DOI:10.11721/cqnuj20180520

# NA 随机变量随机和的差的精确大偏差*

华志强，张春生，陈丽莹，盛婷婷
(内蒙古民族大学 数学学院，内蒙古 通辽 028043)

**摘要:**【目的】研究由两类保单构成的随机和的差 $\sum_{j=1}^{N_1(t)}X_{1j}-\sum_{j=1}^{N_2(t)}X_{2j}$ 的相依风险模型，该风险模型中第一类保单$\{X_{1j},j\geqslant 1\}$是一个负相协(Nagatively associated, NA)随机变量序列，$\{X_{2j},j\geqslant 1\}$是一个独立的随机变量序列，$\{N_1(t),t\geqslant 0\}$和$\{N_2(t),t\geqslant 0\}$是两个计数过程。【方法】采用类似求独立随机变量随机和的差的精确大偏差的渐近极限方法，研究了 NA 随机变量随机和的差的精确大偏差问题。【结果】引入一些假设条件，得到如下的一致渐近极限结论，即：对于任意固定的 $\gamma>\mu_2$，有 $\lim\limits_{t\to\infty}\sup\limits_{x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}}\left|\dfrac{P\left(\sum_{j=1}^{N_1(t)}X_{1j}-\sum_{j=1}^{N_2(t)}X_{2j}-(\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))>x\right)}{\lambda_1(t)\overline{F_1}(x)}-1\right|=0$。【结论】推广了独立随机变量随机和的差的精确大偏差的相应结论。

**关键词:**精确大偏差；负相协；随机和的差

**中图分类号:**O211.4　　　**文献标志码:**A　　　**文章编号:**1672-6693(2018)05-0088-06

随着保险业的快速发展，近年来保险风险理论越来越受到学者们的关注，相依风险模型中的破产概率和大偏差理论也渐成热点问题。华志强和张春生[1]构造了由一类保单生成的推广的延拓负相依风险模型，得到该模型精确大偏差的渐近结论；吕海娟等人[2]建立了带有齐次 Markov 链利率过程的单一保单的相依风险模型，得到该离散时模型的破产概率的上界；刘利敏和牛海峰[3]构造了具有干扰的单险种多索赔情形风险模型，得到该模型的破产概率；华志强等人[4]给出由两类保单构建了一个带随机利率的二维离散相依风险模型，得到该模型的破产概率的渐近公式；薛冬梅和华志强[5]研究了多类保单形成的多元相依风险模型的精确大偏差问题，得到了该多元相依风险模型中的长尾 END 的精确大偏差的一致渐近下界。但对于保险公司内部两个保单比较的研究甚少，Lu 等人[6]建立了两个保单比较的模型：

$$\sum_{j=1}^{N_1(t)}X_{1j}-\sum_{j=1}^{N_2(t)}X_{2j},\tag{1}$$

其中用两个独立同分布的随机变量序列$\{X_{1j},j\geqslant 1\}$和$\{X_{2j},j\geqslant 1\}$来表示保险公司的两类保单，$\sum_{j=1}^{N_1(t)}X_{1j}$ 和 $\sum_{j=1}^{N_2(t)}X_{2j}$ 分别是这两个序列的随机和，$N_1(t)$和 $N_2(t)$是两个相互独立的计数过程，Lu 等人[6]得到了独立随机变量随机和的差的精确大偏差的一致渐近极限。

基于上述文献，本文考虑模型(1)，将第一类保单$\{X_{1j},j\geqslant 1\}$由独立同分布的条件改为 NA 同分布的条件，将模型(1)变为相依风险模型，采用类似求独立随机变量随机和的差的精确大偏差的渐近极限方法，得到 NA 随机变量随机和的差的精确大偏差的一致渐近极限结论。

## 1 预备知识

下面给出本文所需的一些概念和命题，设 $X$ 是一个定义在$(-\infty,\infty)$上的随机变量，它的分布函数是

* **收稿日期:**2017-11-22　**修回日期:**2018-09-10　**网络出版时间:**2018-09-26　13:25
**资助项目:**国家自然科学基金(No. 81460656；No. 61663037)；内蒙古自治区自然科学基金(No. 2017MS(LH)0106；No. 2018MS06016)；内蒙古民族大学科学研究基金(No. NMDGP17105)

