2017 年度重庆市出版专项基金资助栏目　DOI:10.11721/cqnuj20180606

运筹学与控制论

二阶锥权互补问题的非单调非精确光滑牛顿法*

迟晓妮[1]，曾　荣[2]，张所滨[3]，张睿婕[4]

(1. 桂林电子科技大学 数学与计算科学学院 广西密码学与信息安全重点实验室；
2. 桂林电子科技大学 数学与计算科学学院 广西自动检测技术与仪器重点实验室；
3. 桂林电子科技大学 计算机与信息安全学院；
4. 桂林电子科技大学 数学与计算科学学院 广西高校数据分析与计算重点实验室，广西 桂林 541004)

摘要:【目的】将权互补问题引入到二阶锥上，研究二阶锥权互补问题。【方法】基于一个新的带参数的光滑函数，将二阶锥权互补问题转化为一组带参数的非线性方程组，并采用非单调非精确光滑牛顿法进行求解。【结果】在每次迭代中，该算法只需近似地求解一个非线性方程组且只需进行一次非单调线搜索。在适当假设下，证明该算法具有全局和局部二阶收敛性质。【结论】数值结果表明算法的有效性。

关键词:二阶锥权互补问题；非精确光滑牛顿法；非单调线搜索；全局收敛；局部二阶收敛

中图分类号:O221　**文献标志码**:A　**文章编号**:1672-6693(2018)06-0001-08

二阶锥权互补问题(wSOCCP)是指找到一向量对$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$，使得：

$$\boldsymbol{x}\in K,\boldsymbol{s}\in K,\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{s}=\boldsymbol{w},\boldsymbol{s}=F(\boldsymbol{x}),\tag{1}$$

其中 $F(\boldsymbol{x}):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是连续可微函数，$\boldsymbol{w}\in K$ 是一个给定的非零权向量，这里 K 是 n 维二阶锥，即：

$$K=\{\boldsymbol{x}=(x_0,\boldsymbol{x}_1)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}:\|\boldsymbol{x}_1\|\leqslant x_0\},$$

其中$\|\cdot\|$为欧氏范数。在 wSOCCP 的(1)式中当 $\boldsymbol{w}=\mathbf{0}$ 时，wSOCCP 退化为二阶锥互补问题(SOCCP)：

$$\boldsymbol{x}\in K,\boldsymbol{s}\in K,\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{s}=\mathbf{0},\boldsymbol{s}=F(\boldsymbol{x})。\tag{2}$$

wSOCCP 是一类新的优化问题，由 $\mathbf{R}^n$ 上的权互补问题推广到二阶锥上而来。权互补问题的概念最先由 Potra[1] 提出，它是互补问题的推广。当权向量为零向量时，权互补问题退化为互补问题。经济学中许多均衡问题都可以转化为权互补问题求解。例如，Fisher 市场均衡问题可以通过建立非线性互补模型求解或建立线性权互补模型求解。Anstreicher[2] 提出线性规划和加权中心问题也可以通过建立权互补模型求解。另外，Potra 给出了充分线性权互补问题的理论和算法[3]。目前关于权互补问题的研究尚不多见，且仅限于 $\mathbf{R}^n$ 上权互补问题的理论和算法研究，求解方法主要有内点方法[1,3]和光滑牛顿法[4]。光滑牛顿法不同于内点方法，不要求起点和中间迭代点严格可行且在理论上具有很好的收敛性质，因此广泛地应用于求解各类对称锥优化[5-8]和非对称锥优化[9-10]问题。

本文提出了一个新的含参数的光滑函数，基于该光滑函数给出求解 wSOCCP 的非单调非精确光滑牛顿法。该算法对初始点的选取没有限制，且在每次迭代中采用了非精确线搜索以提高光滑牛顿法的效率。为提高找到解的可能性和收敛速度，并能够获得较好的数值结果，该算法运用了非单调线搜索技术。文中给出了算法的全局收敛性和局部二阶收敛性质。数值实验结果表明算法的有效性。

* **收稿日期**:2018-05-06　**修回日期**:2018-09-30　**网络出版时间**:2018-10-25 10:42

资助项目:国家自然科学基金(No. 11861026;No. 71461005)；广西自然科学基金(No. 2016GXNSFBA380102;No. 2014GXNSFFA118001)；广西密码学与信息安全重点实验室研究课题(No. GCIS201618)；广西自动检测技术与仪器重点实验室基金(No. YQ18112)；国家级大学生创新训练计划项目(No. 201810595023)；桂林电子科技大学研究生双语课程(No. YKC201812)

第一作者简介:迟晓妮，女，副教授，博士，研究方向为优化理论与算法，E-mail:chixiaoni@126.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20181025.1042.030.html

1 预备知识

本节简单回顾与二阶锥相伴的欧几里得约当代数的一些基本概念和性质。

对任意 $\boldsymbol{x}=(x_0,\boldsymbol{x}_1)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$ 和 $\boldsymbol{s}=(s_0,\boldsymbol{s}_1)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$,与二阶锥相伴的欧几里得约当代数定义为[11] $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{s}=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s},x_0\boldsymbol{s}_1+s_0\boldsymbol{x}_1)$,其单位元 $\boldsymbol{e}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$,显然 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{s})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}$。对任意 $\boldsymbol{x}=(x_0,\boldsymbol{x}_1)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$,定义箭形矩阵 $\boldsymbol{L}_x=\begin{pmatrix}x_0 & \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{x}_1 & x_0\boldsymbol{I}\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{I}$ 表示 $(n-1)\times(n-1)$ 维单位矩阵。对任意 $\boldsymbol{x}=(x_0,\boldsymbol{x}_1)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$,与二阶锥 K 相伴的 $\mathbf{R}^n$ 中向量的谱分解为[11] $\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{u}^{(1)}+\lambda_2\boldsymbol{u}^{(2)}$,其中 λ_i 和 $\boldsymbol{u}^{(i)}$ 分别为 $\boldsymbol{x}$ 的特征值和相应的特征向量,$\lambda_i=x_0+(-1)^i\|\boldsymbol{x}_1\|$,$\boldsymbol{u}^{(i)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(1,(-1)^{-i}\dfrac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}\right),\ \boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{0}\\ \dfrac{1}{2}(1,(-1)^{-i}\boldsymbol{\omega}),\ \boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}\end{cases}$,$i=1,2$,其中 $\boldsymbol{\omega}\in\mathbf{R}^{n-1}$ 是满足 $\|\boldsymbol{\omega}\|=1$ 的任意非零向量。

