DOI:10.11721/cqnuj20180524

E-模糊 Clifford 半群*

董 丽,孔祥智
(江南大学 理学院,江苏 无锡 214122)

摘要:【目的】为研究大量不建立在统计基础上的不确定数学问题建立更好的数学工具。【方法】将模糊集与半群代数相结合并从一个全新的角度将最接近群定义的 Clifford 半群模糊化。即从模糊关系的角度研究 E-模糊 Clifford 半群。【结果】有效地将模糊关系与 Clifford 半群联系起来,并结合模糊关系的可离性进一步给出可离 E-模糊 Clifford 半群的概念及相关代数性质。【结论】E-模糊 Clifford 半群作为模糊代数的一个全新的扩充,不但能从一个全新的角度研究半群代数理论,也为解决模糊数学的应用问题提供了一个新的思路。

关键词: Clifford 半群;E-模糊集;模糊关系;E-模糊 Clifford 半群

中图分类号:O159 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2018)05-0079-04

Zadeh 在 1965 年引入一个全新的数学概念——模糊集[1],并介绍了模糊集的各种代数运算及性质。随后模糊集的理论及应用研究成为数学、计算机、经济和社会等众多领域的研究热点并获得丰富的研究成果[2-3]。关于模糊集与各类代数结构结合的研究成果,如模糊群、模糊格等特别丰富[4-8]。

半群代数作为一种群结构的弱化,因为它对二元运算仅要求结合律成立,故应用范围比群要广泛得多,尤其是在组合数学、计算机科学等领域,半群代数理论的研究方法与群的研究方法有很大区别,获得的研究成果也非常的丰富多样[9-11]。本文试图将模糊集与半群代数相结合并从一个全新的角度将最接近群定义的著名半群——Clifford 半群模糊化。即从模糊等式的角度研究 E-模糊 Clifford 半群,目前这一类的研究还不多见。

E-模糊 Clifford 半群作为模糊代数的一个全新的扩充,不但能从一个全新的角度研究半群代数理论,也为解决模糊数学的应用问题提供了一个新的思路。在处理大多现实问题中由于信息的不确定性和模糊性导致难度加大,模糊集及其扩充相继被提出后,为这类问题的解决提供了一个新的方向,然而这些工具仍有其局限之处。所以寻求这些现实问题的更优的求解,需要不断地建立更好的工具。E-模糊代数及其扩充可以被应用于诸多领域,如决策分析、聚类、模式识别等。这些新的工具,对很多以前无法解决的现实问题,开辟了一个新的方向。

1 预备知识

定义 1[8] 设 U 为论域,映射 $A:U\to[0,1]$ 称为 U 的一个模糊子集,简称为 F 集,映射 A 称为 F 集 A 的隶属函数,$A(x)$ 称为 x 关于 A 的隶属度。论域 U 上的所有 F 集记为 $F(U)$。这里的 F 集 $A=\{(x,A(x))\mid x\in U\}$。

定义 2[8] 设 U,V 为两个论域,隶属函数 $R:U\times V\to[0,1]$,R 为 U 到 V 的一个模糊关系,简称为 F 关系,记为 R,即 $R\in F(U\times V)$。对 $(x,y)\in U\times V$,称 $R(x,y)$ 为 x 对 y 具有关系 R 的相关程度。特别地,若 $U=V$,即 $R:U\times U\to[0,1]$,称 R 为 U 上的(二元)F 关系。

定义 3[8] 设 $R\in F(U\times U)$,$r\in F(U)$,若 $\forall x,y\in U$,有 $R(x,y)\leqslant r(x)\wedge r(y)$,则称 R 为 r 上的模糊关系。若 R 满足:

1) R 是弱 F 自反,即 $\forall x,y\in U$,$R(x,y)\leqslant r(x,x)$ 且 $R(x,x)=r(x)$;

2) R 是 F 对称,即 $\forall x,y\in U$,$R(x,y)=R(y,x)$;