**第一作者简介:**华志强，副教授，博士，研究方向为概率论与数理统计，E-mail:zqhua_imun@163.com

**网络出版地址:**http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180926.1325.010.html

$F(x)=P(X\leqslant x)$，记$\overline{F}(x)=1-F(x)=P(X>x)$为 $X$ 的尾概率。

**定义 1**[7]　非负随机变量 $X$ 或其分布函数 $F(x)$为重尾的，如果 $Ee^{bX}$ 不存在，其中 $b$ 是正数。若 $F(x)$满足 $\lim\limits_{y\downarrow 1}\lim\limits_{x\to\infty}\inf\dfrac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}=1$ 或 $\lim\limits_{y\uparrow 1}\lim\limits_{x\to\infty}\sup\dfrac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}=1$。则称随机变量 $X$ 或其分布函数 $F(x)$属于一致变化尾分布族($\mathcal{C}$)，简记 $F\in\mathcal{C}$。如果对任意固定的 $y\in(0,1)$$\left(\text{或等价地任意的 } y=\dfrac{1}{2}\right)$，有$\lim\limits_{x\to\infty}\sup\dfrac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}<\infty$成立，则称随机变量 $X$ 或其分布函数 $F(x)$属于控制变化尾分布族($\mathcal{D}$)，简记 $F\in\mathcal{D}$。$\mathcal{C}$ 族和 $\mathcal{D}$ 族是重尾分布族的两个子族，且 $\mathcal{C}\subset\mathcal{D}$。

**定义 2**[7]　对任意的 $y>0$，记 $\gamma(y):=\lim\limits_{x\to\infty}\inf\dfrac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}$，称 $\gamma_F:=\inf\left\{-\dfrac{\log\gamma(y)}{\log y}:y>1\right\}$为为非负的、非减函数 $f(x)=(\overline{F}(x))^{-1}(x>0)$的上 Matuszewska 指标。

**定义 3**[8]　设正整数 $n\geqslant 2$，如果对于$\{1,2,\cdots,n\}$中的任意两个非空的、互不相交的子集 $A_1$ 和 $A_2$，都有 $\operatorname{cov}(f_1(X_i,i\in A_1),f_2(X_i,i\in A_2))\leqslant 0$，则称随机变量$\{X_i,i=1,2,\cdots,n\}$是负相协的(NA)，这里 $f_1$ 和 $f_2$ 是两个使得对上式有意义的非增函数。称随机变量序列$\{X_i,i\geqslant 1\}$是一个 NA 序列，如果对于任意大于等于 2 的正整数 $n$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 NA 的。

**命题 1**[8]　设$\{X_{1j},j\geqslant 1\}$为一个非负 NA 同分布的随机变量序列，分布函数 $F_1\in\mathcal{C}$，存在有限均值 $0<\mu_1<\infty$，且 $\gamma_{F_1}\geqslant 1$。设$\{X_{2j},j\geqslant 1\}$为一个非负独立同分布的随机变量序列，分布函数为 $F_2$，且存在某个常数 $p>\gamma_{F_1}$ 满足 $EX_{2j}^{p+1}<\infty$。对于 $i=1,2$，$n_i(t)$是个取正整数值的函数，当 $t\to\infty$时有 $n_i(t)\to\infty$，记 $S^i_{1,n_i(t)}=\sum\limits_{j=1}^{n_i(t)}X_{ij}$ 为$\{X_{ij},j\geqslant 1\}$的部分和。假设$\{X_{1j},j\geqslant 1\}$和$\{X_{2j},j\geqslant 1\}$是相互独立的，如果对于任意的 $0\leqslant a<\infty$，$n_1(t)$和 $n_2(t)$满足 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{n_2(t)}{n_1(t)}=a$，则对于任意固定的 $\gamma>0$，有：

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\geqslant\gamma(n_1(t))^{p+1}}\left|\frac{P(S^1_{1,n_1(t)}-S^2_{1,n_2(t)}-(\mu_1 n_1(t)-\mu_2 n_2(t))>x)}{n_1(t)\overline{F_1}(x)}-1\right|=0。$$