性质 1[12] 1) 对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}\in\mathbf{R}^n$,有 $\boldsymbol{L}_x\boldsymbol{s}=\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{L}_{x+s}=\boldsymbol{L}_x+\boldsymbol{L}_s$;

2) $\boldsymbol{x}\in K$ 当且仅当 $\boldsymbol{L}_x$ 是半正定矩阵,$\boldsymbol{x}\in\mathrm{int}K$ 当且仅当 $\boldsymbol{L}_x$ 是正定矩阵;

3) 若 $\boldsymbol{x}\in\mathrm{int}K$,则 $\boldsymbol{L}_x$ 可逆,且它的逆矩阵为 $\boldsymbol{L}_x^{-1}=\dfrac{1}{\det(\boldsymbol{x})}\begin{pmatrix}x_0 & -\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\\ -\boldsymbol{x}_1 & \dfrac{\det(\boldsymbol{x})}{x_0}\boldsymbol{I}+\dfrac{\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}}{x_0}\end{pmatrix}$,其中 $\mathrm{int}K:=\{\boldsymbol{x}=(x_0,\boldsymbol{x}_1)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}:\|\boldsymbol{x}_1\|<x_0\}$,$\det(\boldsymbol{x})=\lambda_1\lambda_2=x_0^2-\|\boldsymbol{x}_1\|^2$。

2 光滑牛顿法

本节基于一个新的带参数的光滑函数,给出求解(1)式的非单调非精确光滑牛顿法。

首先构造(1)式的光滑函数 $\varphi_\tau(\mu,\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}):\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$:

$$\varphi_\tau(\mu,\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}):=(1+\mu+\tau\mu)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s})-\sqrt{[\mu\boldsymbol{x}+(1+\tau\mu)\boldsymbol{s}]^2+[(1+\tau\mu)\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{s}]^2+2\boldsymbol{w}+2\mu^2\boldsymbol{e}},\tag{3}$$

其中 $\tau\geqslant0$ 是一个参数,$\boldsymbol{w}\in K$ 是权向量。取 $\boldsymbol{w}$ 为零向量时,当 $\tau=0$,$\varphi_\tau(\mu,\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})$ 退化为[5]:

$$\varphi_0(\mu,\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}):=(1+\mu)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s})-\sqrt{(\mu\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s})^2+(\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{s})^2+2\mu^2\boldsymbol{e}};$$

当 $\tau=1$,$\varphi_\tau(\mu,\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})$ 变为[6] $\varphi_1(\mu,\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}):=(1+2\mu)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s})-\sqrt{[\mu\boldsymbol{x}+(1+\mu)\boldsymbol{s}]^2+[(1+\mu)\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{s}]^2+2\mu^2\boldsymbol{e}}$。

对任意 $\tau\geqslant0$,显然:

$$\varphi_\tau(0,\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s}-\sqrt{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{s}^2+2\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}\in K,\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{s}=\boldsymbol{w}。\tag{4}$$

易证 $\varphi_\tau(\mu,\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})$ 为 $\varphi_\tau(0,\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})$ 的一个光滑函数。

下面给出光滑函数 $\varphi_\tau(\mu,\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})$ 的强制性。

引理 1 设 $0<\mu_1<\mu_2$,取 $\mu_k\in[\mu_1,\mu_2]$ 且 φ_τ 由(3)式定义,序列 $\{(\mu_k,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{s}_k)\}\subset\mathbf{R}_{++}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 满足:1) $\{(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{s}_k)\}$ 无界;2) 存在一有界序列 $\{(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{v}_k)\}$ 使得 $\{\langle\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{s}_k-\boldsymbol{v}_k\rangle\}$ 有下界,则 $\{\varphi_\tau(\mu_k,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{s}_k)\}$ 无界。

证明 引理 1 的证明与文献[7]中引理 3.2 的证明类似。

令 $\boldsymbol{z}:=(\mu,\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$,定义函数:

$$\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z}):=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^\mu-1\\ F(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{s}\\ \varphi_\tau(\mu,\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})\end{pmatrix},\tag{5}$$

其中 φ_τ 由(3)式定义。由(1)式和(3)~(5)式知 $\boldsymbol{z}^*=(\mu^*,\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{s}^*)$ 是 $\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{0}$ 的解当且仅当 $\mu^*=0$ 且 $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{s}^*)$ 是(1)式的解。 证毕

定理 1 对任意 $\tau\geqslant0$,$\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z})$ 由(5)式定义,则有以下结论成立:

1) $\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z})$ 全局 Lipschitz 连续且强半光滑,在任意点 $\boldsymbol{z}:=(\mu,\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})\in\mathbf{R}_{++}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 处连续可微,且它的雅可比矩阵为:

$$\boldsymbol{H}_\tau'(\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F'(\boldsymbol{x}) & -\boldsymbol{I} \\ (\varphi_\tau)'_\mu(\boldsymbol{z}) & (\varphi_\tau)'_x(\boldsymbol{z}) & (\varphi_\tau)'_s(\boldsymbol{z}) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

