQD017)

第一作者简介:杨玉红，女，讲师，博士，研究方向为广义凸性及向量优化，E-mail:yhyang1020@163.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180926.1326.046.html

函数，即：$\rho>0$ s. t. $f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})\geqslant\nabla f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+\rho\|\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\|^2$，$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$。

2) 设 η 满足条件C，若可微函数 f 在 K 上关于 η 是强不变凸函数，则 f 在 K 上关于相同的 η 是强预不变凸函数。

由以上分析发现，对于可微函数，预不变凸性和不变凸性之间有着密切的联系。从而，可以利用不变凸函数的已有结论去研究预不变凸函数，反之亦然。至少可以扩大预不变凸函数和不变凸函数的研究视角，因为预不变凸函数和不变凸函数的定义方式有很大的不同。这也是本文处理预不变凸性的一阶刻画的原因之一，目前还有严格预不变凸函数、ρ-预不变凸函数等相关结论处理的不够完善。

既然可微的预不变凸性和不变凸性之间有着密切的联系，那么当函数不可微的时候，预不变凸性与非光滑的不变凸性是否也有关联呢？事实上，也有类似的关联。本文余下部分均用Clarke次微分定义不变凸性，并称为Clarke不变凸性。2006年，Jabarootian 和 Zafarani[8] 提出了Banach空间中的Clarke(严格)不变凸函数、Clarke拟不变凸函数、Clarke强不变凸函数概念，并讨论了它们与预不变凸性的关系。下面是Clarke不变凸函数与预不变凸函数的关系。

命题4[8] 设 X 是Banach空间，$K\subseteq X$ 是关于 η 的非空不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 是局部Lipschitz函数。若 f 在 K 上关于 η 是Clarke不变凸函数且满足条件D，且 η 满足条件C，则 f 关于相同的 η 是预不变凸函数。若 f 在 K 上关于 η 是预不变凸函数且 η 关于第2个变量连续，则 f 关于相同的 η 是Clarke不变凸函数。

2007年，刘彩平[9-10]沿袭文献[8]的做法，讨论了Clarke半严格(拟)不变凸函数与预(拟)不变凸函数的关系。2012年，Soleimani-damaneh[11]也关注了预不变凸函数与非光滑不变凸函数之间的关系。值得注意的是，文献[8]在给出预不变凸函数和Clarke不变凸函数的关系时，需要向量值映射 η 的一个连续性假设。文献[11]则去掉这个连续性假设，表明由预不变凸函数只能获得弱Clarke不变凸函数。不过，文献[8]并没有考虑严格预不变凸函数与 ρ-预不变凸函数情形，所以本文打算处理这些情形。

2010年，赵克全[12]给出了一个二次连续可微的预不变凸函数的二阶刻画。

定理1[12] 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 η 的开不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 是二次连续可微的实值函数。如果 η 满足条件C，f 在 K 上关于 η 满足条件D，则 f 在 K 上关于相同的 η 是预不变凸函数等价于：

$$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\,\nabla^2 f(\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0,\ \forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K。$$

本文将跟随文献[12]的思路，讨论严格预不变凸函数与 ρ-预不变凸函数在二次可微情形下的刻画情况，以期得到预不变凸性的一种新的判别方法。

1 预备知识

本文假设 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维欧氏空间，$\mathbf{R}$ 表示全体实数的集合，X 是一个Banach空间且赋予范数 $\|\cdot\|$，X^* 是其拓扑对偶空间。$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$ 和 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 分别表示由 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X$ 构成的线段和开线段，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示空间 X 与 X^* 之间的对偶对，$\mathrm{int}\Omega$ 表示集合 Ω 的拓扑内部。

定义1[4] 称 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，若 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\forall\,\alpha\in[0,1]$，s. t. $\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in K$。

定义2 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数，则：

1)[6] 称 f 在 K 上关于 η 是预不变凸函数，若 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\forall\,\alpha\in[0,1]$，s. t.

$$f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqslant\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})。$$

2)[6] 称 f 在 K 上关于 η 是严格预不变凸(或半严格预不变凸)函数，若 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ (或 $f(\boldsymbol{x})\neq f(\boldsymbol{y})$)，$\forall\,\alpha\in(0,1)$，s. t. $f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))<\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})$。

3) 若 $\exists\,\rho\in\mathbf{R}$，$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\forall\,\alpha\in[0,1]$，s. t.

$$f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqslant\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})-\rho\alpha(1-\alpha)\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2,$$

称 f 在 K 上关于 η 是 ρ-预不变凸函数。若 $\rho>0$ 时，则 f 就是强预不变凸函数[7]。

定义3[5] 称向量值映射 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 满足条件C，若 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，$\forall\,\alpha\in[0,1]$，有：$C_1:\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=-\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$；$C_2:\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=(1-\alpha)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$。

定义4[13] 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，称 $f:K\to\mathbf{R}$ 在 K 上关于 η 满足条件D，若 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，有 $f(\boldsymbol{y}+\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqslant f(\boldsymbol{x})$。