## 2 NA 随机变量随机和的差的精确大偏差

**定理 1**　设$\{X_{1j},j\geqslant 1\}$为一个非负 NA 同分布的随机变量序列，分布函数 $F_1\in\mathcal{C}$，存在有限均值 $0<\mu_1<\infty$，且 $\gamma_{F_1}\geqslant 1$。设$\{X_{2j},j\geqslant 1\}$为一个非负独立同分布的随机变量序列，分布函数为 $F_2$，且存在某个常数 $p>\gamma_{F_1}$ 满足 $EX_{2j}^{p+1}<\infty$。对于 $i=1,2$，$\{N_i(t),t\geqslant 0\}$是个取非负整数值的计数过程，当 $t\to\infty$时有 $EN_i(t)=\lambda_i(t)\to\infty$，记 $S^i_{1,N_i(t)}=\sum\limits_{j=1}^{N_i(t)}X_{ij}$ 为$\{X_{ij},j\geqslant 1\}$的随机和。假设$\{X_{1j},j\geqslant 1\}$和$\{X_{2j},j\geqslant 1\}$与$\{N_1(t),t\geqslant 0\}$和$\{N_2(t),t\geqslant 0\}$是彼此相互独立的，且$\{N_i(t),t\geqslant 0\}(i=1,2)$满足对任意的 $\delta>0$ 和某个常数 $p>\gamma_{F_1}$，有：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{EN_i^p(t)I_{\{N_i(t)>(1+\delta)\lambda(t)\}}}{\lambda_i(t)}<\infty。\tag{2}$$

如果对于任意的 $0\leqslant a<\infty$，$\lambda_1(t)$和 $\lambda_2(t)$满足：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda_2(t)}{\lambda_1(t)}=a,\tag{3}$$

则对于任意固定的 $\gamma>\mu_2$，有：

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}}\left|\frac{P(S^1_{1,N_1(t)}-S^2_{1,N_2(t)}-(\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))>x)}{\lambda_1(t)\overline{F_1}(x)}-1\right|=0。\tag{4}$$

**注**　由 Ng 等人[9]的引理 2.4 可知(2)式成立就意味着当 $t\to\infty$时有$\dfrac{N_i(t)}{\lambda_i(t)}\xrightarrow{P}1$ 成立。

**证明**　对任意的 $0<\delta<1$，由定理的假设条件，将 $P(S^1_{1,N_1(t)}-S^2_{1,N_2(t)}-(\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))>x)$分成如下的 4 个部分，即：

$$P(S^1_{1,N_1(t)}-S^2_{1,N_2(t)}-(\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))>x)=\sum_{1\leqslant i\leqslant 4}P(A_i),\tag{5}$$

这里

$$A_1=\left\{S^1_{1,N_1(t)}-S^2_{1,N_2(t)}-(\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))>x,\left|\frac{N_1(t)}{\lambda_1(t)}-1\right|<\delta,\left|\frac{N_2(t)}{\lambda_2(t)}-1\right|<\delta\right\},$$

$$A_2=\left\{S^1_{1,N_1(t)}-S^2_{1,N_2(t)}-(\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))>x,\left|\frac{N_1(t)}{\lambda_1(t)}-1\right|>\delta,\left|\frac{N_2(t)}{\lambda_2(t)}-1\right|<\delta\right\},$$

$$A_3=\left\{S^1_{1,N_1(t)}-S^2_{1,N_2(t)}-(\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))>x,\left|\frac{N_1(t)}{\lambda_1(t)}-1\right|<\delta,\left|\frac{N_2(t)}{\lambda_2(t)}-1\right|>\delta\right\},$$

$$A_4=\left\{S^1_{1,N_1(t)}-S^2_{1,N_2(t)}-(\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))>x,\left|\frac{N_1(t)}{\lambda_1(t)}-1\right|>\delta,\left|\frac{N_2(t)}{\lambda_2(t)}-1\right|>\delta\right\}。$$

首先处理 $P(A_1)$。由命题1可知,对任意固定的 $\gamma>\mu_2$,当 $t$ 充分大时,关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有:

$$\begin{aligned}P(A_1)\leqslant&P(S^1_{1,(1+\delta)\lambda_1(t)}-S^2_{1,(1-\delta)\lambda_2(t)}-(\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))>x)P(|N_1(t)/\lambda_1(t)-1|<\delta)P(|N_2(t)/\lambda_2(t)-1|<\delta)\leqslant\\&P(S^1_{1,(1+\delta)\lambda_1(t)}-S^2_{1,(1-\delta)\lambda_2(t)}-((1+\delta)\mu_1\lambda_1(t)-(1-\delta)\mu_2\lambda_2(t))>x-\delta\mu_1\lambda_1(t)-\delta\mu_2\lambda_2(t))\leqslant\\&(1+\delta)^2\lambda_1(t)\overline{F_1}(x-\delta\mu_1\lambda_1(t)-\delta\mu_2\lambda_2(t))。\end{aligned}\tag{6}$$