3) R 是 F 传递,即 $\forall x,y,z\in U$,$R(x,y)\wedge R(y,z)\leqslant R(x,z)$,(“$\wedge$”表示取下确界);

* **收稿日期:**2017-09-05 **修回日期:**2018-09-11 **网络出版时间:**2018-09-26 13:25

资助项目:国家自然科学基金(No. 11371174;No. 11301227);江苏省自然科学基金(No. BK20130119)

第一作者简介:董丽,女,研究方向为模糊代数,E-mail:dongli1594@163.com;**通信作者:**孔祥智,男,教授,博士,E-mail:xiangzhikong@jiangnan.edu.cn

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180926.1325.002.html

称 R 为 U 上的弱模糊等价关系,简称弱F等价关系,记为 R,即 $R\in E(U\times U)$。

若 $R\in E(U\times U)$,则有 $\forall x,y\in U,R(x,y)\leqslant r(x)\wedge r(y)$ 成立,称 R 具有严格性。若 R 满足:$R(x,y)=R(x,x)=R(y,y)\Rightarrow x=y$,称 R 具有可离性。

定义4[3] 若 $R\in E(U\times U)$,令 $(U,R)=\{R(x,y)\mid\forall x,y\in U\}$,则称 (U,R) 为E-模糊集(E-仅代表模糊结构,即弱F等价关系)。特别地,若 R 满足可离性,称 (U,R) 为可离E-模糊集。

例1 设 A 为非空集合,L 为有界集,映射 $E:A\times A\to L,\forall a,b\in A,E(a,b)=\min\{a,b\}$。

不难证明 E 为弱F等价关系且满足可离性,故 (A,E) 为可离E-模糊集。

定义5[12] 设 S 为非空集合且具有二元运算$(\cdot)$,若二元运算满足结合律,即 $\forall a,b,c\in S,(ab)c=a(bc)$,称 S 为半群。若半群 S 还具有一元运算$(^{-1})$且满足:1) $(a^{-1})^{-1}=a$;2) $aa^{-1}a=a$;3) $aa^{-1}=a^{-1}a$;4) $(aa^{-1})(bb^{-1})=(bb^{-1})(aa^{-1})$。称 S 为Clifford半群。

引理1[12] 设 S 为半群,下面几个条件等价:1) S 是Clifford半群;2) S 是群的半格;3) S 是群的强半格;4) S 是正则的且 S 的幂等元是中心幂等元。

这里的Clifford半群 $S=[Y,S_\alpha,\varphi_{\alpha,\beta}]$,其中 Y 为半格,S_α 为 S 的非交子群,并记子群 S_α 的单位元为 $a^0(\forall a\in S_\alpha)$。易知 $\alpha,\beta\in Y,\alpha\geqslant\beta,\varphi_{\alpha,\beta}:S_\alpha\to S_\beta$ 为同态映射且对 $a\in S_\gamma,b\in S_\delta,ab=(a\varphi_{\gamma,\gamma\delta})(b\varphi_{\delta,\gamma\delta})$。

定义6 若 μ 为Clifford半群 S 的模糊集且对任意的 $a,b\in S$,有:1) $\mu(ab)\geqslant\mu(a)\wedge\mu(b)$;2) $\mu(a^{-1})\geqslant\mu(a)$;3) $(\forall\alpha\in Y)\mu(a^0)=1$。则称 S 为模糊Clifford半群。

类似地,若对 S 上的弱F等价关系 R 有:1) $R(a_1\cdots a_n,b_1\cdots b_n)\geqslant\wedge\{R(a_i,b_i)\mid i=1,2,\cdots n\}$;2) $R((a_1\cdots a_n)^{-1},(a_1\cdots a_n)^{-1})\geqslant R(a_1\cdots a_n,a_1\cdots a_n)$;3) $R(a^0,a^0)=1$。则称 R 与 S 的运算是相容的,即 S 为模糊Clifford半群。