性质 1[14-15]　若向量值映射 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 满足条件 C，则：

$$\eta(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=(\alpha_1-\alpha_2)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n,\ \forall\,\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]。$$

在性质 1 中取 $\alpha_2=0$，则有：

性质 2　若向量值映射 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 满足条件 C，则：

$$\eta(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y})=\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n,\ \forall\,\alpha\in[0,1]。$$

定义 5[16-17]　称函数 $\varphi:X\to\mathbf{R}$ 在 $\bar{x}\in X$ 附近是局部 Lipschitz 或 Lipschitz 连续的，如果存在 $\bar{x}$ 的一个邻域 U 以及实数 $k\geqslant 0$（称 k 为秩）使得 $|\varphi(\boldsymbol{y})-\varphi(\boldsymbol{x})|\leqslant k\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|,\ \forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in U$。如果 φ 在 X 的每一点附近都是局部 Lipschitz 的，则称 φ 是 X 上的局部 Lipschitz 函数。

定义 6[16]　假定 $\varphi:X\to\mathbf{R}$ 在 $\bar{x}\in X$ 附近是局部 Lipschitz 的，则：

1）φ 在 $\bar{x}$ 处沿方向 $\boldsymbol{d}\in X$ 的 Clarke 广义方向导数，记为 $\varphi^0(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d})$，定义为：

$$\varphi^0(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d}):=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\bar{\boldsymbol{x}}\\ t\downarrow 0}}\sup\frac{\varphi(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{d})-\varphi(\boldsymbol{x})}{t}。$$

2）φ 在 $\bar{x}$ 处的 Clarke 次微分（又称为 Clarke 广义梯度），记为 $\partial^c\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})$，定义为：

$$\partial^c\varphi(\bar{\boldsymbol{x}}):=\{\xi\in X^*\ |\ \varphi^0(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d})\geqslant\langle\xi,\boldsymbol{d}\rangle,\ \forall\,\boldsymbol{d}\in X\},$$

其中 ξ 通常被称为 Clarke 次梯度。

引理 1[8,16]　假定 $\varphi,\psi:X\to\mathbf{R}$ 在 $\bar{x}\in\mathrm{dom}\varphi\cap\mathrm{dom}\psi$ 附近是局部 Lipschitz 的（秩为 k），则：

1）$\partial^c\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})$ 是 X^* 中的非空弱 * 紧凸集且 $\|\xi\|_*\leqslant k,\ \forall\,\xi\in\partial^c\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})$；

2）$\partial^c(a\varphi)(\bar{\boldsymbol{x}})=a\partial^c\varphi(\bar{\boldsymbol{x}}),\ \forall\,a\in\mathbf{R}$；$\partial^c(\varphi+\psi)(\bar{\boldsymbol{x}})\subseteq\partial^c\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})+\partial^c\psi(\bar{\boldsymbol{x}})$；

3）$\varphi^0(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d})=\max\{\langle\xi,\boldsymbol{d}\rangle\ |\ \xi\in\partial^c\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})\},\ \forall\,\boldsymbol{d}\in X$；

4）设序列 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\in I}\subseteq X$ 和序列 $\{\xi_i\}_{i\in I}\subseteq X^*$ 满足 $\xi_i\in\partial^c\varphi(\boldsymbol{x}_i),\ \forall\,i\in I$。如果 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\in I}$ 收敛到 $\bar{x}$，并且 ξ 是 $\{\xi_i\}_{i\in I}$ 的弱 * 接触点，则有 $\xi\in\partial^c\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})$。

定理 2（Lebourg 中值定理）[16]　设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X$，如果函数 $f:X\to\mathbf{R}$ 在包含线段 $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$ 的一个开集上是局部 Lipschitz 的，则存在 $\boldsymbol{u}\in(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 使得 $f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})\in\langle\partial^c f(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\rangle$。

定义 7[18-19]　设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是非空集合，$f:K\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数，$\bar{x}\in\mathrm{int}K$，则：

1）称 f 在 $\bar{x}$ 是可微的，如果存在一个向量 $\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})\in\mathbf{R}^n$（称为 f 在 $\bar{x}$ 处的梯度或一阶导数）以及一个函数 α 满足 $\alpha(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\to 0\ (\boldsymbol{x}\to\bar{\boldsymbol{x}})$，使得 $f(\boldsymbol{x})=f(\bar{\boldsymbol{x}})+\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})+\|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}\|\alpha(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}),\ \forall\,\boldsymbol{x}\in K$，其中梯度向量 $\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})$ 由偏导数构成，即：$\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}=\left(\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{x}})}{\partial\boldsymbol{x}_1},\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{x}})}{\partial\boldsymbol{x}_2},\cdots,\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{x}})}{\partial\boldsymbol{x}_n}\right)$。