又由命题1及(2)式的等价条件可得 $P(A_1)$ 的下界,即对任意固定的 $\gamma>\mu_2$,当 $t$ 充分大时,关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有:

$$\begin{aligned}P(A_1)\geqslant&P(S^1_{(1-\delta)\lambda_1(t)}-S^2_{(1+\delta)\lambda_2(t)}-(\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))>x)P(|N_1(t)/\lambda_1(t)-1|<\delta)P(|N_2(t)/\lambda_2(t)-1|<\delta)\geqslant\\&(1-\delta)^2P(S^1_{(1-\delta)\lambda_1(t)}-S^2_{(1+\delta)\lambda_2(t)}-((1-\delta)\mu_1\lambda_1(t)-(1+\delta)\mu_2\lambda_2(t))>x+\delta\mu_1\lambda_1(t)+\delta\mu_2\lambda_2(t))\geqslant\\&(1-\delta)^4\lambda_1(t)\overline{F_1}(x+\delta\mu_1\lambda_1(t)+\delta\mu_2\lambda_2(t))。\end{aligned}\tag{7}$$

由定义1可知,对任意固定的 $\gamma>\mu_2$,有:

$$\lim_{\delta\downarrow0}\lim_{t\to\infty}\sup_{x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}}\left|\frac{\overline{F_1}(x-\delta\mu_1\lambda_1(t)-\delta\mu_2\lambda_2(t))}{\overline{F_1}(x)}-1\right|=0,\tag{8}$$

以及

$$\lim_{\delta\downarrow0}\lim_{t\to\infty}\sup_{x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}}\left|\frac{\overline{F_1}(x+\delta\mu_1\lambda_1(t)+\delta\mu_2\lambda_2(t))}{\overline{F_1}(x)}-1\right|=0。\tag{9}$$

连接(6)~(9)式,对任意固定的 $\gamma>\mu_2$,有:

$$\lim_{\delta\downarrow0}\lim_{t\to\infty}\sup_{x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}}\left|\frac{P(A_1)}{\lambda_1(t)\overline{F_1}(x)}-1\right|=0。\tag{10}$$

其次处理 $P(A_2)$。将概率 $P(A_2)$ 分为 $P(A_2^1)$ 和 $P(A_2^2)$ 两部分,这里

$$A_2^1=\{S^1_{1,N_1(t)}-S^2_{1,N_2(t)}-(\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))>x,\frac{N_1(t)}{\lambda_1(t)}>1+\delta,\left|\frac{N_2(t)}{\lambda_2(t)}-1\right|<\delta\},$$

$$A_2^2=\{S^1_{1,N_1(t)}-S^2_{1,N_2(t)}-(\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))>x,\frac{N_1(t)}{\lambda_1(t)}<1-\delta,\left|\frac{N_2(t)}{\lambda_2(t)}-1\right|<\delta\}。$$

先估计 $P(A_2^1)$。对任意固定的 $\gamma>\mu_2$,当 $t$ 充分大时,关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有:

$$\begin{aligned}P(A_2^1)\leqslant&P\left(S^1_{1,N_1(t)}>x+\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t),\frac{N_1(t)}{\lambda_1(t)}>1+\delta\right)\leqslant\\&\sum_{n>(1+\delta)\lambda_1(t)}^{\infty}P(S^1_{1,n}>x-\mu_2\lambda_2(t))P(N_1(t)=n)\leqslant\\&\sum_{n>(1+\delta)\lambda_1(t)}^{\infty}\left(n\overline{F_1}(v(x-\mu_2\lambda_2(t)))+c\left(\frac{n}{x-\mu_2\lambda_2(t)}\right)^{1/v}\right)P(N_1(t)=n)=\\&\overline{F_1}(v(x-\mu_2\lambda_2(t)))EN_1(t)I_{\{N_1(t)>(1+\delta)\lambda_1(t)\}}+c(x-\mu_2\lambda_2(t))^{-1/v}EN_1^{1/v}(t)I_{\{N_1(t)>(1+\delta)\lambda_1(t)\}}。\end{aligned}\tag{11}$$

