

移动最小二乘近似在图像分割中的应用*

李淑玲, 郭 岚

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】研究图像分割模型中水平集发展方程的高效稳定的数值解法。【方法】用移动最小二乘近似逼近水平集函数,然后将水平集发展方程离散为常微分方程组,并用向前 Euler 法求解。【结果】给出了一种图像分割的移动最小二乘近似方法,分割终止标准明确,形成的系数矩阵稀疏、条件数很小。【结论】数值实验表明该方法不需要重新初始化水平集函数,克服了水平集初始轮廓对分割结果的影响,是一种具有较高分割精度和较快分割速度的图像分割方法。

关键词:移动最小二乘近似;数值计算;水平集方法;图像分割

中图分类号:TP391.41

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2018)05-0102-05

图像分割在许多图形图像处理问题中具有非常重要的作用,其旨在找出目标图像的轮廓曲线。水平集方法是一种有效且使用频繁的图像分割方法^[1-2]。在基于水平集方法的图像分割技术中,目标曲线的寻找被转化为水平集发展方程的求解。有限差分方法是求解水平集发展方程最常用的数值方法,但是求解过程非常耗时,且存在水平集初始轮廓严重影响分割结果、水平集函数需要定期重新初始化、分割终止标准缺乏等缺点。因此,建立水平集发展方程的快速有效数值解法非常重要。近些年来出现了一些水平集模型的改进格式^[3-5]和一些改进有限差分方法^[6-7]来降低分割时间,这些改进格式和方法各有优缺点。

为了克服有限差分方法的不足,文献[8]给出了数值求解水平集发展方程的紧支径向基函数法,该方法虽然形成的系数矩阵稀疏、条件数较小,但是计算精度较低。由于全局径向基函数的计算精度高于紧支径向基函数,文献[9-10]给出了求解水平集发展方程的全局径向基函数法,该方法精度较高,比文献[2]的有限差分方法具有更好的分割效果和更快的分割速度,但是系数矩阵稠密、条件数非常大。

移动最小二乘近似^[11-12]是一种求解微分方程数值解的高效数值计算方法。为了充分利用文献[8-10]中各方法的优点而避免缺点,本文建立了求解水平集发展方程的移动最小二乘近似法。该图像分割方法不仅形成的系数矩阵稀疏、条件数很小,而且还具有较高的计算精度,从而提高了分割效果和速度。另外,在本文方法中,水平集函数不需要重新初始化,水平集初始轮廓对分割结果的影响较小,分割终止标准明确。

1 水平集发展方程

利用水平集方法,图像分割问题的数学模型可表示为如下水平集发展方程^[1]:

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \delta(\varphi(x, t))v(x, \varphi(x, t)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (2)$$

其中 $\varphi(x, t)$ 是水平集函数, x 是图像区域 Ω 中的空间变量, t 是时间变量, $\delta(\varphi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\pi(\epsilon^2 + \varphi^2)}$ 是含有参数 ϵ 的 Dirac 函数^[2], $\varphi_0(x)$ 表示水平集初始轮廓, $v(x, \varphi(x, t))$ 表示速度函数。

图像分割的目的是在 Ω 中找出目标图像的轮廓曲线。在水平集方法中,通过求解(1)式和(2)式得到 $\varphi(x, t)$, 然后由 $\varphi(x, t) = 0$ 即可获得轮廓曲线的位置。

* 收稿日期:2017-09-23 修回日期:2018-09-06 网络出版时间:2018-09-26 13:25

资助项目:重庆市教委科学技术研究项目(No. KJ1600330);重庆市基础科学与前沿技术研究项目(No. cstc2017jcyjAX0176; No. cstc2015jcyjA0309);国家自然科学基金(No. 11471063)

第一作者简介:李淑玲,女,助理研究员,研究方向为图像处理,E-mail:shuling1124@163.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180926.1325.018.html

(1)式中的速度函数可表示为^[2]:

$$v(x, \varphi(x, t)) = \gamma \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \right) - \lambda_1 (I(x) - c_1(\varphi))^2 + \lambda_2 (I(x) - c_2(\varphi))^2, \quad (3)$$