2）称 f 在 $\bar{x}$ 是二次可微的，若存在一个梯度向量 $\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})$，一个 $n\times n$ 对称矩阵 $\boldsymbol{H}(\bar{\boldsymbol{x}})$（称为 f 在 $\bar{x}$ 处的 Hessian 矩阵或者二阶导数）及一个函数 α 满足 $\alpha(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\to 0\ (\boldsymbol{x}\to\bar{\boldsymbol{x}})$，使得：

$$f(\boldsymbol{x})=f(\bar{\boldsymbol{x}})+\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})+\|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}\|^2\alpha(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}),\ \forall\,\boldsymbol{x}\in K。$$

其中，Hessian 矩阵 $\boldsymbol{H}(\bar{\boldsymbol{x}})$（又记为 $\nabla^2 f(\bar{\boldsymbol{x}})$）的第 i 行第 j 列是二阶偏导 $\frac{\partial^2 f(\bar{\boldsymbol{x}})}{\partial\boldsymbol{x}_i\partial\boldsymbol{x}_j}$。

定理 3（二阶 Taylor 定理）[18-19]　设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是非空开集，$f:K\to\mathbf{R}$ 二次可微。则对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，存在 $\alpha\in(0,1)$ 使得 $\boldsymbol{z}=\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y}$ 且满足 $f(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$，其中 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z})$ 为 f 在 $\boldsymbol{z}$ 处的 Hessian 矩阵。

如无特别说明，本文用到的“可微”是指 Clarke[16] 的著作《Optimization and Nonsmooth Analysis》中的“连续可微”。由此文献的命题 2.2.4 和推论可保证在“连续可微”的时候 Clarke 次微分是单点集，就是通常所说的（一阶）导数或者梯度 $\nabla f(\cdot)$。

定义 8　设 $K\subseteq X$ 是一个开集，$f:K\to\mathbf{R}$ 是局部 Lipschitz 函数，$\eta:X\times X\to X$ 是一个事先给定的向量值映射，$\rho\neq 0$ 是一个给定的实数。则：

1）[8,11]　称 f 在 K 上关于 η 是 Clarke 不变凸，若 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\ \forall\,\xi\in\partial^c f(\boldsymbol{x})$，s. t.

$$f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})\geqslant\langle\xi,\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\rangle。\tag{3}$$

若有 $f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})>\langle\xi,\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\rangle$ 对任意的 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}$ 成立,则称 f 是 Clarke 严格不变凸。

2)[11] 称 f 在 K 上关于 η 是 Clarke 弱不变凸,若 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$\exists\xi\in\partial^c f(\boldsymbol{x})$,s.t. (3)式成立。若有 $f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})>\langle\xi,\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\rangle$ 对任意的 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}$ 成立,则称 f 是 Clarke 弱严格不变凸。

3)[8] 称 f 在 K 上关于 η 是 Clarke ρ-不变凸($\rho\neq0$),若 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$\forall\xi\in\partial^c f(\boldsymbol{x})$,s.t.

$$f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})\geqslant\langle\xi,\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\rangle+\rho\|\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\|^2。\tag{4}$$

若有 $f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})>\langle\xi,\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\rangle+\rho\|\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\|^2$ 对任意的 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}$ 成立,则称 f 是 Clarke 严格 ρ-不变凸。

4) 称 f 在 K 上关于 η 是 Clarke 弱 ρ-不变凸($\rho\neq0$),若 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$\exists\xi\in\partial^c f(\boldsymbol{x})$,s.t. (4)式成立。若有 $f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})>\langle\xi,\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\rangle+\rho\|\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\|^2$ 对任意的 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}$ 成立,则称 f 是 Clarke 弱严格 ρ-不变凸。

注1 若 f 是 K 上的可微函数,则 $\partial^c f(\boldsymbol{x})=\{\nabla f(\boldsymbol{x})\}$。于是在定义8中将次微分"$\xi$"全部更换为梯度"$\nabla f(\boldsymbol{x})$",则对应于情形1)、2)的函数称为(严格)不变凸函数[1,20];对应于情形3)、4)的函数称为(严格)ρ-不变凸函数(当 $\rho>0$ 时就是文献[20]中的强不变凸函数)。

2 非光滑预不变凸性的一阶刻画

若无特说明的话,本节均假设 $K\subseteq X$ 是非空子集,$\eta:X\times X\to X$ 是一个给定的向量值映射。从引言部分得知,非光滑情形的预不变凸函数、半严格预不变凸函数的一阶刻画已经获得。下面重点讨论严格预不变凸函数和 ρ-预不变凸函数。

文献[8]的引理3.2与引理3.3已经讨论过严格预不变凸函数的一阶刻画,即下面的定理4的1)和3)。不过,下面将再次给出结论1)的证明,原因有两条:其一,文献[8]引理3.2中的条件D是多余的;其二,文献[8]引理3.2给出了Clarke强不变凸情形的证明,表明Clarke严格不变凸的证明可以类似地得到。然而,事实上还需要做一些必要的讨论——只有符合"$\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}$"这个基本条件后才能使用严格不变凸性去获得结论。