其中：

$$(\varphi_\tau)'_\mu(\boldsymbol{z}) = (1+\tau)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s}) - \boldsymbol{L}_{c_\tau}^{-1}[\boldsymbol{L}_{\bar{c}_\tau}(\boldsymbol{x}+\tau\boldsymbol{s}) + \boldsymbol{L}_{\underline{c}_\tau}(\tau\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s}) + 2\mu\boldsymbol{e}],$$

$$(\varphi_\tau)'_x(\boldsymbol{z}) = (1+\mu+\tau\mu)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}_{c_\tau}^{-1}[\mu\boldsymbol{L}_{\bar{c}_\tau} + (1+\tau\mu)\boldsymbol{L}_{\underline{c}_\tau}],$$

$$(\varphi_\tau)'_s(\boldsymbol{z}) = (1+\mu+\tau\mu)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}_{c_\tau}^{-1}[(1+\tau\mu)\boldsymbol{L}_{\bar{c}_\tau} + \mu\boldsymbol{L}_{\underline{c}_\tau}],$$

$$\bar{\boldsymbol{c}}_\tau := \bar{\boldsymbol{c}}_\tau(\mu,\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}) = \mu\boldsymbol{x} + (1+\tau\mu)\boldsymbol{s},\ \underline{\boldsymbol{c}}_\tau := \underline{\boldsymbol{c}}_\tau(\mu,\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}) = (1+\tau\mu)\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{s},$$

$$\boldsymbol{c}_\tau := \boldsymbol{c}_\tau(\mu,\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}) = \sqrt{\bar{\boldsymbol{c}}_\tau^2 + \underline{\boldsymbol{c}}_\tau^2 + 2\boldsymbol{w} + 2\mu^2\boldsymbol{e}}。$$

2）若 F 是连续可微的单调函数，则对任意点 $\boldsymbol{z}=(\mu,\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})\in\mathbf{R}_{++}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{H}_\tau'(\boldsymbol{z})$可逆。

证明　类似文献[13]的定理 3.2，易证结论 1）成立。

2）令 $\Delta\boldsymbol{z}:=(\Delta\mu,\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{s})\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 是 $\boldsymbol{H}_\tau'(\boldsymbol{z})$零空间的任意向量，则 $\boldsymbol{H}_\tau'(\boldsymbol{z})\Delta\boldsymbol{z}=0$。只需证 $\Delta\mu=0$，$\Delta\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 和 $\Delta\boldsymbol{s}=\mathbf{0}$。由(6)式知：

$$\Delta\mu = 0, \tag{7}$$

$$F'(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x} - \Delta\boldsymbol{s} = \mathbf{0}, \tag{8}$$

$$(\varphi_\tau)'_x(\boldsymbol{z})\Delta\boldsymbol{x} + (\varphi_\tau)'_s(\boldsymbol{z})\Delta\boldsymbol{s} = \mathbf{0}, \tag{9}$$

将(9)式两边左乘 $\boldsymbol{L}_{c_\tau}$ 得：

$$\boldsymbol{L}_{c_\tau}(\varphi_\tau)'_x(\boldsymbol{z})\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{L}_{c_\tau}(\varphi_\tau)'_s(\boldsymbol{z})\Delta\boldsymbol{s} = \mathbf{0}。\tag{10}$$

由$(\varphi_\tau)'_x(\boldsymbol{z})$和$(\varphi_\tau)'_s(\boldsymbol{z})$的定义知：

$$\boldsymbol{L}_{c_\tau}(\varphi_\tau)'_x(\boldsymbol{z}) = (1+\mu+\tau\mu)\boldsymbol{L}_{c_\tau} - [\mu\boldsymbol{L}_{\bar{c}_\tau} + (1+\tau\mu)\boldsymbol{L}_{\underline{c}_\tau}],$$

$$\boldsymbol{L}_{c_\tau}(\varphi_\tau)'_s(\boldsymbol{z}) = (1+\mu+\tau\mu)\boldsymbol{L}_{c_\tau} - [(1+\tau\mu)\boldsymbol{L}_{\bar{c}_\tau} + \mu\boldsymbol{L}_{\underline{c}_\tau}]。$$

由 $\boldsymbol{c}_\tau$ 的定义和 $\boldsymbol{w}\in K$ 得 $\boldsymbol{c}_\tau^2-(\bar{\boldsymbol{c}}_\tau^2+\underline{\boldsymbol{c}}_\tau^2)=2\boldsymbol{w}+2\mu^2\boldsymbol{e}\in\operatorname{int}K$，$(1+\mu+\tau\mu)^2\boldsymbol{c}_\tau^2-[\mu\bar{\boldsymbol{c}}_\tau+(1+\tau\mu)\underline{\boldsymbol{c}}_\tau]^2-[(1+\tau\mu)\bar{\boldsymbol{c}}_\tau+\mu\underline{\boldsymbol{c}}_\tau]^2=2\mu(1+\tau\mu)(\bar{\boldsymbol{c}}_\tau-\underline{\boldsymbol{c}}_\tau)^2+2(1+\mu+\tau\mu)^2(\boldsymbol{w}+\mu^2\boldsymbol{e})\in\operatorname{int}K$。