2 主要结果及证明

本节给出E-模糊Clifford半群的定义及其判定条件,将模糊等式的可离性与其相结合,从而把弱F等价关系与论域中的元素间关系联系起来进而得到一系列方便有效的结论,为研究模糊数学问题[13-16]提供思路。

定义7 设 S 为具有一个二元运算$(\cdot)$及两个一元运算$(^{-1})$,$(^0)$的代数结构,令 $S_R=(S,\cdot,^0,^{-1},R)$,其中 R 为 S 上的弱F等价关系。Clifford半群显然也是这样一个代数结构,但这里不要求 S 为Clifford半群。若 $\forall x,y,z\in S$ 有:1) $R(x\cdot(y\cdot z),(x\cdot y)\cdot z)\geqslant r(x)\wedge r(y)\wedge r(z)$;2) $R(xx^0,x)\geqslant r(x)$ 且 $R(x^0x,x)\geqslant r(x)$;3) $R(xx^{-1},x^0)\geqslant r(x)$ 且 $R(x^{-1}x,x^0)\geqslant r(x)$。称 S_R 为E-模糊Clifford半群。若 R 满足可离性,则称 S_R 为可离E-模糊Clifford半群。若 $\forall x\in S,R(x\cdot x,x)\geqslant r(x)$,称 x 为 S_R 的中心。

引理2 若 S_R 为E-模糊Clifford半群当且仅当下列条件成立:1) $R(x\cdot(y\cdot z),(x\cdot y)\cdot z)\geqslant r(x)\wedge r(y)\wedge r(z)$;2) $R(xx^0,x)\geqslant r(x)$;3) $R(xx^{-1},x^0)\geqslant r(x)$。

证明 由定义7知,必要性成立。下证充分性。

首先证明 $R(x^{-1}x,x^0)\geqslant r(x)$:$R((x^{-1}x)x^0,x^{-1}x)\geqslant r(x^{-1}x)\geqslant r(x^{-1})\wedge r(x)=r(x)$。由对称性知,$R(x^{-1}x,(x^{-1}x)x^0)=R((x^{-1}x)x^0,x^{-1}x)\geqslant r(x)$;又由相容性知:

$$R((x^{-1}x)x^0,(x^{-1}x)(x^{-1}(x^{-1})^{-1}))\geqslant R(x^{-1}x,x^{-1}x)\wedge R(x^0,x^{-1}(x^{-1})^{-1})\geqslant r(x^{-1}x)\wedge r(x^{-1})\geqslant r(x);$$

下面结合 ρ 的传递性,相容性以及引理2知:

$$\begin{gathered}R((x^{-1}x)(x^{-1}(x^{-1})^{-1}),x^{-1}((xx^{-1})(x^{-1})^{-1}))\geqslant\\ R((x^{-1}x)(x^{-1}(x^{-1})^{-1}),x^{-1}((xx^{-1}(x^{-1})^{-1})))\wedge R(x^{-1}(x(x^{-1}(x^{-1})^{-1})),x^{-1}((xx^{-1})(x^{-1})^{-1}))\geqslant\\ r(x^{-1})\wedge r(x)\wedge r(x^{-1}(x^{-1})^{-1})\wedge R(x^{-1},x)\wedge R(x(x^{-1}(x^{-1})^{-1}),(xx^{-1})(x^{-1})^{-1})\geqslant\\ r(x^{-1})\wedge r(x)\wedge r((x^{-1})^{-1})=r(x)。\end{gathered}$$

显然 $R(x^{-1}((xx^{-1})(x^{-1})^{-1}),(x^{-1}(xx^{-1}))(x^{-1})^{-1})\geqslant r(x^{-1})\wedge r(xx^{-1})\wedge r((x^{-1})^{-1}))\geqslant r(x)$。由相容性知:

$$\begin{gathered}R((x^{-1}(xx^{-1}))(x^{-1})^{-1},(x^{-1}x^0(x^{-1})^{-1})\geqslant R(x^{-1}(xx^{-1}),x^{-1}x^0)\wedge R((x^{-1})^{-1},(x^{-1})^{-1})\geqslant\\ R(x^{-1},x^{-1})\wedge R(xx^{-1},x^0)\wedge r((x^{-1})^{-1})\geqslant r(x^{-1})\wedge r(x)\wedge r((x^{-1})^{-1})=r(x)。\end{gathered}$$