定理4 设 K 是关于 η 的开不变凸集,$f:K\to\mathbf{R}$ 是局部 Lipschitz 函数。

1)[8] 设 η 满足条件C,若 f 在 K 上关于 η 是 Clarke 严格不变凸函数,即 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$,$\forall\xi\in\partial^c f(\boldsymbol{x})$,s.t.

$$f(\boldsymbol{y})>f(\boldsymbol{x})+\langle\xi,\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\rangle,\tag{5}$$

则 f 在 K 上关于相同的 η 是严格预不变凸函数。

2) 若 f 在 K 上关于 η 是严格预不变凸函数,则 f 在 K 上关于相同的 η 是 Clarke 弱不变凸函数,即 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$\exists\xi\in\partial^c f(\boldsymbol{x})$,s.t. $f(\boldsymbol{y})\geqslant f(\boldsymbol{x})+\langle\xi,\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\rangle$。

3)[8] 若 f 在 K 上关于 η 是严格预不变凸函数,且 η 关于第2个变量是连续的,则 f 在 K 上关于相同的 η 是 Clarke 严格不变凸函数。

证明 1) 设 f 在 K 关于 η 是 Clarke 严格不变凸函数。任意取定 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$,任意取定 $\lambda\in(0,1)$。令 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$,由于 K 是关于 η 的不变凸集,则有 $\boldsymbol{z}\in K$。

首先,当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ 时,$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}$ 与 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}$ 不能同时成立。事实上,若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}$ 与 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}$ 同时成立时,那么 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}$,与 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ 相矛盾。下面分3种情形讨论。

i) 当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}$ 时。由于 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}$,则:

$$f(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{z})。\tag{6}$$

注意到 $\lambda\neq0$ 及 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}$,由条件C得 $0=\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=-\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$。从而有:

$$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=0。\tag{7}$$

由于 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{z}$,由(5),(7)式得:

$$f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{z})+\langle\xi,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\rangle=f(\boldsymbol{z}),\ \forall\xi\in\partial^c f(\boldsymbol{z})。\tag{8}$$

由(6)式和(8)式得 $\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})>\lambda f(\boldsymbol{z})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{z})=f(\boldsymbol{z})=f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$。

ii) 当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{z}$ 时,与情形i)类似,略。

iii) 当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{z}$ 并且 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{z}$ 时。由(5)式以及条件C得:

$$f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{z})+\langle\xi,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\rangle=f(\boldsymbol{z})+(1-\lambda)\langle\xi,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle,\ \forall\xi\in\partial^c f(\boldsymbol{z}),\tag{9}$$

$$f(\boldsymbol{y})>f(\boldsymbol{z})+\langle\zeta,\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\rangle=f(\boldsymbol{z})-\lambda\langle\zeta,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle,\ \forall\zeta\in\partial^c f(\boldsymbol{z})。\tag{10}$$

对于 $\xi\in\partial^c f(\boldsymbol{z})$,用 $\lambda,1-\lambda$ 分别乘以(9)式和(10)式,再相加得:

$$\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})>f(\boldsymbol{z})+\lambda(1-\lambda)\langle\xi,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle-\lambda(1-\lambda)\langle\xi,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle=f(\boldsymbol{z})=f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))。$$

综上可得，f 在 K 上关于 η 是严格预不变凸函数。

2）设 f 在 K 上关于 η 是严格预不变凸函数，任取 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，下面分两种情况讨论。

i）若 $\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$，因为 f 是严格预不变凸函数，则 $f(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))<\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})$，$\forall\lambda\in(0,1)$。从而，$0<\lambda[f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})]$，$\forall\lambda\in(0,1)$。所以，$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})>0=\langle\xi,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle$，$\forall\xi\in\partial^c f(\boldsymbol{y})$。

ii）若 $\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq 0$，于是 $\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq\boldsymbol{y}$，$\forall\lambda\in(0,1)$。因为 f 是严格预不变凸函数，则：

$$f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))<\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y}),\ \forall\lambda\in(0,1)。$$

从而，

$$\frac{f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))-f(\boldsymbol{y})}{\lambda}<f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y}),\ \forall\lambda\in(0,1)。\tag{11}$$

由于 f 在 K 上是局部 Lipschitz 的，则存在 $\theta\in(0,1)$ 及包含线段 $[\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}]$（$\forall\lambda\in(0,\theta)$）的开集 S 使得 f 在 S 上是局部 Lipschitz 的。于是由 Lebourg 中值定理（定理2），$\forall\lambda\in(0,\theta)$，$\exists\boldsymbol{z}_\lambda\in[\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y})$，s. t. $f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\in\langle\partial^c f(\boldsymbol{z}_\lambda),\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\rangle$。则 $\exists\xi_\lambda\in\partial^c f(\boldsymbol{z}_\lambda)$，s. t.

$$f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\langle\xi_\lambda,\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\rangle=-\lambda\langle\xi_\lambda,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle。$$