从而由文献[14]的引理 3.5 知 $\boldsymbol{L}_{c_\tau}(\varphi_\tau)'_x(\boldsymbol{z})$，$\boldsymbol{L}_{c_\tau}(\varphi_\tau)'_s(\boldsymbol{z})$以及$[\boldsymbol{L}_{c_\tau}(\varphi_\tau)'_x(\boldsymbol{z})][\boldsymbol{L}_{c_\tau}(\varphi_\tau)'_s(\boldsymbol{z})]$的对称部分均正定必可逆。将(10)式两边左乘 $\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{L}_{c_\tau}(\varphi_\tau)'_s(\boldsymbol{z})]^{-1}$得，$\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{L}_{c_\tau}(\varphi_\tau)'_s(\boldsymbol{z})]^{-1}[\boldsymbol{L}_{c_\tau}(\varphi_\tau)'_x(\boldsymbol{z})]\Delta\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{s}=0$，又由 F 的单调性和(8)式知$\langle\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{s}\rangle=\langle\Delta\boldsymbol{x},F'(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}\rangle\geqslant 0$，故：

$$\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{L}_{c_\tau}(\varphi_\tau)'_s(\boldsymbol{z})]^{-1}[\boldsymbol{L}_{c_\tau}(\varphi_\tau)'_x(\boldsymbol{z})]\Delta\boldsymbol{x}\leqslant 0。\tag{11}$$

令$\overline{\Delta\boldsymbol{x}}=[\boldsymbol{L}_{c_\tau}(\varphi_\tau)'_s(\boldsymbol{z})]^{-1}\Delta\boldsymbol{x}$，因为$[\boldsymbol{L}_{c_\tau}(\varphi_\tau)'_x(\boldsymbol{z})][\boldsymbol{L}_{c_\tau}(\varphi_\tau)'_s(\boldsymbol{z})]$对称部分正定，则：

$$\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{L}_{c_\tau}(\varphi_\tau)'_s\,\boldsymbol{z})]^{-1}[\boldsymbol{L}_{c_\tau}(\varphi_\tau)'_x(\boldsymbol{z})]\Delta\boldsymbol{x} = \overline{\Delta\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{L}_{c_\tau}(\varphi_\tau)'_x(\boldsymbol{z})][\boldsymbol{L}_{c_\tau}(\varphi_\tau)'_s(\boldsymbol{z})]\overline{\Delta\boldsymbol{x}}\geqslant 0。$$

由(11)式有$\overline{\Delta\boldsymbol{x}}=\mathbf{0}$，则 $\Delta\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，从而由(8)式得 $\Delta\boldsymbol{s}=\mathbf{0}$。　　证毕

定义函数 $f_\tau:\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}_+$ 为：

$$f_\tau(\boldsymbol{z}) := \|\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z})\|^2。\tag{12}$$

下给出求解 wSOCCP 的非单调非精确光滑牛顿法。

算法 1　求解 wSOCCP 的非单调非精确光滑牛顿法。

步骤 0：选择常数 $\delta\in(0,1)$，$\sigma\in(0,0.5)$，$\tau\geqslant 0$，$M\geqslant 0$ 和 $\mu_0>0$。令 $\boldsymbol{z}_0:=(\mu_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{s}_0)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 为任意的初始点。取 $\gamma\in(0,1)$和 $v:=\|\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z}_0)\|+1$ 使得 $\gamma\mu_0 v<1$。设序列$\{\vartheta_k\}$满足 $0\leqslant\vartheta_k\leqslant\vartheta$，$0<\vartheta<1-\gamma\mu_0 v$。置 $C_0:=f_\tau(\boldsymbol{z}_0)$，$\beta(\boldsymbol{z}_0):=\gamma\min\{1,f_\tau(\boldsymbol{z}_0)\}$和 $k:=0$。

步骤 1：若$\|\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z}_k)\|=0$，停止。否则，令：

$$\beta(\boldsymbol{z}_k) := \gamma\min\{1, f_\tau(\boldsymbol{z}_k), \beta(\boldsymbol{z}_{k-1})\}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}_k) := (\mu_0\mathrm{e}^{\mu_k}\beta(\boldsymbol{z}_k), r(\boldsymbol{z}_k))^{\mathrm{T}}, \tag{14}$$

其中$\|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{z}_k)\|\leqslant\vartheta_k\min\{1,f_\tau(\boldsymbol{z}_k)\}$。

步骤 2：解方程组：

$$\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z}_k)+\boldsymbol{H}_\tau'(\boldsymbol{z}_k)\Delta\boldsymbol{z}_k=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}_k), \tag{15}$$

求得搜索方向 $\Delta\boldsymbol{z}_k:=(\Delta\mu_k,\Delta\boldsymbol{x}_k,\Delta\boldsymbol{s}_k)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$。

步骤 3:设 l_k 为满足

$$f_\tau(\boldsymbol{z}_k+\lambda_k\Delta\boldsymbol{z}_k)\leqslant[1-2\sigma(1-\gamma\mu_0 v-\vartheta_k)\delta^{l_k}]C_k \tag{16}$$

的最小非负整数 l,令步长 $\lambda_k=\delta^{l_k}$。

步骤 4:令 $\boldsymbol{z}_{k+1}:=\boldsymbol{z}_k+\lambda_k\Delta\boldsymbol{z}_k,m_k:=\begin{cases}k,k\leqslant M\\ \max\{k-M,M\},k>M\end{cases}$ 和

$$C_{k+1}=\frac{(k-m_k)C_k+f_\tau(\boldsymbol{z}_{k+1})}{k-m_k+1}。 \tag{17}$$

置 $k:=k+1$,转步骤 1。

注 1) 算法 1 中将 SOCCP 的非单调线搜索[8]推广到 wSOCCP 中,以便算法取得更好的数值结果。

2) 若选取 $M=0$ 或者 M 充分大,则非单调线搜索(16)式变为单调线搜索。

3) 若选取 M 为一固定正整数,则算法 1 的迭代过程分为以下 3 种情况:

(a) 若 $k\leqslant M$,有 $m_k=k$ 且 $C_{k+1}=f_\tau(\boldsymbol{z}_{k+1})$,则算法 1 中的非单调搜索(16)式变为单调线搜索。

