2018 年 9 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Sep. 2018
第 35 卷 第 5 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 35 No. 5

DOI:10.11721/cqnuj20180513

连通 $2\text{-}K_n$-残差图的一个注记*

廖 江 东

(长江师范学院 数学与统计学院，重庆 涪陵 408100)

摘要:【目的】对 Erdös 等人关于连通 $m\text{-}K_n$-残差图的最小阶和极图的两个猜想进行修正。【方法】利用容斥原理以及集合的运算性质等方法。【结果】证明了最小阶的连通 $2\text{-}K_6$-残差图仅存在两个不同构的极小图，从而解决了连通 $2\text{-}K_6$-残差图的最小阶和极小图问题。【结论】最后提出了新的猜想。

关键词:残差图;最小阶;极小图

中图分类号:O157.5 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2018)05-0094-03

本文所指的图均为无向简单图，未注明的符号和术语同文献[1-2]。

1980 年，Erdös，Harary 和 Klawe[2] 引入了残差图的相关概念，即：设 F 是一个给定的图，任意 $u\in V(G)$，在 G 中去掉 u 的闭邻域 $N(u)$ 得到的图与 F 同构，则称图 G 为 F-残差图，类似地定义 G 是 $m\text{-}F$-残差图，任意 $u\in V(G)$，$G-N(u)$ 是 $(m-1)\text{-}F$-残差图，将 $1\text{-}F$-残差图简称为 F-残差图。他们研究了连通 K_n-残差图的最小阶和极小图，当 $1<n\neq 2$ 时，连通 K_n-残差图的最小阶为 $2(n+1)$，当 $n\neq 2,3,4$ 时，$K_{n+1}\times K_2$ 是唯一具有最小阶的连通 K_n-残差图，同时对连通 $m\text{-}K_n$-残差图提出了如下两个猜想。

猜想 1 当 $n\neq 2$ 时，连通 $m\text{-}K_n$-残差图的最小阶为 $\min\{2n(m+1),(n+m)(m+1)\}$。

猜想 2 当 n 充分大时，存在唯一具有最小阶的连通 $m\text{-}K_n$-残差图。

对此猜想国内外有许多研究成果，文献[2-3]研究了连通 K_n-残差图；文献[4]部分地解决了连通 $3\text{-}K_n$-残差图的最小阶和极小图；文献[5-6]研究了连通 $m\text{-}K_n$-残差图。在研究连通 $2\text{-}K_n$-残差图的最小阶和极小图结论中，文献[2]得到了连通 $2\text{-}K_1$-残差图和连通 $2\text{-}K_2$-残差图的极小图，分别不同构于猜想中的结论 $K_3\times K_3$ 和 $K_4\times K_3$；文献[5]证明了连通 $2\text{-}K_3$-残差图的最小阶和存在 3 个不同构的极小图；文献[7]中求出了最小阶为 $16\neq 3n+6=18$ 连通 $2\text{-}K_4$-残差图的极小图，此最小阶和极图与猜想中的结论不相同，同时文献[7]证明了 $5\leqslant n\neq 6$ 时猜想成立。本文的主要工作是证明了连通 $2\text{-}K_6$-残差图的最小阶是 $3n+6=24$，仅存在两个不同构的极小图，从而全面地解决了连通 $2\text{-}K_n$-残差图的最小阶和极小图。根据文献[2-7]的结论和本文的结果修正了 Erdös 等关于连通 $m\text{-}K_n$-残差图最小阶的猜想 1，提出了新的猜想。

1 预备知识

定义 1 如果 $H\subset G$，对任意的 $v\in H$，记 $N_H(v)=\{x\in H, x \text{ 与 } v \text{ 邻接，或 } x=v\}$，表示 v 在 H 中的闭邻域；一般地 $N_G(v)$ 简单地记 $N(v)$。如果 $F\subset G$，记 $N(F)=N_G(F)\cup N(v), v\in F$，表示 F 的闭邻域。

定义 2 设图 $G_1=(V_1,E_1)$，$G_2=(V_2,E_2)$，G_1 与 G_2 合成 $G=G_1[G_2]$，定义为：

$$V(G)=V_1\times V_2=\{x=(x_1,x_2)\mid x_1\in V_1, x_2\in V_2\}。$$

两个顶点 $u=(u_1,u_2)$ 和 $v=(v_1,v_2)$ 相邻，当且仅当 u_1 与 v_1 在 G_1 相邻，或者 $u_1=v_1$，u_2 与 v_2 在 G_2 相邻。

定义 3 设 $X,Y\subset V(G)$，$X\cap Y=\varnothing$，如果存在 $x\in X$ 和 $y\in Y$，x 与 y 邻接，称 X 与 Y 邻接，否则称 X 与 Y 不邻接；如果对于任意 $x\in X$ 和 $y\in Y$，x 与 y 邻接，称 X 与 Y 完全邻接。

定义 4 对任意 $u\in G$，定义 $G_u=G-N(u)$，为方便起见，记 $\langle U\rangle$ 表示 U 在 G 中的导出子图。

* **收稿日期:**2017-11-09 **修回日期:**2018-09-12 **网络出版时间:**2018-09-26 13:25

资助项目:重庆市教委科学技术研究项目(No. KJ15012024)；国家自然科学基金(No. 61572006)