所以，

$$f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))-f(\boldsymbol{y})=\lambda\langle\xi_\lambda,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle。\tag{12}$$

由(11)式和(12)式得：

$$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})>\frac{f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))-f(\boldsymbol{y})}{\lambda}=\langle\xi_\lambda,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle,\ \forall\lambda\in(0,\theta)。\tag{13}$$

由于 $\partial^c f(\boldsymbol{z}_\lambda)$ 是 X^* 中的非空弱 * 紧凸集，则序列 $\{\xi_\lambda\}$ 是弱 * 收敛的，设序列 $\{\xi_\lambda\}$ 的弱 * 接触点为 ξ。注意到 $\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\boldsymbol{z}_\lambda=\boldsymbol{y}$，于是由引理1得 $\xi\in\partial^c f(\boldsymbol{y})$。所以，在(13)式中取 $\lambda\downarrow 0$ 的极限得 $f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\geqslant\langle\xi,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle$。

综上可得，$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\exists\xi\in\partial^c f(\boldsymbol{y})$，s. t. $f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\geqslant\langle\xi,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle$，故 f 是 Clarke 弱不变凸的。

3）证明参见文献[8]的引理3.3。 证毕

可微情形的严格预不变凸函数的刻画已由文献[15]的定理5.3.13获得，即下述命题。

命题 5[15] 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 η 的开不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 是一个实值可微函数。

1）若 f 在 K 上关于 η 是严格不变凸函数，且 η 满足条件C，则 f 在 K 上关于相同的 η 是严格预不变凸函数。

2）若 f 在 K 上关于 η 是严格预不变凸函数，则 f 在 K 上关于相同的 η 是严格不变凸函数，即：

$$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y},\ \text{s. t. } f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{y})+\nabla f(\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})。\tag{14}$$

接下来，讨论 ρ-预不变凸函数的一阶刻画。与前面的 Clarke 严格预不变凸情形类似，虽然文献[8]的引理3.2与引理3.3已经讨论过了，但还是有必要讨论一下情形2)。

定理 5 设 K 是关于 η 的开不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 是局部 Lipschitz 函数，实数 $\rho\neq 0$。

1）[8] 设 η 满足条件C，若 f 在 K 上关于 η 是 Clarke ρ-不变凸函数，即：

$$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\ \forall\xi\in\partial^c f(\boldsymbol{x}),\ \text{s. t. } f(\boldsymbol{y})\geqslant f(\boldsymbol{x})+\langle\xi,\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\rangle+\rho\|\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\|^2,$$

则 f 在 K 上关于相同的 η 是 ρ-预不变凸函数。

2）若 f 在 K 上关于 η 是 ρ-预不变凸函数，则 f 在 K 上关于相同的 η 是 Clarke 弱 ρ-不变凸函数，即：

$$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\ \exists\xi\in\partial^c f(\boldsymbol{x}),\ \text{s. t. } f(\boldsymbol{y})\geqslant f(\boldsymbol{x})+\langle\xi,\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\rangle+\rho\|\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\|^2。$$

3）[8] 若 f 在 K 上关于 η 是 ρ 预不变凸函数，且 η 关于第2个变量是连续的，则 f 在 K 上关于相同的 η 是 Clarke ρ-不变凸函数。

证明 1）参见文献[8]的引理3.2，不过条件D不需要。

2）设 f 在 K 上关于 η 是 ρ-预不变凸函数，任取 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，下面分两种情况讨论：

i）若 $\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$，因为 f 是 ρ-预不变凸函数，则：

$$f(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})-\rho\lambda(1-\lambda)\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2=$$
$$\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y}),\ \forall\lambda\in(0,1)。$$

从而，$0\leqslant\lambda[f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})]$，$\forall\lambda\in(0,1)$。所以，

$$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\geqslant 0=\langle\xi,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle+\rho\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2,\ \forall\xi\in\partial^c f(\boldsymbol{y})。$$

ii) 若 $\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq 0$，因为 f 是 ρ-预不变凸函数，则：

$$f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})-\rho\lambda(1-\lambda)\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2,\ \forall\lambda\in(0,1)。$$

从而，

$$\frac{f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))-f(\boldsymbol{y})}{\lambda}\leqslant f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})-\rho(1-\lambda)\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2,\ \forall\lambda\in(0,1)。\tag{15}$$

与定理4的证明相似，由 f 的局部 Lipschitz 性质与 Lebourg 中值定理得：

$$\exists\theta\in(0,1),\ \forall\lambda\in(0,\theta),\ \exists\boldsymbol{z}_\lambda\in[\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}),\ \exists\xi_\lambda\in\partial^c f(\boldsymbol{z}_\lambda),\ \text{s.t. }(12)\text{式成立},$$

即 $f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))-f(\boldsymbol{y})=\lambda\langle\xi_\lambda,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle$。再结合(15)式得：

$$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})-\rho(1-\lambda)\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2\geqslant\frac{f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))-f(\boldsymbol{y})}{\lambda}=\langle\xi_\lambda,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle,\ \forall\lambda\in(0,\theta)。\tag{16}$$