(b) 若 $M<k<2M$,则 $m_k=M$。由(17)式得 $C_{k+1}=\dfrac{(k-M)C_k+f_\tau(\boldsymbol{z}_{k+1})}{k-M+1}=\dfrac{\sum_{i=M+1}^{k+1}f_\tau(\boldsymbol{z}_i)}{k-M+1}$,即 C_{k+1} 是 $f_\tau(\boldsymbol{z}_{k+1})$,$f_\tau(\boldsymbol{z}_k),\cdots,f_\tau(\boldsymbol{z}_{M+1})$的平均值。

(c) 若 $k\geqslant 2M$,则 $m_k=k-M$,由(17)式得 $C_{k+1}=\dfrac{MC_k+f_\tau(\boldsymbol{z}_{k+1})}{M+1}$,即 C_{k+1} 是 $f_\tau(\boldsymbol{z}_{k+1})$和 C_k 的凸组合。

引理 2[15] 对任意 $\mu\geqslant 0$ 有 $-\mu\leqslant\dfrac{1-\mathrm{e}^\mu}{\mathrm{e}^\mu}\leqslant-\mu\mathrm{e}^{-\mu}$。

引理 3 设$\{\boldsymbol{z}_k=(\mu_k,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{s}_k)\}$为算法 1 产生的迭代序列,对任意 $k\geqslant 0$ 有 $f_\tau(\boldsymbol{z}_{k+1})\leqslant C_{k+1}\leqslant C_k$。

证明 由 m_k 的定义知对任意$M\geqslant 0$,当 $k\leqslant M$ 时 $m_k=k$,有 $0<k-m_k+1=1\leqslant M+1$;当 $M<k<2M$ 时 $m_k=M$,有 $0<k-m_k+1=k-M+1\leqslant M+1$;当 $k\geqslant 2M$ 时 $m_k=k-M$,有 $0<k-m_k+1=M+1\leqslant M+1$。故对任意 $k\geqslant 0$,有 $0<k-m_k+1\leqslant M+1$。因为 $0\leqslant\vartheta_k\leqslant\vartheta<1-\gamma\mu_0 v$,由(16)和(17)式得:

$$C_{k+1}=\frac{(k-m_k)C_k+f_\tau(\boldsymbol{z}_{k+1})}{k-m_k+1}\leqslant\frac{(k-m_k)C_k+[1-2\sigma(1-\gamma\mu_0 v-\vartheta_k)\lambda_k]C_k}{k-m_k+1}=C_k-\frac{2\sigma(1-\gamma\mu_0 v-\vartheta_k)\lambda_k C_k}{k-m_k+1}\leqslant C_k。 \tag{18}$$

从而 $f_\tau(\boldsymbol{z}_{k+1})=(k-m_k+1)C_{k+1}-(k-m_k)C_k\leqslant(k-m_k+1)C_{k+1}-(k-m_k)C_{k+1}=C_{k+1}$,所以 $f_\tau(\boldsymbol{z}_{k+1})\leqslant C_{k+1}\leqslant C_k$ 对任意 $k\geqslant 0$ 成立。 证毕

定理 2 假设 F 为连续可微的单调函数,$\{\boldsymbol{z}_k=(\mu_k,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{s}_k)\}$是算法 1 生成的迭代序列,则算法 1 适定,且对任意 $k\geqslant 0$ 有 $\mu_k>0$ 和 $\boldsymbol{z}_k\in\Omega$ 成立,其中 $\Omega:=\{\boldsymbol{z}_k=(\mu_k,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{s}_k)\in\mathbf{R}_{++}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n:\mu_k\geqslant\mu_0\beta(\boldsymbol{z}_k)\}$。

证明 下面分 3 步证明。

1) 先用数学归纳法证明对任意 $k\geqslant 0$ 有 $\mu_k>0$。假设 $\mu_k>0$,由(5),(6),(14)和(15)式得

$$\Delta\mu_k=\frac{1-\mathrm{e}^{\mu_k}}{\mathrm{e}^{\mu_k}}+\mu_0\beta(\boldsymbol{z}_k), \tag{19}$$

对任意 $k\geqslant 0$,由(13)式知:

$$0\leqslant\beta(\boldsymbol{z}_k)\leqslant\gamma\sqrt{f_\tau(\boldsymbol{z}_k)}=\gamma\|\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z}_k)\|。 \tag{20}$$

因此由引理 2,(19)和(20)式得对任意 $\lambda_k\in(0,1]$有:

$$\mu_{k+1}=\mu_k+\lambda_k\Delta\mu_k=\mu_k+\lambda_k\left(\frac{1-\mathrm{e}^{\mu_k}}{\mathrm{e}^{\mu_k}}+\mu_0\beta(\boldsymbol{z}_k)\right)\geqslant(1-\lambda_k)\mu_k+\lambda_k\mu_0\beta(\boldsymbol{z}_k)>0。 \tag{21}$$

又由 $\mu_0>0$,故对任意的 $k\geqslant 0$ 有 $\mu_k>0$。

2) 其次证算法 1 的适定性。根据 1)的证明对任意 $k\geqslant 0$ 有 $\mu_k>0$,则由定理 1 知,对任意 $k>0$,$\boldsymbol{H}_\tau'(\boldsymbol{z}_k)$可逆,故步 2 是适定的。

对任意 $\lambda_k\in(0,1]$,定义:

$$p(\lambda):=f_\tau(\boldsymbol{z}_k+\lambda\Delta\boldsymbol{z}_k)-f_\tau(\boldsymbol{z}_k)-\lambda f'_\tau(\boldsymbol{z}_k)\Delta\boldsymbol{z}_k。\tag{22}$$