由 Chen 等人[10]的引理2.3可得到(11)式的第3个不等式,即:对任意固定的 $\gamma>\mu_2$ 和 $v>0$,存在某个常数 $0<c=c(v)<\infty$,当 $t$ 充分大时,对所有的 $n=1,2,\cdots$,以及 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}>\mu_2\lambda_2(t)$ 有:

$$P(S^1_{1,n}>x-\mu_2\lambda_2(t))\leqslant n\overline{F_1}(v(x-\mu_2\lambda_2(t)))+c\left(\frac{n}{x-\mu_2\lambda_2(t)}\right)^{1/v}。$$

由 Hua 和 Song[7]的命题2.7及(2)式可得到(11)式中最后等式的第二项,即,取 $\frac{1}{v}=p>\gamma_{F_1}\geqslant1$,有

$$(x-\mu_2\lambda_2(t))^{-1/v}=o(\overline{F_1}(x-\mu_2\lambda_2(t)))\tag{12}$$

和

$$EN_1^{1/v}(t)I_{\{N_1(t)>(1+\delta)\lambda_1(t)\}}=o(\lambda_1(t))。\tag{13}$$

利用 Hua 和 Song[7] 的命题 2.6，存在正数 $x_0$ 和 $B$，对任意固定的 $\gamma>\mu_2$ 及 $p>\gamma_{F_1}$，当 $t$ 充分大时，对所有的 $x\geqslant\left(1-\frac{\mu_2}{\gamma}\right)^{-1}x_0$，有：

$$0<\frac{\overline{F_1}(x-\mu_2\lambda_2(t))}{\overline{F_1}(x)}\leqslant\frac{\overline{F_1}(x(1-\mu_2/\gamma))}{\overline{F_1}(x)}\leqslant B\left(1-\frac{\mu_2}{\gamma}\right)^{-p}。\tag{14}$$

连接(12)～(14)式，对任意固定的 $\gamma>\mu_2$，当 $t\to\infty$ 时，关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有：

$$c(x-\mu_2\lambda_2(t))^{-v}EN_1^{1/v}(t)I_{\{N_1(t)>(1+\delta)\lambda_1(t)\}}=o(\lambda_1(t)\overline{F_1}(x))\ 。\tag{15}$$

由(2)式成立知当 $t\to\infty$ 时，有 $\frac{N_i(t)}{\lambda_i(t)}\xrightarrow{P}1$ 成立。可知(11)式中最后等式的第一项，当 $t\to\infty$ 时，有：

$$EN_1(t)I_{\{N_1(t)>(1+\delta)\lambda_1(t)\}}=o(\lambda_1(t))。\tag{16}$$

由 $F\in\mathcal{C}\subset\mathcal{D}$ 及(16)式，对任意固定的 $\gamma>\mu_2$ 及 $v>0$，当 $t\to\infty$ 时，关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有：

$$\overline{F_1}(v(x-\mu_2\lambda_2(t)))EN_1(t)I_{\{N_1(t)>(1+\delta)\lambda_1(t)\}}=o(\lambda_1(t)\overline{F_1}(x))。\tag{17}$$

将(15)～(17)式代入到(11)式中可得，对任意固定的 $\gamma>\mu_2$，当 $t\to\infty$ 时，关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有：

$$P(A_2^1)=o(\lambda_1(t)\overline{F_1}(x))。\tag{18}$$

随后估计 $P(A_2^1)$。由命题 1 可知，对任意固定的 $\gamma>\mu_2$，当 $t$ 充分大时，关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有：

$$P(A_2^2)\leqslant P(S^1_{1,(1-\delta)\lambda_1(t)}-S^2_{1,(1-\delta)\lambda_2(t)}-((1-\delta)\mu_1\lambda_1(t)-(1-\delta)\mu_2\lambda_2(t))>x+\delta\mu_1\lambda_1(t)-\delta\mu_2\lambda_2(t))\cdot$$
$$P(N_1(t)<(1-\delta)\lambda_1(t))\leqslant(1-\delta^2)\lambda_1(t)\overline{F_1}(x+\delta\mu_1\lambda_1(t)-\delta\mu_2\lambda_2(t))P(N_1(t)<(1-\delta)\lambda_1(t))。$$