同样的，设序列 $\{\xi_\lambda\}$ 的弱 * 接触点为 ξ。注意到 $\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\boldsymbol{z}_\lambda=\boldsymbol{y}$，于是由引理1得 $\xi\in\partial^c f(\boldsymbol{y})$。在(16)式中取 $\lambda\downarrow 0$ 的极限得 $f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\geqslant\langle\xi,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle+\rho\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2$。

综上可得，$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\exists\xi\in\partial^c f(\boldsymbol{y})$，s.t. $f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\geqslant\langle\xi,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle+\rho\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2$。

3) 参见文献[8]的引理3.3。 证毕

当 f 为可微函数时，由定理5可以得到 ρ-预不变凸函数的一阶刻画。

命题6 设 K 是关于 η 的开不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 是一个可微实值函数，实数 $\rho\neq 0$。

1) 设 η 满足条件C，f 在 K 上关于 η 是 ρ-不变凸函数，则 f 在 K 上关于相同的 η 是 ρ-预不变凸函数。

2) 若 f 在 K 上关于 η 是 ρ-预不变凸函数，则 f 在 K 上关于相同的 η 是 ρ-不变凸函数，即：

$$f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{y})+\nabla f(\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\rho\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2,\ \forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K。\tag{17}$$

当 $\rho>0$ 时，命题6恰好是文献[7]的定理3与定理4所获得的强预不变凸函数与强不变凸函数的关系。在命题6中取 $\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$，就可以得到可微 ρ-凸函数的一阶刻画。特别地，当 $\rho>0$ 时，恰好就是文献[18]得到的可微强凸函数的刻画。

3 可微预不变凸性的二阶刻画

若无特说明的话，本节均假设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是非空子集，$\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是一个给定的向量值映射。

关于二次可微的预不变凸函数，文献[12]已经给出了它的一个二阶刻画，即引言中的定理1。现在给出定理1的另一个证明，这个证明基于可微预不变凸函数的一阶刻画结论(即命题1)。

证明(定理1) 必要性。设 f 在 K 上关于 η 是预不变凸函数。任意取定 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，若 $\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$，则结论显然成立，故只需证明 $\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq 0$ 的情形。由于 K 是关于 η 的不变凸集，则 $\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in K$，$\forall\lambda\in(0,1]$。由命题1以及性质2得：

$$f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\geqslant f(\boldsymbol{y})+\nabla f(\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{y})+\lambda\nabla f(\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \forall\lambda\in(0,1]。\tag{18}$$

由于 f 在 K 上是二次连续可微的，对于 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 而言有：

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=&f(\boldsymbol{y})+\nabla f(\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\boldsymbol{y}]+\\&\frac{1}{2}[\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\boldsymbol{y}]^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{y})[\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\boldsymbol{y}]+\|\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\boldsymbol{y}\|^2\alpha(\boldsymbol{y};\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\boldsymbol{y})=\\&f(\boldsymbol{y})+\lambda\nabla f(\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\frac{1}{2}\lambda^2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\lambda^2\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2\alpha(\boldsymbol{y};\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})),\ \forall\lambda\in(0,1]。\end{aligned}\tag{19}$$

其中，

$$\lim_{\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\to\boldsymbol{y}}\alpha(\boldsymbol{y};\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\boldsymbol{y})=0。$$

由 $\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\to\boldsymbol{y}$ 知 $\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\to 0$。由于 $\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq 0$，从而有 $\lambda\downarrow 0$。反过来，当 $\lambda\downarrow 0$ 时，有 $\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\to 0$，进而有 $\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\to\boldsymbol{y}$。于是 $\lambda\downarrow 0$ 等价于 $\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\to\boldsymbol{y}$。从而有：

$$\lim_{\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\to\boldsymbol{y}}\alpha(\boldsymbol{y};\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\boldsymbol{y})=\lim_{\lambda\downarrow 0}\alpha(\boldsymbol{y};\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=0。\tag{20}$$

由(18)，(19)式得$\frac{1}{2}\lambda^2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\lambda^2\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2\alpha(\boldsymbol{y};\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\geqslant 0,\forall\lambda\in(0,1]$。于是，

$$\frac{1}{2}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2\alpha(\boldsymbol{y};\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\geqslant 0,\forall\lambda\in(0,1]。\tag{21}$$

在(21)式中取$\lambda\downarrow 0$的极限，结合(20)式得$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0$。