由定理 1 和(12)式知 f_τ 在 $\boldsymbol{z}_k\in\mathbf{R}_{++}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 处连续可微,故 $|p(\lambda)|=o(\lambda)$。由(5),(12)式,引理 3 和 v 的定义易知 $\mathrm{e}^{\mu_k}\leqslant\sqrt{f_\tau(\boldsymbol{z}_k)}+1\leqslant\sqrt{C_k}+1\leqslant\sqrt{C_0}+1=\|\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z}_0)\|+1=v$。由 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{z}_k)$的定义有:

$$\|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{z}_k)\|\leqslant\vartheta_k\sqrt{f_\tau(\boldsymbol{z}_k)}=\vartheta_k\|\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z}_k)\|,\tag{23}$$

结合(12),(14),(15),(20),(22),(23)式和引理 3 得:

$$\begin{gathered}f_\tau(\boldsymbol{z}_k+\lambda\Delta\boldsymbol{z}_k)=f_\tau(\boldsymbol{z}_k)+\lambda f'_\tau(\boldsymbol{z}_k)\Delta\boldsymbol{z}_k+p(\lambda)=f_\tau(\boldsymbol{z}_k)+2\lambda\boldsymbol{H}_\tau^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{z}_k)\boldsymbol{H}'_\tau(\boldsymbol{z}_k)\Delta\boldsymbol{z}_k+o(\lambda)=\\ f_\tau(\boldsymbol{z}_k)+2\lambda\boldsymbol{H}_\tau^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{z}_k)(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}_k)-\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z}_k))+o(\lambda)\leqslant(1-2\lambda)f_\tau(\boldsymbol{z}_k)+2\lambda\|\boldsymbol{H}_\tau^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{z}_k)\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}_k)\|+o(\lambda)\leqslant\\ (1-2\lambda)f_\tau(\boldsymbol{z}_k)+2\lambda\|\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z}_k)\|(\mu_0\mathrm{e}^{\mu_k}\beta(\boldsymbol{z}_k)+\|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{z}_k)\|)+o(\lambda)\leqslant\\ (1-2\lambda)f_\tau(\boldsymbol{z}_k)+2\lambda\|\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z}_k)\|(\gamma\mu_0\mathrm{e}^{\mu_k}\|\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z}_k)\|+\vartheta_k\|\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z}_k)\|)+o(\lambda)\leqslant\\ (1-2\lambda)f_\tau(\boldsymbol{z}_k)+2\lambda(\gamma\mu_0v+\vartheta_k)\|\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z}_k)\|^2+o(\lambda)=[1-2(1-\gamma\mu_0v-\vartheta_k)\lambda]f_\tau(\boldsymbol{z}_k)+o(\lambda)\leqslant\\ [1-2(1-\gamma\mu_0v-\vartheta_k)\lambda]C_k+o(\lambda)。\end{gathered}$$

又由 $0\leqslant\vartheta_k\leqslant\vartheta<1-\gamma\mu_0v$,故存在一个正数$\bar{\lambda}\in(0,1)$使得对任意 $\lambda\in(0,\bar{\lambda}]$和 $\sigma\in(0,0.5)$有 $f_\tau(\boldsymbol{z}_k+\lambda\Delta\boldsymbol{z}_k)\leqslant[1-2\sigma(1-\gamma\mu_0v-\vartheta_k)\lambda]C_k$,所以步骤 3 适定,故算法 1 适定。

3) 最后用数学归纳法证明。对任意 $k\geqslant0$ 有 $\boldsymbol{z}_k\in\Omega$。由(13)式知$\{\beta(\boldsymbol{z}_k)\}$为单调递减序列且 $\beta(\boldsymbol{z}_0)=\gamma\min\{1,f_\tau(\boldsymbol{z}_0)\}\leqslant\gamma<1$,则 $\mu_0\geqslant\mu_0\gamma\geqslant\mu_0\gamma\min\{1,f_\tau(\boldsymbol{z}_0)\}=\mu_0\beta(\boldsymbol{z}_0)$,即 $\boldsymbol{z}_0\in\Omega$。假设 $\boldsymbol{z}_k\in\Omega$,即 $\mu_k\geqslant\mu_0\beta(\boldsymbol{z}_k)$,则由(21)式得 $\mu_{k+1}\geqslant(1-\lambda_k)\mu_k+\lambda_k\mu_0\beta(\boldsymbol{z}_k)\geqslant(1-\lambda_k)\mu_0\beta(\boldsymbol{z}_k)+\lambda_k\mu_0\beta(\boldsymbol{z}_k)=\mu_0\beta(\boldsymbol{z}_k)\geqslant\mu_0\beta(\boldsymbol{z}_{k+1})$。因此对任意 $k\geqslant0$ 有 $\boldsymbol{z}_k\in\Omega$。

证毕

3 收敛性分析

下面对算法 1 进行全局收敛性和局部二阶收敛性分析。

引理 4　设 F 为连续可微的单调函数,$f_\tau(\mu,\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})$由(12)式定义且 $\mu_1,\mu_2\in\mathbf{R}_{++}$,$\mu_1<\mu_2$,则对 $\mu\in[\mu_1,\mu_2]$有

$$\lim_{\|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})\|\to+\infty}\|f_\tau(\mu,\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})\|=+\infty。$$

证明　反证法。假设存在一无界序列$\{(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{s}_k)\}$,使得$\{f_\tau(\mu,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{s}_k)\}$有界。由(5),(12)式有:

$$\|f_\tau(\mu,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{s}_k)\|=\|\mathrm{e}^{\mu}-1\|^2+\|\boldsymbol{s}_k-F(\boldsymbol{x}_k)\|^2+\|\varphi_\tau(\mu,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{s}_k)\|^2,$$