再结合相容性,有:

$$R(x^{-1}x^0(x^{-1})^{-1},x^{-1}(x^{-1})^{-1})\geqslant R(x^{-1}x^0,x^{-1})\wedge R((x^{-1})^{-1},(x^{-1})^{-1})\geqslant r(x^{-1})\wedge r((x^{-1})^{-1})\geqslant r(x)。$$

而 $R(x^{-1}(x^{-1})^{-1},x^0)\geqslant r((x^{-1})^{-1})\geqslant r(x^{-1})\geqslant r(x)$。

最后结合传递性，$R(x^{-1}x,x^0)\geqslant r(x)$。

下面类似可证 $R(x^0x,x)\geqslant r(x)$。

$R(x^0x,(xx^{-1})x)\geqslant R(x^0,xx^{-1})\wedge R(x,x)\geqslant r(x)\wedge r(x)=r(x)$，

$R((xx^{-1})x,xx^0)\geqslant R((xx^{-1})x,x(x^{-1}x))\wedge R(x(x^{-1}x),xx^0)\geqslant$

$r(x)\wedge r(x^{-1})\wedge R(x,x)\wedge R(x^{-1}x,x^0)\geqslant r(x)\wedge r(x^{-1})=r(x)$。

则有 $R(xx^0,x)\geqslant r(x)$。因此，$R(x^0x,x)\geqslant r(x)$。从而，S_R 为 E-模糊 Clifford 半群。　证毕

例 2　设代数 $S=(\{a,b,c,1\};\cdot;^{-1};^0)$ 二元运算（$\cdot$），两个一元运算（$^{-1}$），（^{0}）运算模糊关系 $R:S\times S\to[0,1]$的定义分别见表 1、表 2 及表 3。

表 1　二元运算

Tab. 1　Binary operation

$\cdot$	a	b	c	1
a	1	b	a	a
b	b	1	b	b
c	a	b	1	c
1	a	b	c	1

表 2　两个一元运算

Tab. 2　Unay operation

	a	b	c	1
$^{-1}$	a	b	c	1
^{0}	1	1	1	1

表 3　模糊关系

Tab. 3　Fuzzy relation

R	1	a	b	c
1	1	0.6	0.4	0.8
a	0.6	0.8	0.4	0.6
b	0.4	0.4	0.6	0.4
c	0.8	0.6	0.4	1

显然 R 满足对称性，传递性，故 R 是 S 的弱 F 等价关系。因此，R 诱导的模糊集 r 满足矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & b & c\\ 1 & 0.8 & 0.6 & 1\end{pmatrix}$，且对任意的 $x,y\in\{1,a,b,c\}$，有：1）$r(x\cdot y)\geqslant r(x)\wedge r(y)$；2）$r(x^{-1})\geqslant r(x)$；3）$r(x^0)=1$。再结合引理 2 的 3 条判定条件，可以发现 S 是 E-模糊 Clifford 半群。

定理 1　设 S_R 是可离 E-模糊 Clifford 半群，则：1）$x\cdot x^0=x^0\cdot x=x$；2）$(x^{-1})^{-1}=x$。

证明　1）S_R 为可离 E-模糊 Clifford 半群，故 $R(xx^0,x)\geqslant r(x)$，又由严格性知 $R(xx^0,x)\leqslant r(xx^0)\wedge r(x)\leqslant r(x)$。所以 $R(xx^0,x)=r(x)$。再由可离性知 $x\cdot x^0=x$。同理可得 $x^0\cdot x=x$。因此，$x\cdot x^0=x^0\cdot x=x$。