综上可得，$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0$。

充分性。取$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，假设：

$$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0。\tag{22}$$

由于f在K上是二次连续可微的，结合(19)式与(22)式，由二阶 Taylor 定理(定理 3)，并使用条件 C 与条件 D 得，存在$\tilde{\lambda}\in(0,1)$使得$\boldsymbol{y}+\tilde{\lambda}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in K$且：

$$\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{y}+\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=f(\boldsymbol{y})+\nabla f(\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\frac{1}{2}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{y}+\tilde{\lambda}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\\
&f(\boldsymbol{y})+\nabla f(\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\tilde{\lambda}}\right)\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\tilde{\lambda}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{y}+\tilde{\lambda}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\left(-\frac{1}{\tilde{\lambda}}\right)\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\tilde{\lambda}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\\
&f(\boldsymbol{y})+\nabla f(\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\frac{1}{2\tilde{\lambda}^2}\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\tilde{\lambda}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{y}+\tilde{\lambda}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\tilde{\lambda}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\geqslant f(\boldsymbol{y})+\nabla f(\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})。
\end{aligned}\tag{23}$$

由$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$的任意性，得到命题 1 中的(1)式。所以，$f$在$K$上关于$\eta$是预不变凸函数。　　证毕

下面，讨论严格预不变凸函数的二阶刻画，这个结论需要借助命题 5 来获得。

定理 6　设$K\subseteq\mathbf{R}^n$是关于η的开不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$是二次连续可微的实值函数。假设η满足条件 C，f在K上关于η满足条件 D。当$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$时$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq 0$。若：

$$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y},\ \text{s.t.}\ \eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})>0。\tag{24}$$

则f在K上关于相同的η是严格预不变凸函数。

证明　任取$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$，假设(24)式成立。由已知得$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq 0$，从而$\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq\boldsymbol{y}$，$\forall\lambda\neq 0$。由于$f$在$K$上是二次连续可微的，参照定理 1 的充分性的证明，由二阶 Taylor 定理(定理 3)得，存在$\tilde{\lambda}\in(0,1)$使得$\boldsymbol{y}+\tilde{\lambda}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in K$且使得(23)式成立，再结合(24)式得：

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{y})+\nabla f(\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\frac{1}{2\tilde{\lambda}^2}\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\tilde{\lambda}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{y}+\tilde{\lambda}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\tilde{\lambda}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))>\\
f(\boldsymbol{y})+\nabla f(\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})。
\end{aligned}$$

由$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$的任意性，得到命题 5 中的(15)式，所以$f$在$K$上关于$\eta$是严格不变凸函数。　　证毕

最后，讨论可微的ρ-预不变凸函数的二阶刻画，这个结论需要借助可微ρ-预不变凸函数的一阶刻画(即命题 6)来获得。

定理 7　设$K\subseteq\mathbf{R}^n$是关于η的开不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$是二次连续可微的实值函数，实数$\rho\neq 0$。如果η满足条件 C，f在K上关于η满足条件 D，则f在K上关于相同的η是ρ-预不变凸函数等价于：

$$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}[\nabla^2 f(\boldsymbol{y})-2\rho\boldsymbol{I}]\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0,\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,$$

其中$\boldsymbol{I}$表示单位矩阵。

证明　必要性。设f在K上关于η是ρ-预不变凸函数。任取$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，若$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$，则结论显然成立，故只需证明$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq 0$的情形。由于$K$是关于$\eta$的不变凸集，则$\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in K$，$\forall\lambda\in(0,1]$。由命题 6 以及条件 C 得：

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\geqslant f(\boldsymbol{y})+\nabla f(\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y})+\rho\|\eta(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y})\|^2=\\
f(\boldsymbol{y})+\lambda\nabla f(\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\rho\lambda^2\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2,\ \forall\lambda\in(0,1]
\end{aligned}\tag{25}$$

由于f在K上是二次连续可微的，类似于定理 1 的证明，同样有(19)，(20)式成立，再结合(25)式可得：

$$\frac{1}{2}\lambda^2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\lambda^2\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2\alpha(\boldsymbol{y};\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\geqslant\rho\lambda^2\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2,\ \forall\lambda\in(0,1]。$$

注意到$\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\alpha(\boldsymbol{y};\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=0$。于是，

$$\frac{1}{2}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2\alpha(\boldsymbol{y};\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\geqslant\rho\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2,\ \forall\lambda\in(0,1]。\tag{26}$$

在(26)式中取 $\lambda\downarrow 0$ 的极限得 $\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 2\rho\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2=2\rho\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$。

综上可得，$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}[\nabla^2 f(\boldsymbol{y})-2\rho\boldsymbol{I}]\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0$。

充分性。取 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，假设 $\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}[\nabla^2 f(\boldsymbol{y})-2\rho\boldsymbol{I}]\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0$，即有：

$$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 2\rho\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2。\tag{27}$$

由于 f 在 K 上是二次连续可微的，参照定理 1 的充分性的证明，由二阶 Taylor 定理(定理 3)得，存在$\tilde{\lambda}\in(0,1)$，使得 $\boldsymbol{y}+\tilde{\lambda}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in K$ 且使得(23)式成立，再结合(27)式得：

$$f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{y})+\nabla f(\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\frac{1}{2\tilde{\lambda}^2}\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\tilde{\lambda}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{y}+\tilde{\lambda}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\tilde{\lambda}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\geqslant$$

$$f(\boldsymbol{y})+\nabla f(\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\frac{1}{2\tilde{\lambda}^2}2\rho\|\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\tilde{\lambda}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\|^2=f(\boldsymbol{y})+\nabla f(\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\rho\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2。$$