其中, $I(x)$ 是图像灰度, γ, λ_1 和 λ_2 是权系数, $c_1(\varphi) = \frac{\int_{\Omega} I(x) H(\varphi) dx}{\int_{\Omega} H(\varphi) dx}$, $c_2(\varphi) = \frac{\int_{\Omega} I(x) (1 - H(\varphi)) dx}{\int_{\Omega} (1 - H(\varphi)) dx}$, $H(\varphi) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\varphi}{\epsilon} \right) \right]$ 。

2 移动最小二乘近似求解发展方程

定义点 $x \in \Omega$ 的影响域为 $\mathfrak{R}(x) = \{y \in \Omega: |y - x| \leq h\}$, 其中 h 是参数。水平集函数 $\varphi(x, t)$ 在 $\mathfrak{R}(x)$ 上可近似为:

$$\varphi(x, t) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

其中, $p_j(x)$ 是多项式基函数, 通常选为二次基^[11], $a_j(x, t)$ 是待定系数。用 N 个节点 $x_j (j=1, 2, \dots, N)$ 离散 Ω , 记 $\mathfrak{R}(x)$ 内的节点的编号为 $\Lambda(x) \triangleq \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ 。(4)式给出的近似在节点处的加权误差平方和为: $J(x) = \sum_{i \in \Lambda(x)} w_i(x) \left[\sum_{j=1}^m p_j(x_i) a_j(x, t) - \varphi(x_i, t) \right]^2$, 这里 $w_i(x)$ 是具有紧支集 $\mathfrak{R}(x_i)$ 的权函数。利用 $\frac{\partial J(x)}{\partial a_j(x, t)} = 0$ 解出 $a_j(x, t)$, 再代回(4)式可得^[12]:

$$\varphi(x, t) = \sum_{i=1}^N L_i(x) \varphi(x_i, t), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0. \quad (5)$$

其中

$$L_i(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^m p_j(x) [\mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x)]_{jk}, & i = s_k \in \Lambda(x) \\ 0, & i \notin \Lambda(x) \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

这里, 矩阵 $\mathbf{A}(x)$ 和 $\mathbf{B}(x)$ 的元素分别为 $A_{jk}(x) = \sum_{i \in \Lambda(x)} w_i(x) p_j(x_i) p_k(x_i)$ 和 $B_{jk}(x) = w_{s_k}(x) p_j(x_{s_k})$ 。

因为用移动最小二乘近似得到的逼近函数具有较高的光滑度^[12], 所以类似文献[8-10], (3)式中的权系数可取为 $\gamma=0$ 和 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 。将(5)式代入(1)式得到

$$\sum_{i=1}^N L_i(x) \frac{d\varphi(x_i, t)}{dt} + \delta \left(\sum_{i=1}^N L_i(x) \varphi(x_i, t) \right) v \left(x, \sum_{i=1}^N L_i(x) \varphi(x_i, t) \right) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

令(7)式在所有节点上成立, 则

$$\sum_{i=1}^N L_i(x_j) \frac{d\varphi(x_i, t)}{dt} + \delta \left(\sum_{i=1}^N L_i(x_j) \varphi(x_i, t) \right) v \left(x_j, \sum_{i=1}^N L_i(x_j) \varphi(x_i, t) \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad t \geq 0,$$

即得到常微分方程组:

$$\mathbf{R} \frac{d\boldsymbol{\varphi}(t)}{dt} = \mathbf{b}(t, \boldsymbol{\varphi}(t)), \quad t \geq 0, \quad (8)$$

其中未知向量是 $\boldsymbol{\varphi}(t) = [\varphi(x_1, t), \varphi(x_2, t), \dots, \varphi(x_N, t)]^T$, $\mathbf{b}(t, \boldsymbol{\varphi}(t)) = [v_1, v_2, \dots, v_N]^T$, $v_j = -\delta \left(\sum_{i=1}^N L_i(x_j) \varphi(x_i, t) \right) v \left(x_j, \sum_{i=1}^N L_i(x_j) \varphi(x_i, t) \right)$, 系数矩阵是

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} L_1(x_1) & L_2(x_1) & \cdots & L_N(x_1) \\ L_1(x_2) & L_2(x_2) & \cdots & L_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1(x_N) & L_2(x_N) & \cdots & L_N(x_N) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