第一作者简介:廖江东，男，副教授，研究方向为图论，E-mail:ljd88073@163.com;

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180926.1325.024.html

为了证明的方便，将文献[7]中的两个引理叙述如下。

引理 1　设 G 是最小阶为 $v(G)=3n+t$ 的连通 2-K_n-残差图，当 $n\geqslant 5,n\neq 6$，且 $4\leqslant t\leqslant 6$，则 G 中不存在度为 $n+t-1$ 的顶点。

引理 2　设 G 是最小阶为 $v(G)=3n+t$ 的连通 2-K_n-残差图，当 $n\geqslant 5,n\neq 6$，且 $4\leqslant t\leqslant 6$，则 G 中不存在度为 $n+t-1$ 的三个两两互不邻接的顶点。

2 连通 2-K_6-残差图

定理 1　若 G 是一个连通 2-K_6-残差图，则图 G 仅存在两个阶为 $v(G)\geqslant 3n+6=24$ 不同构的极小图。

证明　设 G 是一个连通 2-K_6-残差图，当 $n\geqslant 5$，且 $4\leqslant t\leqslant 6$ 时，有：

1) G 不存在度为 $n+t-1$ 的顶点，根据文献[3]的结论有 $G\cong K_8\times K_3$；

2) G 中存在度为 $n+t-1$ 的顶点，设 $U=\{x\in G|d(x)=n+t-1\}$，$|U|=l$，根据引理 1 有 $\langle U\rangle$ 不同构于 K_l，则存在顶点 $u,v\in U$，u 与 v 不邻接。

设 $u\in H_1,v\in H_2,G_u=H_2\cup H_3\cong 2K_n,G_v=H_1\cup H_3\cong 2K_n,N(u)\cap N(v)=X$，且 $|X|=t$，则 $H_1\cup H_2$ 与 H_3 不邻接，且 $N(u)=H_1\cup X,G-N(u)-N(v)=H_3,N(v)=H_2\cup X$，因此，$G=\langle N(u)\cup N(v)\cup H_3\rangle=\langle H_1\cup H_2\cup H_3\cup X\rangle$。根据引理 2 得 $H_3\cap U=\varnothing$，存在一个顶点 $u_1\in H_1\cup H_2$，不妨假设 $u_1\in H_1$，则 $d(u_1)=n+t-4$，$G_{u_1}=\langle W_1\cup W_2\cup X_2\cup V_1\cup X_1\rangle$，其中 $|W_1|=|W_2|=|X_2|=|V_1|=|X_1|=3$，$\langle W_1\cup W_2\rangle\cong\langle W_2\cup X_2\rangle\cong\langle X_2\cup V_1\rangle\cong\langle V_1\cup X_1\rangle\cong\langle X_1\cup W_1\rangle\cong K_6$。因此 $v(G_{u_1})=2n+3$。在文献[3]中，当 $n\geqslant 5$ 时，奇数阶 $2n+3$ 的 $G_{u_1}\cong C_5[K_3]$ 是唯一的连通 K_n-残差图，$v\in G_{u_1},H_3\subset G_{u_1}$。如果 $v\in V_1$，则 $\langle W_1\cup W_2\rangle=H_3,X_1\cup X_2\subset N(v)$，且 X_i 完全邻接 $W_i\subset H_3,i=1,2$。因此 $X_1\cup X_2=N(v)-H_2=X,H_2\cap G_{u_1}=V_1$。

下面证明 $d(w)=d_{G_{u_1}}(w)=n+t-4=n+2,\forall w\in G_{u_1}$。采用反证法证明，假设存在 $w\in H_3,d(w)=n+3=n+t-3$，则 $G_w=\langle\overline{H_1}\cup\overline{H_2}\rangle K_{n+1}\times K_2$，其中 $H_1\subset\overline{H_1}\cong K_{n+1},H_2\subset\overline{H_2}\cong K_{n+1}$，则 $|N(u_1)\cap\overline{H_2}|=1,|N(u_1)\cap H_2|\leqslant 1w\in H_3,|H_2\cap G_{u_1}|\geqslant n-1=5$，这与 $H_2\cap G_{u_1}=V_1,|V_1|=3$ 矛盾，所以对于任意的 $w\in H_3$ 有 $d(w)\neq n+3=n+t-3,d(w)=n+2=n+t-4$。

若 $w_1\in W_1,w_2\in W_2$，则 $G_{w_1}=\langle H_1\cup H_2\cup X_2\rangle\cong C_5[K_3],G_{w_2}=\langle H_1\cup H_2\cup X_1\rangle\cong C_5[K_3]$。