所以$\{\boldsymbol{s}_k-F(\boldsymbol{x}_k)\}$和$\{\varphi_\tau(\mu,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{s}_k)\}$有界。令 $g(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{s}_k)=\boldsymbol{s}_k-F(\boldsymbol{x}_k)$,则$\{g(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{s}_k)\}$有界且 $\boldsymbol{s}_k=g(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{s}_k)+F(\boldsymbol{x}_k)$。设$\{\boldsymbol{u}_k\}$为任一有界序列,由于 F 是连续可微的单调函数,则$\{F(\boldsymbol{u}_k)\}$有界。又令 $\boldsymbol{v}_k=g(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{s}_k)+F(\boldsymbol{u}_k)$,从而$\{\boldsymbol{v}_k\}$有界,故$\langle\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{s}_k-\boldsymbol{v}_k\rangle=\langle\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{s}_k-g(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{s}_k)-F(\boldsymbol{u}_k)\rangle=\langle\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{u}_k,F(\boldsymbol{x}_k)-F(\boldsymbol{u}_k)\rangle\geqslant0$。因此由引理 1 知$\{f_\tau(\mu,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{s}_k)\}$无界,这与$\{f_\tau(\mu,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{s}_k)\}$有界矛盾。

证毕

引理 5　设序列$\{C_k\}$由算法 1 产生,则$\{C_k\}$收敛。若$\{C_k\}$不收敛到 0,则$\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=0$。

证明　根据引理 3 知序列$\{C_k\}$单调递减且有下界,因此$\{C_k\}$收敛,即存在常数 $C^*\geqslant0$ 使得$\lim\limits_{k\to\infty}C_k=C^*$。假设 $C^*>0$,下证$\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=0$。反证法,若存在常数 ε,对充分大的 k 有 $\lambda_k\geqslant\varepsilon>0$。因 $0\leqslant\vartheta_k\leqslant\vartheta<1-\gamma\mu_0v$,由(18)式知:

$$C_{k+1}\leqslant C_k-\frac{2\sigma(1-\gamma\mu_0v-\vartheta_k)\lambda_kC_k}{k-m_k+1}\leqslant C_k-\frac{2\sigma(1-\gamma\mu_0v-\vartheta)\lambda_kC_k}{k-m_k+1}\leqslant C_k-\frac{2\sigma(1-\gamma\mu_0v-\vartheta)\varepsilon C_k}{k-m_k+1}。\tag{24}$$

对(24)式两边取极限得$\lim\limits_{k\to\infty}C_k=C^*=0$,这与 $C^*>0$ 矛盾,因此$\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=0$。

证毕

定理 3　设 F 是连续可微的单调函数,且$\{\boldsymbol{z}_k\}$是算法 1 产生的迭代序列,则$\lim\limits_{k\to\infty}f_\tau(\boldsymbol{z}_k)=0$ 且$\{\boldsymbol{z}_k\}$的任一聚点是(1)式的解。

证明　由(13)式知序列$\{\beta(\boldsymbol{z}_k)\}$单调递减且有下界,必收敛。又由引理 5 知$\{C_k\}$收敛,因此存在常数 $\beta^*\geqslant0$,$C^*\geqslant0$ 使得$\lim\limits_{k\to\infty}\beta(\boldsymbol{z}_k)=\beta^*$,$\lim\limits_{k\to\infty}C_k=C^*$。运用反证法,假设 $\beta^*>0$。由(12)式,引理 2 和引理 3 有:

$$0\leqslant\mu_k^2\leqslant(\mathrm{e}^{\mu_k}-1)^2\leqslant f_\tau(\boldsymbol{z}_k)\leqslant C_k\leqslant C_0。\tag{25}$$

由引理 4 知$\{\boldsymbol{z}_k\}$有界,从而$\{\boldsymbol{z}_k=(\mu_k,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{s}_k)\}$至少存在一个聚点$\{\boldsymbol{z}^*=(\mu^*,\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{s}^*)\}$。不失一般性,假设$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{z}_k=\boldsymbol{z}^*$。由(25)式知$\{f_\tau(\boldsymbol{z}_k)\}$有界,故存在一个收敛子列$\{f_\tau(\boldsymbol{z}_k)\}_{k\in\tilde{J}}$,$\tilde{J}\subseteq\{0,1,\cdots,k\}$。由定理 1 和(12)式知 $f_\tau(\cdot)$连

续,则$\lim\limits_{\bar{J}\in k\to\infty} f_\tau(\boldsymbol{z}_k)=f_\tau(\boldsymbol{z}^*)$。又由(13)式和$\beta^*>0$有$f_\tau(\boldsymbol{z}^*)>0$。对任意$\boldsymbol{z}_k\in\Omega$,由定理2得:

$$\mu^*=\lim_{k\to\infty}\mu_k\geqslant\mu_0\beta^*>0, \tag{26}$$

则由(25)式有$C^*>0$,故根据引理5得$\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=0$。对充分大的$k$,由算法1步3和引理3知$\hat{\lambda}_k:=\dfrac{\lambda_k}{\delta}$不满足(16)式,即$f_\tau(\boldsymbol{z}_k+\hat{\lambda}_k\Delta\boldsymbol{z}_k)>[1-2\sigma(1-\gamma\mu_0 v-\vartheta_k)\hat{\lambda}_k]C_k\geqslant[1-2\sigma(1-\gamma\mu_0 v-\vartheta_k)\hat{\lambda}_k]f_\tau(\boldsymbol{z}_k)$,从而:

$$\frac{f_\tau(\boldsymbol{z}_k+\hat{\lambda}_k\Delta\boldsymbol{z}_k)-f_\tau(\boldsymbol{z}_k)}{\hat{\lambda}_k}\geqslant-2\sigma(1-\gamma\mu_0 v-\vartheta_k)f_\tau(\boldsymbol{z}_k)。\tag{27}$$