由(6)式可知, $L_i(x)$ 具有紧支集 $\mathfrak{R}(x_i)$, 即^[12]:

$$L_i(x_j) \neq 0 \Leftrightarrow i \in \Lambda(x_j) \Leftrightarrow x_j \in \mathfrak{R}(x_i).$$

所以式中的 $\mathbf{R}$ 是稀疏矩阵, 这将降低求解方程组的计算时间。

令 $t_0=0$, 时间步长为 $\tau>0$, 则用向前 Euler 方法可将(8)式离散为:

$$\boldsymbol{\varphi}(t_k) = \boldsymbol{\varphi}(t_{k-1}) - \tau \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}(t_{k-1}, \boldsymbol{\varphi}(t_{k-1})), k=1, 2, \dots \quad (10)$$

在(5)式中令 $t=0$ 和 $x=x_j$, 再由(2)式可得 $\mathbf{R}\boldsymbol{\varphi}(0)=[\varphi_0(x_1), \varphi_0(x_2), \dots, \varphi_0(x_N)]^T$, 从而迭代计算(10)式的初始条件为:

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{R}^{-1}[\varphi_0(x_1), \varphi_0(x_2), \dots, \varphi_0(x_N)]^T. \quad (11)$$

因为 $\varphi(x, t)$ 的非零倍数不改变 $\varphi(x, t)=0$ 中的 x 值, 所以可在每次计算(10)式之后令 $\boldsymbol{\varphi}(t_k) = \frac{\boldsymbol{\varphi}(t_k)}{|\boldsymbol{\varphi}(t_k)|}$ 。这样, 迭代终止标准可取为^[8-10] $|\boldsymbol{\varphi}(t_k) - \boldsymbol{\varphi}(t_{k-1})| \leq |\boldsymbol{\varphi}(t_{k-1}) - \boldsymbol{\varphi}(t_{k-2})|, k \geq 2$ 。

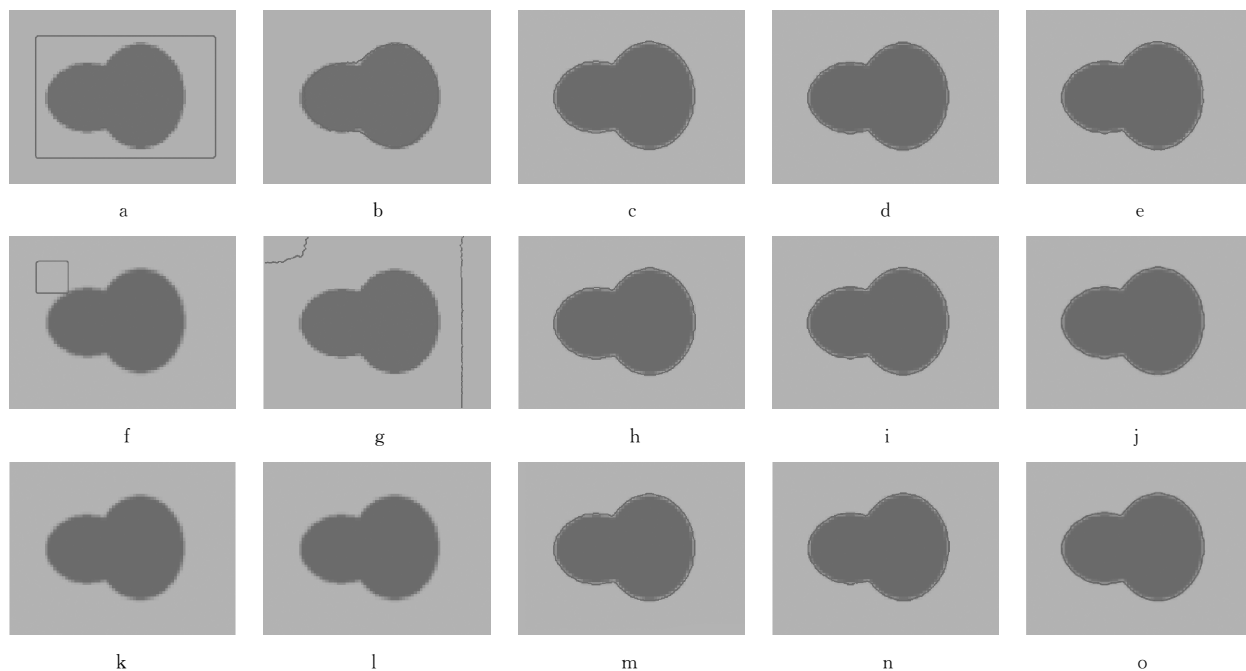
求解(10)式得到 $\boldsymbol{\varphi}(t_k)$ 之后, 即得 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的近似值, 图像区域 Ω 内任一点处 $\varphi(x, t)$ 的数值解可由(5)式计算, 最后再由 $\varphi(x, t)=0$ 即可获得目标图像轮廓曲线的位置。