由(2)式成立就意味着当 $t\to\infty$ 时有 $\frac{N_i(t)}{\lambda_i(t)}\xrightarrow{P}1$ 成立可得，对于任意的 $0<\delta<1$，当 $t\to\infty$ 时，有：

$$P(N_1(t)<(1-\delta)\lambda_1(t))=o(1)。\tag{19}$$

由 $\mathcal{C}$ 族的定义知，对任意固定的 $\gamma>\mu_2$ 及充分小的 $\delta>0$，当 $t$ 充分大时，关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有：

$$\overline{F_1}(x+\delta\mu_1\lambda_1(t)-\delta\mu_2\lambda_2(t))\leqslant(1+\delta)\overline{F_1}(x)。\quad 20)$$

连接(19)，(20)式，令 $\delta\downarrow 0$，对任意固定的 $\gamma>\mu_2$，当 $t\to\infty$ 时，关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有：

$$P(A_2^2)=o(\lambda_1(t)\overline{F_1}(x))。\tag{21}$$

连接(18)，(21)式，对任意固定的 $\gamma>\mu_2$，当 $t\to\infty$ 时，关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有：

$$P(A_2)=o(\lambda_1(t)\overline{F_1}(x))。\tag{22}$$

再次处理 $P(A_3)$。将概率 $P(A_3)$ 分为 $P(A_3^1)$ 和 $P(A_3^2)$ 两部分，这里：

$$A_3^1=\{S^1_{1,N_1(t)}-S^2_{1,N_2(t)}-(\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))>x,\left|\frac{N_1(t)}{\lambda_1(t)}-1\right|<\delta,\frac{N_2(t)}{\lambda_2(t)}>1+\delta\},$$

$$A_3^2=\{S^1_{1,N_1(t)}-S^2_{1,N_2(t)}-(\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))>x,\left|\frac{N_1(t)}{\lambda_1(t)}-1\right|<\delta,\frac{N_2(t)}{\lambda_2(t)}<1-\delta\}。$$

先估计 $P(A_3^1)$，对任意固定的 $\gamma>\mu_2$，当 $t$ 充分大时，关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有：

$$P(A_3^1)\leqslant P(S^1_{1,(1+\delta)\lambda_1(t)}-S^2_{1,(1+\delta)\lambda_2(t)}-(\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))>x)P\left(\left|\frac{N_1(t)}{\lambda_1(t)}-1\right|<\delta\right)P\left(\frac{N_2(t)}{\lambda_2(t)}>1+\delta\right)。\tag{23}$$

由(2)式成立就意味着当 $t\to\infty$ 时有 $\frac{N_i(t)}{\lambda_i(t)}\xrightarrow{P}1$ 成立及命题 1 可知，对任意固定的 $\gamma>\mu_2$ 和任意的 $0<\delta<1$，当 $t\to\infty$ 时，关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有：

$$P(N_2(t)>(1+\delta)\lambda_2(t))=o(1),\tag{24}$$

和

$$P(S^1_{1,(1+\delta)\lambda_1(t)}-S^2_{1,(1+\delta)\lambda_2(t)}-(\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))>x)\leqslant(1+\delta)^2\lambda_1(t)\widetilde{F}_1(x-\delta\mu_1\lambda_1(t)+\delta\mu_2\lambda_2(t))。\tag{25}$$

连接(23)～(25)式，对任意固定的 $\gamma>\mu_2$ 和任意的 $0<\delta<1$，当 $t$ 充分大时，关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有：

$$P(A_3^1)\leqslant\delta(1+\delta)^2\lambda_1(t)\widetilde{F}_1(x-\delta\mu_1\lambda_1(t)+\delta\mu_2\lambda_2(t))。\tag{26}$$

由 $C$ 族的定义知,对任意固定的 $\gamma>\mu_2$,有:

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\lim_{t\to\infty}\sup_{x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}}\left|\frac{\overline{F_1}(x-\delta\mu_1\lambda_1(t)+\delta\mu_2\lambda_2(t))}{\overline{F_1}(x)}-1\right|=0。\tag{27}$$