由 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$ 的任意性，得到命题 6 中的(17)式，所以 f 在 K 上关于 η 是 ρ-预不变凸函数。　　证毕

4 结语

本文利用 Lebourg 中值定理以及二阶 Taylor 定理，得到了预不变凸性的一阶与二阶刻画。其中，一阶刻画结论表明，预不变凸性和不变凸性之间有着密切的联系。结论可大致表述为(当条件 C 成立时)：不可微情形时，Clarke 不变凸性→预不变凸性→弱 Clarke 不变凸性；可微情形时(Clarke 不变凸性就是通常所说的不变凸性)，预不变凸性↔不变凸性。原因在于，当函数为局部 Lipschitz 但是不可微时，其 Clarke 次梯度不唯一，所以出现了预不变凸性和不变凸性的不对等情况；当函数可微的时候，由于此时具有唯一的(次)梯度，所以可获得两类函数的等价性。所以，寻找不可微情形时两类函数的等价条件值得进一步研究。

参考文献：

[1] HANSON M A. On sufficiency of the Kuhn-Tucher conditions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1981，80：545-550.

[2] CRAVEN B D. Invex functions and constrained local minima[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society，1981，24：357-366.

[3] BEN-ISRAEL A，MOND B. What is invexity? [J]. Journal of the Australian Mathematical Society，Series B，1986，28：1-9.

[4] WEIR T，MOND B. Pre-invex functions in multiple objective optimization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1988，136(1)：29-38..

[5] MOHAN S R，NEOGY S K. On invex sets and preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1995，189：901-908.

[6] YANG X M，Li D. Semistrictly preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2001，258(1)：287-308.

[7] 颜丽佳，刘芙萍. 强预不变凸函数[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2005，22(1)：11-15.
YAN L J，LIU F P. Strongly preinvex functions[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)，2005，22(1)：11-15.

[8] JABAROOTIAN T，ZAFARANI J. Generalized invariant monotonicity and invexity of non-differentiable functions[J]. Journal of Global Optimization，2006，36(4)：537-564.

[9] 刘彩平. 半严格不变凸函数[J]. 运筹学学报，2007，11(4)：85-92.
LIU C P. Semistrictly invex functions[J]. OR Transactions，2007，11(4)：85-92.

[10] 刘彩平. 非光滑函数的半严格拟不变凸性[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2007，24(3)：1-3.
LIU C P. Semistrictly quasi-Invexity of nonsmooth functions[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)，2007，24(3)：1-3.

[11] SOLEIMANI-DAMANEH M. Characterizations and applications of generalized invexity and monotonicity in Asplund spaces[J]. Top，2012，20(3)：592-613.

[12] 赵克全. 预不变凸函数的一个等价条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2010，27(3)：6-8.
ZHAO K Q. An equivalent condition of preinvex function [J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural

Science),2010,27(3):6-8.

[13] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Characterizations and applications of prequasi-invex functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2001,110(3):645-668.

[14] YANG X M. A note on preinvexity[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2014, 10(4): 1319-1321.

[15] 杨新民,戎卫东. 广义凸性及其应用[M]. 北京:科学出版社,2016.
YANG X M, RONG W D. Generalized convexity and its application[M]. Beijing:Science Press,2016.

[16] CLARKE F H. Optimization and nonsmooth analysis [M]. Philadelphia: Society for Industrialand Applied Mathematics,1990.

[17] AVRIEL M,DIEWERT W E,SCHAIBLE S,et al. Generalized concavity[M]. New York:Plenum Press,1988.

[18] BAZARAA M S,SHERALI H D,SHETTY C M. Nonlinear programming:theory and algorithms[M]. New York: John Wiley & Sons,1993.

[19] MANGASARIAN O L. Nonlinear programming [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics,1994.

[20] RUIZ-GARZÓN G,OSUNA-GÓMEZ R,RUFIÁN-LIZANA A. Generalized invex monotonicity[J]. European Journal of Operational Research,2003,144(3):501-512.

Operations Research and Cybernetics

First Order and Second Order Characterizations of Preinvexity

YANG Yuhong

(School of Mathematics and Statistics, Yangtze Normal University, Chongqing 408100, China)

Abstract: [**Purposes**]The purpose is to provide provide some first order and second order characterizations of preinvexity for real valued functions. [**Methods**] It makes use of Lebourg Mean Value Theorem and Second Order Taylor Theorem. [**Findings**] Firstly, first order characterizations of nondifferentiable strictly preinvex functions and ρ-preinvex functions are got. Then, owing to the first order results already got, some second order characterizations of these functions are obtained. [**Conclusions**] These characterizations show that there is close connection between preinvexity and invexity in differentiable and nonsmooth case.

Keywords: preinvex; strictly preinvex; ρ-preinvex; condition C

(责任编辑　黄　颖)