3 数值实验

使用本文方法数值分割了一些图像, 实验硬件环境为 Intel(R) Core(TM) i7-6500U CPU @ 2.50GHz, 8.00 Gb 内存, 软件为 Matlab 7.0.1。为了比较, 同时用文献[2]的有限差分法、文献[8]的紧支径向基函数法、以及文献[9]的全局径向基函数法分割了这些图像。

图 1 给出了这 4 种方法分割图 1k 时的数值结果。实验时考虑了 3 种不同初始轮廓曲线, 见图 1 第 1 列, 注意图 1k 中没有初始轮廓曲线。本文方法和文献[8-9]的方法在这 3 种情况下都得到了正确的分割结果, 而文献[2]的方法仅在目标物体被初始轮廓完全包围时才分割正确(图 1b)。分割所需计算时间和 Dice 相似性系数(DSC)^[9-10]见表 1。DSC 能定量地评价分割方法的精度, DSC 越接近 1, 分割精度越高。从表 1 可以看出, 本文和文献[8-9]的方法具有相同的精度, 但是本文方法分割时间更少。另外, 本文方法和文献[8-9]的方法形成的系数矩阵的 2-范数条件数分别是 22.62, 227.3 和 4.39×10^{16} , 这说明本文方法具有更高的稳定性。

图 2 给出了本文方法和文献[8-9]的方法分割 5 幅不同图像(图 2 第 1 列)的数值结果。在实验时, 令(2)式中 $\varphi_0(x) \equiv 2$, 即全部没有采用初始轮廓。这 3 种方法都能够正确分割这 5 幅图像, 但是文献[2]的方法分割失败。表 2 给出了分割所需计算时间和相应系数矩阵的 2-范数条件数。对每幅图像, 本文方法不仅分割时间最少, 而且条件数最小, 这说明本文方法具有最快的分割速度和最好的计算稳定性。