由(26)式和(27)式可得,令 $\delta\downarrow 0$,对任意固定的 $\gamma>\mu_2$,当 $t\to\infty$ 时,关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有:

$$P(A_3^1)=o(\lambda_1(t)\overline{F_1}(x))。\tag{28}$$

随后估计 $P(A_3^2)$。对任意固定的 $\gamma>\mu_2$ 和任意的 $0<\delta<1$,当 $t$ 充分大时,关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有:

$$P(A_3^2)\leqslant P(S^1_{1,(1+\delta)\lambda_1(t)}-(1+\delta)\mu_1\lambda_1(t)>x-\delta\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))\cdot$$
$$P\left(\left|\frac{N_1(t)}{\lambda_1(t)}-1\right|<\delta\right)P(N_2(t)<(1-\delta)\lambda_2(t))。\tag{29}$$

利用命题1,对任意固定的 $\gamma>\mu_2$ 和任意的 $0<\delta<1$,当 $t$ 充分大时,关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有:

$$P(S^1_{1,(1+\delta)\lambda_1(t)}-(1+\delta)\mu_1\lambda_1(t)>x-\delta\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))\leqslant(1+\delta)^2\lambda_1(t)\widetilde{F}_1(x-\delta\mu_1\lambda_1(t)-\delta\mu_2\lambda_2(t))。\tag{30}$$

类似(19)式可得,对任意的 $\delta>0$,当 $t\to\infty$ 时,有:

$$P(N_2(t)<(1-\delta)\lambda_1(t))=o(1)。\tag{31}$$

连接(29)～(31)式,对任意固定的 $\gamma>\mu_2$ 和任意的 $0<\delta<1$,当 $t$ 充分大时,关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有:

$$P(A_3^2)\leqslant\delta(1+\delta)^2\lambda_1(t)\overline{F}_1(x-\delta\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))。$$

类似(10)式可得,对任意固定的 $\gamma>\mu_2$,当 $t\to\infty$ 时,关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有:

$$P(A_3^2)=o(\lambda_1(t)\overline{F_1}(x))。\tag{32}$$

由(28),(32)式可得,对任意固定的 $\gamma>\mu_2$,当 $t\to\infty$ 时,关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有:

$$P(A_3)=o(\lambda_1(t)\overline{F_1}(x))。\tag{33}$$

最后处理 $P(A_4)$。将概率 $P(A_4)$ 分为 $P(A_4^1)$ 和 $P(A_4^2)$ 两部分,这里:

$$A_4^1=\left\{S^1_{1,N_1(t)}-S^2_{1,N_2(t)}-(\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))>x,\frac{N_1(t)}{\lambda_1(t)}>1+\delta,\left|\frac{N_2(t)}{\lambda_2(t)}-1\right|>\delta\right\},$$
$$A_4^2=\left\{S^1_{1,N_1(t)}-S^2_{1,N_2(t)}-(\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))>x,\frac{N_1(t)}{\lambda_1(t)}>1+\delta,\left|\frac{N_2(t)}{\lambda_2(t)}-1\right|>\delta\right\}。$$

类似处理 $P(A_2^1)$ 的(11)～(18)式可得,对任意固定的 $\gamma>\mu_2$,当 $t\to\infty$ 时,关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有:

$$P(A_4^1)\leqslant P\left(S^1_{1,N_1(t)}>x+\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t),\frac{N_1(t)}{\lambda_1(t)}>1+\delta\right)=o(\lambda_1(t)\overline{F_1}(x))。\tag{34}$$

进一步类似处理 $P(A_3^2)$ 的(29)～(32)式可得,令 $\delta\downarrow 0$,对任意固定的 $\gamma>\mu_2$,当 $t\to\infty$ 时,关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有:

$$P(A_4^2)\leqslant P(S^1_{1,(1-\delta)\lambda_1(t)}-(1-\delta)\mu_1\lambda_1(t)>x+\delta\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))P(N_1(t)<(1-\delta)\lambda_1(t))P\left(\left|\frac{N_2(t)}{\lambda_2(t)}-1\right|>\delta\right)\leqslant$$
$$(1-\delta)^2\delta^2\lambda_1(t)\overline{F_1}(x+\delta\mu_1\lambda_1(t)-\mu_2\lambda_2(t))=o(\lambda_1(t)\overline{F_1}(x))。\tag{35}$$

由(34),(35)式可得,对任意固定的 $\gamma>\mu_2$,当 $t\to\infty$ 时,关于 $x\geqslant\gamma(\lambda_1(t))^{p+1}$ 一致地有:

$$P(A_4)=o(\lambda_1(t)\overline{F_1}(x))。\tag{36}$$

由(10),(22),(33)和(36)式可知(4)式成立,故定理得证。 证毕

**参考文献:**

[1] 华志强,张春生.推广的延拓负相依风险模型中的精确大偏差[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2016,33(2):38-42.