令 $V_2=H_2-V_1,U_2=\{y\in H_1|X\subset N(y)\},U_1=H_1-U_2$，那么有 $G_{w_1}=\langle U_2\cup U_1\cup V_2\cup V_1\cup X_2\rangle,G_{w_2}=\langle U_2\cup U_1\cup V_2\cup V_1\cup X_1\rangle$，且 $\langle U_1\cup U_2\rangle=H_1,\langle V_1\cup V_2\rangle=H_2$，因此，$\langle U_1\cup V_2\rangle\cong\langle U_2\cup X_2\rangle\cong\langle V_1\cup X_2\rangle\cong\langle U_2\cup X_1\rangle\cong\langle V_1\cup X_1\rangle\cong K_6$。

当图 G 存在度为 $n+t-1$ 的顶点时，根据上面的证明，图 G 中每个顶点之间的邻接关系已经清楚了，从而得到了另外一个阶为 24 不同构于 $K_8\times K_3$ 的连通 2-K_6-残差图。　　证毕

将图 G 中存在度为 $n+t-1$ 的顶点阶为 24 不同构于 $K_8\times K_3$ 的连通 2-K_6-残差图画出来，图 1 中两个顶点集合之间用一条边把他们连接起来表示这两个集合之间的顶点相互邻接，为了更容易看清楚点与点之间的邻接关系，将顶点集合中的点画出来得到图 2(方框里面的顶点之间相互邻接)。

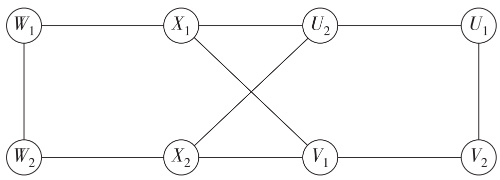

图 1　连通 2-K_6-残差图

Fig. 1　Connected 2-K_6-residual graph

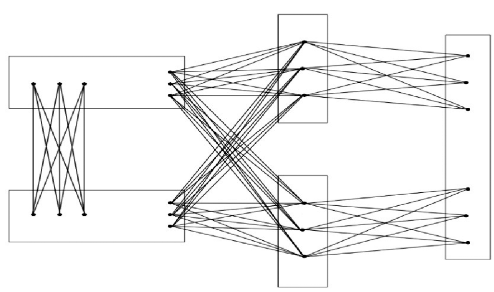

图 2　连通 2-K_6-残差图

Fig. 2　Connected 2-K_6-residual graph

3 新的猜想

根据文献[2-7]的研究结论和本文的结果，当 n 充分大时，存在唯一连通 m-K_n-残差图具有最小阶$(n+m)\cdot$

$(m+1)$，当 n 不是充分大时，例：连通 2-K_3-残差图的最小阶为 $3n+6=15$，连通 2-K_4-残差图最小阶为 $16=\frac{n}{2}(3m+2)$，连通 2-K_6-残差图最小阶为 $3n+6=24$，连通 3-K_3-残差图最小阶为 $20=(m+3)n+m-1$ 等等，本文修正了关于连通 m-K_n-残差图最小阶的猜想 1，提出了新的猜想。

猜想 设 $\varphi_n(m)$ 是连通 m-K_n-残差图的最小阶，则有：

1) 若 n 是奇数，则 $\varphi_n(m)=\min\{(m+n)(m+1),(m+3)n+m-1\}$；

2) 若 n 是偶数，则 $\varphi_n(m)=\min\left\{(m+n)(m+1),(m+3)n+m-1,\frac{n}{2}(3m+2)\right\}$。

参考文献：

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory(graduate texts in mathematics 244)[M]. New York: Springer, 2008.

[2] ERDÖS P, HARAY F, KLAWE M. Residually-complete graphs[J]. Annals Discrete Math, 1980, 6: 117-123.

[3] 段辉明，李永红. 连通的 K_n-残差图[J]. 运筹学学报，2016，20(2)：38-48.
DUAN H M, LI Y H. On connected K_n-residual graph [J]. Operations Research Transactions, 2016, 20(2): 38-48.

[4] 段辉明，曾波，窦智. 连通三重 K_n-残差图[J]. 运筹学学报，2014，18(2)：59-68.
DUAN H M, ZENG B, DOU Z. On connected three multiply K_n-residual graphs[J]. Operations Research Transactions, 2014, 18(2): 59-68.

[5] LIAO J D, YANG S H. Two improvements on the Erdös, Haray and Klawe conjecture[J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2015, 12(2): 263-279.

[6] DUAN H M, ZENG B. On connected m-K_2-residual graphs [J]. Ars Combinatoria, 2016, 125(1): 23-32.

[7] LIAO J D, YANG S H. On connected 2-K_n-residual graphs [J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2013, 10(2): 625-641.

A Note On Connected 2-K_n-Residual Graphs

LIAO Jiangdong

(School of Mathematics and Statistics, Yangtze Normal University, Chongqing 408100, China)

Abstract: [**Purposes**]Reidentified and correted the two conjecture regarding the connected m-K_n-residual graphs that proposed by Erdös and others. [**Methods**] With the method of including excluding principle and set operation. [**Findings**] Two connected residual graph non isomorphic with the minimum order are proved, so as to thoroughly solve the connected 2-K_n-residual graphs of the minimum order and the extremal graphs problems. [**Conclusions**] It finally puts forward a new conjecture.

Keywords: residual graph; minimum order; extremal graph

（责任编辑 许 甲）