注: 第 1 列是原始图像, 其中实线表示初始轮廓曲线; 第 2~5 列分别是文献[2, 8-9]中方法和本文方法的分割结果

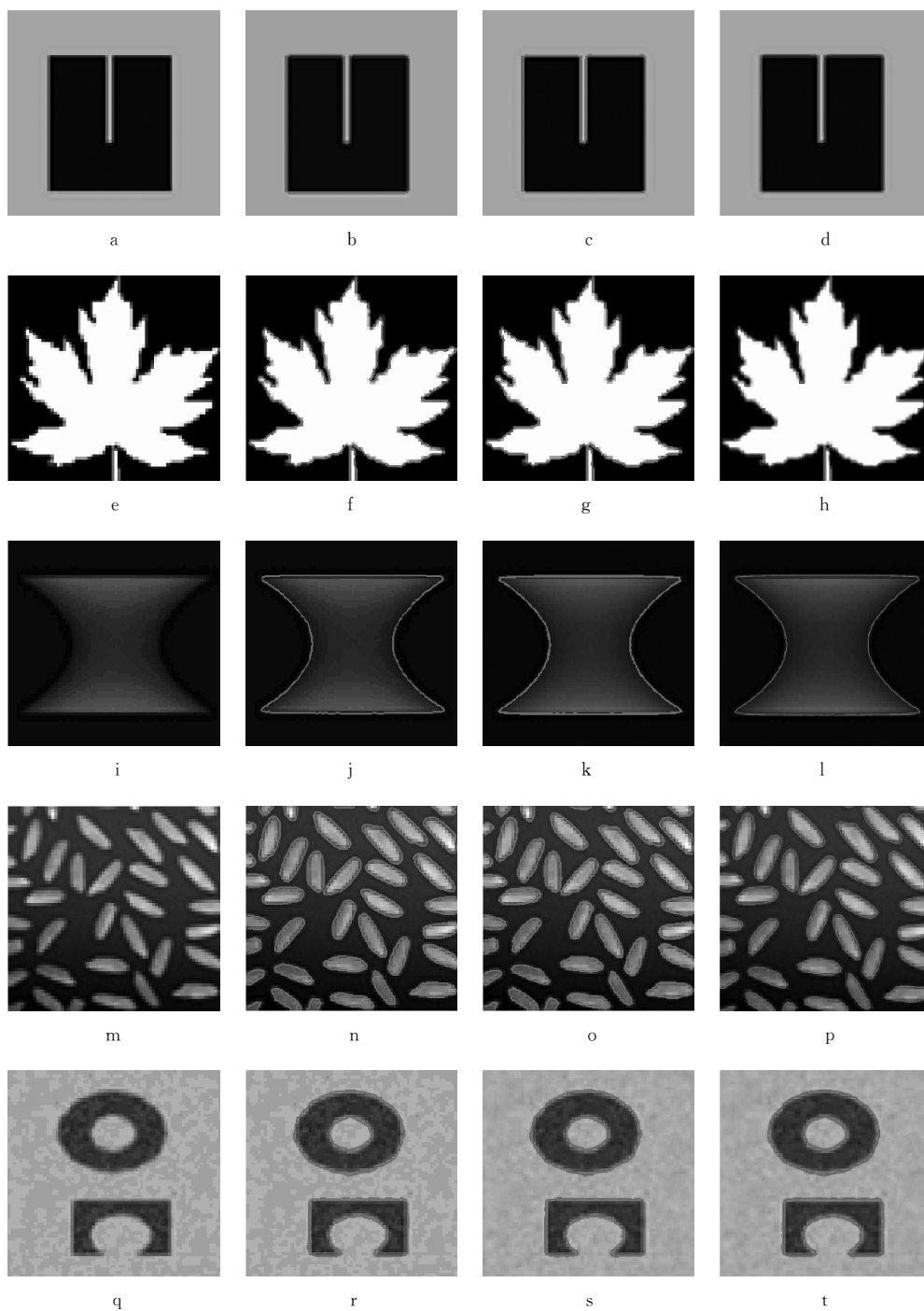
图 1 4 种方法在不同初始轮廓时的分割结果

Fig. 1 Segmentation results of four algorithms with three initial contours

表 1 图 1 中分割结果对应的计算时间和 DSC

Tab. 1 CPU times and DSC values for the segmentation in Fig. 1

初始轮廓	文献[2]中方法		文献[8]中方法		文献[9]中方法		本文方法	
	时间/s	DSC	时间/s	DSC	时间/s	DSC	时间/s	DSC
图 1a	282.1	0.973 7	11.32	0.987 2	9.96	0.987 2	9.48	0.987 2
图 1f	563.9	0.357 1	11.26	0.987 2	10.07	0.987 2	9.47	0.987 2
图 1k	553.9	0.000 0	12.27	0.987 2	10.22	0.985 2	9.60	0.987 2



注:第 1 列是原始图像,第 2~4 列分别是文献[8-9]中方法和本文方法的分割结果。

图 2 3 种方法在没有初始轮廓时分割不同图像的结果

Fig. 2 Segmentation results of three algorithms with no initial contour

4 结论

为了提高水平集发展方程的求解精度和求解速度,本文给出了图像分割的移动最小二乘近似法。相比有限差分法,本文方法得到的逼近函数具有较高的光滑度,不仅克服了水平集初始轮廓对分割结果的影响,而且避免了繁琐耗时的重新初始化算法,还拥有明确的分割终止标准,从而在提高分割效果的同时减少了分割时间。相比径向基函数法,本文方法不仅形成系数矩阵稀疏、条件数很小,而且还具有较高的计算精度,从而具有较好的计算稳定性和较快的分割速度。

参考文献:

- [1] TSAI R, OSHER S. Level set methods and their applications in image science[J]. *Comm Math Sci*, 2003, 1: 623-656.
- [2] CHAN T, VESE L. Active contours without edges [J]. *IEEE T Image Process*, 2001, 10: 266-277.
- [3] LI C M, XU C Y, GUI C F, et al. Level set evolution without re-initialization: a new variational formulation [C]// *IEEE. 2005 IEEE Comput Society Conf Comput Vision Pattern Recog*. San Diego, USA: IEEE, 2005: 430-436.
- [4] WANG Y, HE C J. Adaptive level set evolution starting with a constant function[J]. *Appl Math Model*, 2012, 36: 3217-3228.
- [5] ZHANG K H, ZHANG L, SONG H H, et al. Re-initialization free level set evolution via reaction diffusion[J]. *IEEE T Image Process*, 2013, 22: 258-271.
- [6] HINTERMULLER M, RING W. An inexact Newton-CG-type active contour approach for the minimization of the Mumford-Shah functional[J]. *J Math Imag Vision*, 2004, 20: 19-42.
- [7] 屈健健, 应时辉, 彭亚新. Chan-Vese 模型的共轭梯度算法[J]. *应用数学和计算数学学报*, 2013, 27(4): 469-477.

QU J J, YING S H, PENG Y X. Conjugate gradient algo-

rithm for Chan-Vese model[J]. *Communication on Applied Mathematics and Computation*, 2013, 27(4): 469-477.

- [8] GELAS A, BERNARD O, FRIBOULET D, et al. Compactly supported radial basis functions based collocation method for level-set evolution[J]. *IEEE T Image Process*, 2007, 16: 1873-1887.
- [9] LI S L, LI X L. Radial basis functions and level set method for image segmentation using partial differential equation [J]. *Appl Math Comput*, 2016, 286: 29-40.
- [10] 李淑玲, 陈勇. 基于逆 MQ 函数的图像分割算法[J]. *重庆师范大学学报(自然科学版)*, 2015, 32(2): 111-116.
- LI S L, CHEN Y. An algorithm using inverse multiquadrics functions for image segmentation [J]. *Journal of Chongqing Normal University(Natural Science)*, 2015, 32(2): 111-116.
- [11] LI X L, LI S L. On the stability of the moving least squares approximation and the element-free Galerkin method[J]. *Comput Math Appl*, 2016, 72: 1515-1531.
- [12] LI X L. Error estimates for the moving least-square approximation and the element-free Galerkin method in n -dimensional spaces[J]. *Appl Numer Math*, 2016, 99: 77-97.

表 2 图 2 中分割结果对应的计算时间和系数矩阵的 2-范数条件数

Tab. 2 CPU times and 2-norm condition numbers of the coefficient matrix for the segmentation in Fig. 2

初始 轮廓	文献[8]中方法		文献[9]中方法		本文方法	
	时间/s	条件数	时间/s	条件数	时间/s	条件数
图 2a	14.29	227.4	13.50	5.02×10^{16}	12.95	22.64
图 2e	13.49	227.4	3.33	5.02×10^{16}	13.07	22.64
图 2i	15.36	227.4	13.85	5.02×10^{16}	3.07	22.64
图 2m	12.02	227.3	10.49	4.55×10^{16}	10.01	22.62
图 2q	15.81	227.4	14.76	4.94×10^{16}	14.43	22.64

Application of the Moving Least Squares Approximation to Image Segmentation

LI Shuling, GUO Lan

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] An efficient and stable numerical method is developed for the numerical solution of the level set evolution equation arising in image segmentation. [Methods] The level set function is approximated by the moving least squares approximation, and then the level set evolution equation is discretized into ordinary differential equations that can be solved by the forward Euler's method. [Findings] A moving least squares approximation method for image segmentation is presented. In this method, the stop criterion is explicit, and the coefficient matrix is sparse and has small condition number. [Conclusions] Numerical experimental results reveal that the method requires no re-initialization procedure and conquers the effect by the initial contour of the level set function. Therefore, the developed method is robust to segment images with high precision and fast speed.

Keywords: moving least squares approximation; numerical computation; level set method; image segmentation

(责任编辑 许 甲)