HUA Z Q,ZHANG C S. Precise large deviations for generalized extended negatively dependent compound renewal risk model[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2016,33(2):38-42.

[2] 吕海娟,张基培,张晋源,等.带有 Markov 链利率的相依风险模型破产概率的界[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2017,34(3):69-72.

LÜ H J, ZHANG J P, ZHANG J Y, et al. Bounds for ruin probability in a dependent risk model with a markov chain interest rate[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2017,34(3):69-72.

[3] 刘利敏,牛海峰.带干扰的单险种多索赔情形风险模型的破产概率[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2017,34

(4):52-55.

LIU L M, NIU H F. Ruin probability in the single-multiple-type risk model with interference [J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2017, 34 (4):52-55.

[4] 华志强,张春生,陈丽莹.带随机利率的二维离散时的破产概率[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2017,34(3):58-63.

HUA Z Q, ZHANG C S, CHEN L Y. Ruin probability of a two-dimensional discrete time risk model with random interest rates[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2017, 34(3): 58-63.

[5] 薛冬梅,华志强.多元风险模型中的长尾END的精确大偏差下界[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2016,33(1):67-72.

XUE D M, HUA Z Q. Lower bounds of precise large deviations for sums of long-tails and END random variables in a multi-risk model[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2016, 33(1):67-72.

[6] LU D W, SONG L X, WANG X H. Precise large deviations for the difference of two sums of random variables [J]. Communication in Statistics-Theory and Methods, 2016, 45(2):291-306.

[7] HUA Z Q, SONG L X. Precise large deviations for the difference of non-random sums of NA random variables [J]. Journal of Mathematical Research with Application, 2016, 36(6):732-740.

[8] ESARY J D, PROSCHAN F, WAIKUP D W. Association of random variables, with applications[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1967, 38(5):1466-1474.

[9] NG K W, TANG Q H, YAN J A, et al. Precise large deviations for sums of random variables with consistently varying tails[J]. Journal of Applied Probability, 2004, 41(1): 93-107.

[10] CHEN Y Q, KAM C Y, NG K W. Precise large deviations of random sums in presence of negative dependence and consistent variation[J]. Methodology & Computing in Applied Probability, 2011, 13(4):821-833.

## Precise Large Deviation for the Difference of Random Sum of NA Random Variables

HUA Zhiqiang, ZHANG Chunsheng, CHEN Liying, SHENG Tingting

(College of Mathematics, Inner Mongolia University for the Nationalities, Tongliao Inner Mongolia 028043, China)

**Abstract**: [**Purposes**]It investigates the dependent risk model of the random difference $\sum_{j=1}^{N_1(t)} X_{1j} - \sum_{j=1}^{N_2(t)} X_{2j}$ between the two types of polices, where $\{X_{1j}, j\geqslant 1\}$ is a sequence of NA (negatively associated) random variables, $\{X_{2j}, j\geqslant 1\}$ is a sequence of independent random variables, $\{N_1(t), t\geqslant 0\}$ and $\{N_2(t), t\geqslant 0\}$ are two independent counting processes. [**Methods**] Study the issue of precise large deviation for the difference of random sum of *NA* random variables by using the similar method to find the asymptotic limit of the precise large deviation for the difference of random sum of independent random variables. [**Findings**] Under some given assumptions, the following uniformly asymptotic limit is established, that is, for any fixed $\gamma > \mu_2$, $\lim\limits_{t\to\infty} \sup\limits_{x\geqslant \gamma(\lambda_1(t))^{p+1}} \left| \frac{P\left(\sum_{j=1}^{N_1(t)} X_{1j} - \sum_{j=1}^{N_2(t)} X_{2j} - (\mu_1\lambda_1(t) - \mu_2\lambda_2(t)) > x\right)}{\lambda_1(t)\,\overline{F}_1(x)} - 1 \right| = 0$. [**Conclusions**] This result generalizes the corresponding result of the precise large deviation for the difference of random sum of independent random variables.

**Keywords**: precise large deviation; negative association; difference of random sum

(责任编辑 许 甲)