2）要证$(x^{-1})^{-1}=x$，即证明 $R(x,(x^{-1})^{-1})=r(x)$。由引理 2 可知：

$$R(x,xx^0)\geqslant r(x);$$

$$R(xx^0,x(x^{-1}(x^{-1})^{-1}))\geqslant R(x,x)\wedge R(x^0,(x^{-1})^{-1})\geqslant r(x)\wedge r(x^{-1})=r(x);$$

$$R(x(x^{-1}(x^{-1})^{-1}),(xx^{-1})(x^{-1})^{-1})\geqslant r(x)\wedge r(x^{-1})\wedge r((x^{-1})^{-1})=r(x);$$

$$R((xx^{-1})(x^{-1})^{-1},x^0(x^{-1})^{-1})\geqslant R(xx^{-1},x^0)\wedge R((x^{-1})^{-1},(x^{-1})^{-1})\geqslant r(x)\wedge r(x^{-1})^{-1}=r(x);$$

$$R(x^0(x^{-1})^{-1},(x^{-1})^{-1})\geqslant r((x^{-1})^{-1})\geqslant r(x)。$$

由传递性可知，$R(x,(x^{-1})^{-1})\geqslant r(x)$，又由严格性知 $R(x,(x^{-1})^{-1})\leqslant r(x)\wedge r((x^{-1})^{-1})\leqslant r(x)$，有 $R(x,(x^{-1})^{-1})=r(x)$，故$(x^{-1})^{-1}=x$。　证毕

定理 2　设 S_R 是可离 E-模糊 Clifford 半群，$\forall x\in S$ 是幂等的，即 $x^2=x$ 的充要条件是 x 为 S_R 的中心。

证明　先证充分性。设 $\forall x\in S$ 且为 S_R 的中心，则 $R(x^2,x)\geqslant r(x)$，又由 R 的严格性知 $R(x^2,x)\leqslant r(x)$，故 $R(x^2,x)=r(x)=r(x,x)$，结合可离性可得 $x^2=x$。

再证必要性。如果 $\forall x\in S$ 有 $x^2=x$，那么 $R(x,x^2)=r(x)$，故 x 为 S 的中心。　证毕

推论 1　设 S_R 是可离 E-模糊 Clifford 半群，$x,s(x)\in S$ 且 $s(x)$仅与 x 有关，若有弱 F 等价关系 $R(x,s(x))\geqslant r(x)$当且仅当代数 S 中有 $s(x)=x$。

证明　充分性。若 $x,s(x)\in S$ 且 $s(x)=x$，则有 $R(s(x),x)=r(x)$。显然，弱 F 等价关系 $R(s(x),x)\geqslant r(x)$。

必要性。若 $\forall x\in S$ 有 $R(s(x),x)\geqslant r(x)$，结合弱 F 等价关系严格性知 $R(s(x),x)=r(x)$，则 $s(x)=x$。

证毕

定理 3　设 S_R 是可离 E-模糊 Clifford 半群，则 $\forall x\in S$，有 $r(x)=r(x^{-1})$。

证明　由于 $r(x)\leqslant r(x^{-1})$，因此 $r(x)\leqslant r(x^{-1})\leqslant r((x^{-1})^{-1})=r(x)$。故 $r(x)=r(x^{-1})$。　证毕

定理 4　设 S_R 是可离 E-模糊 Clifford 半群，则$(x\cdot x^{-1})\cdot x=x$。

证明　由定理 1 的结论 1）及定义 6（相容性）有 $R((xx^{-1})x,x)=R((xx^{-1})x,x^0x)\geqslant R(xx^{-1},x^0)\wedge R(x,x)\geqslant r(x)$。再结合推论 1 有$(xx^{-1})x=x$。　证毕

4 总结

本文将模糊代数与半群代数相结合从弱 F 等价关系角度研究 Clifford 半群，给出了 E-模糊 Clifford 半群的

概念,研究了它的基本代数性质并获得一些有意义的结果,这些结果有助于进一步认识 E-模糊代数。

这一概念及性质也为研究决策分析、聚类、模糊识别等不建立在统计基础上的不确定数学现象,提供了很好的思路。此外,还可以用类似的方法研究逆半群、完全正则半群、环与半环等代数结构,不断丰富 E-模糊代数,这些将在后续工作中进行讨论。

参考文献:

[1] ZADEH L A. Fuzzy set[J]. Information and Control,1965,8:338-353.

[2] MESIAR E,ŠTĚPNIČKA M,ŠOSTAK A. Fuzzy sets:theory and applications[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2013, 232:1-2.

[3] HÖHLE U. Fuzzy sets and sheaves. Part I:basic concepts [J]. Fuzzy Sets Systems,2007,158:1143-1174.

[4] ANTHONY J M,SHERWOOD H. Fuzzy groups redefined [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1979,69:124-130.

[5] BĚLOHLÁVEK R. Birkhoff variety theorem and fuzzy logic [J]. Arch Math Log,2003,30:28-32.

[6] KURAOKAT,SUZUKIN Y. Lattice of fuzzy subalgebras in universal algebra[J]. Algebra Univers,2002,47:223-237.

[7] DI NOLA A,GERLA G. Lattice valued algebras[J]. Stoc hastica,1987,11:137-150.

[8] 陈水利,李敬功,王向公. 模糊集理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,2005.
CHEN S L,LI J G,WANG X G. Fuzzy set theory and its application[M]. Beijing:Science Press,2005.

[9] 宋换新,袁志玲,孔祥智. 软交 Clifford 半群[J]. 模糊系统与数学,2016,30(1):28-32.
SONG H X,YUAN Z L,KONG X Z. Soft intersection clifford semigroups[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2016,30(1):28-32.

[10] REN G B,CHEN L,WANG H Y. Split-quatern ionic her mitian clifford analysis[J]. Complex Variable Sand Elliptic Equations,2015,60:333-353.

[11] FU Y Y,ZHAO X Z,DU X K. The close subsemigroups of a clifford semigroup[J]. Communications in Mathematical Research,2014,30(2):97-105.

[12] HOWIE J M. Fundamentals of semigroup theory[M]. Oxford:Oxford University Press Inc,1995.

[13] BUDIMIROVIĆ B,BUDIMIROVIĆ V A,ŠEŠELIA B. E-fuzzy groups[J]. Fuzzy Sets and Systems,2016,289:94-112.

[14] BĚLOHLÁVEK R,VYCHODIL V. Algebras with fuzzy equalities[J]. Fuzzy Sets Systems,2006,157:161-201.

[15] MALIK D S,MORDESON J N. Fuzzy relations on ring s and groups[J]. Fuzzy Sets Systems,1991,43:117-123.

[16] TĂRNUCEANU M. A new equivalence relation to classify the fuzzy subgroups of finite groups[J]. Fuzzy Sets Systems,2016,285:113-121.

E-Fuzzy Clifford Semigroup

DONG Li, KONG Xiangzhi

(School of Science, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

Abstract: [**Purposes**]To establish a better mathematical tool for studying a large number of uncertain mathematical problems that are not based on statistics. [**Methods**]Combining fuzzy sets with semigroup algebras and blurring the famous semigroup—Clifford semigroup that is closest to group definition from a new perspective. Research on E-fuzzy Clifford semigroup from the perspective of fuzzy relation. [**Findings**] The fuzzy relation is connected with the Clifford semigroup, and the concept of the separable E-fuzzy Clifford semigroup and its related algebraic properties are further given by combining the separability of the fuzzy relation. [**Conclusions**] E-fuzzy Clifford semigroups as a new expansion of fuzzy algebra, not only from a new point to study semigroup algebra theory, but also to solve the application of fuzzy mathematics provides a new way of thinking.

Keywords: Clifford semigroup; E-fuzzy set; fuzzy relation; E-fuzzy Clifford semigroup

(责任编辑 许 甲)