由(26)式和定理1可得$\boldsymbol{H}'_\tau(\boldsymbol{z}^*)$存在且可逆,故存在$\boldsymbol{z}^*$的一个闭邻域$\mathbf{N}(\boldsymbol{z}^*)$使得对任意$\boldsymbol{z}\in\mathbf{N}(\boldsymbol{z}^*)$,有$\mu>0$且$\boldsymbol{H}'_\tau(\boldsymbol{z})$可逆。对任意$\boldsymbol{z}\in\mathbf{N}(\boldsymbol{z}^*)$,令$\Delta z:=(\Delta\mu,\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{s})\in\mathbf{R}^{1+n+n}$是方程组

$$\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z})+\boldsymbol{H}'_\tau(\boldsymbol{z})\Delta\boldsymbol{z}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}) \tag{28}$$

的解。由$0\leqslant\vartheta_k\leqslant\vartheta$,则$\{\vartheta_k\}$存在收敛子列,不妨设$\vartheta_k\to\vartheta^*\leqslant\vartheta<1-\gamma\mu_0 v$。对(27)式两边取极限,由(12),(14),(15),(20)和(23)式有:

$$\begin{aligned}-2\sigma(1-\gamma\mu_0 v-\vartheta^*)f_\tau(\boldsymbol{z}^*)&\leqslant2\boldsymbol{H}_\tau^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{z}^*)\boldsymbol{H}'_\tau(\boldsymbol{z}^*)\Delta\boldsymbol{z}^*=2\boldsymbol{H}_\tau^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{z}^*)(-\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z}^*)+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}^*))\leqslant\\&-2f_\tau(\boldsymbol{z}^*)+2\|\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z}^*)\|(\mu_0\mathrm{e}^{\mu^*}\beta(\boldsymbol{z}^*)+\|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{z}^*)\|)\leqslant\\&-2f_\tau(\boldsymbol{z}^*)+2\|\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z}^*)\|(\gamma\mu_0 v\|\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z}^*)\|+\vartheta^*\|\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z}^*)\|)=-2(1-\gamma\mu_0 v-\vartheta^*)f_\tau(\boldsymbol{z}^*)。\end{aligned}$$

又由$f_\tau(\boldsymbol{z}^*)>0$,从而$\sigma\geqslant1$,这与$\sigma\in(0,0.5)$矛盾。因此$\beta^*=0$,由(13)式得$\lim\limits_{k\to\infty}f_\tau(\boldsymbol{z}_k)=0$,则$\boldsymbol{z}^*$是(1)式的一个解。 证毕

定理4 设F是连续可微的单调函数,$\boldsymbol{z}^*$是算法1产生的迭代序列$\{\boldsymbol{z}_k\}$的任意聚点,若任意$\boldsymbol{V}\in\partial\boldsymbol{H}_\tau(\boldsymbol{z}^*)$非奇异,则$\{\boldsymbol{z}_k\}$局部二阶收敛到$\boldsymbol{z}^*$,即$\|\boldsymbol{z}_{k+1}-\boldsymbol{z}^*\|=O(\|\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{z}^*\|^2)$且$\mu_{k+1}=O(\mu_k^2)$。

定理4的证明与文献[16]中定理8的证明类似。

4 数值算例

为验证算法1的可行性和有效性,运用Matlab R2015a在Intel(R) core(TM) i5-6500 CPU3.20 GHz 8.0 GB内存,Windows 7操作系统的计算机上进行数值实验。

在所有试验中,针对每种情形均随机产生10个问题进行求解。Iter表示平均迭代次数,ACPU表示平均CPU时间。算法1中参数取值为:$\mu_0=0.1,\delta=0.5,\sigma=0.04,\gamma=0.001,\tau=0.2,\vartheta_k=\dfrac{1}{2^{k+1}}$,令$\boldsymbol{0}:=(0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{e}:=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{1}:=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,以$\|\boldsymbol{H}(z)\|\leqslant10^{-8}$为终止准则。

首先,给定权向量$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{e}$,随机生成规模$n$从100到600的wSOCCP,且随机产生矩阵$\boldsymbol{N}\in\mathbf{R}^{n\times n}$和向量$\boldsymbol{q}\in\mathbf{R}^n$,令$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N},\boldsymbol{s}=\boldsymbol{Mx}+\boldsymbol{q}$。取$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{s}_0)=(\boldsymbol{e},\boldsymbol{e})$为初始点,表1给出了算法1采用单调线搜索和非单调线搜索求解不同规模的wSOCCP的数值结果。数值结果表明算法1采用非单调线搜索所需的CPU时间和平均迭代次数比算法1采用单调线搜索所用的CPU时间和平均迭代次数少。

表1 算法1采用单调线搜索和非单调线搜索求解wSOCCP的数值结果

Tab.1 Numerical results of Algorithm 1 by the monotone and nonmonotone linear searches for solving wSOCCP

n	$M=0$		$M=2$	
	ACPU	Iter	ACPU	Iter
100	0.013 0	5.00	0.008 3	5.00
200	0.057 4	6.00	0.037 6	5.80
300	0.096 1	6.00	0.093 9	6.00
400	0.279 0	6.20	0.261 2	6.00
500	0.550 0	7.00	0.526 9	6.90
600	0.815 5	7.00	0.803 1	7.00

其次，当(1)式中权向量 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ 时，(1)式退化为(2)式。选取 $n=100$ 和 $M=2$，运用算法 1 求解不同初始点的线性 SOCCP 和 wSOCCP。表 2 表明算法 1 对初始点的选取没有限制。

表 2　算法 1 求解不同初始点的线性 SOCCP 和 wSOCCP 的数值结果

Tab. 2　Numerical results of Algorithm 1 for solving linear SOCCP and wSOCCP with different initial points

$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{s}_0)$	SOCCP($\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$)		wSOCCP($\boldsymbol{w}=\boldsymbol{e}$)	
	ACPU	Iter	ACPU	Iter
$(\boldsymbol{e},\boldsymbol{0})$	0.013 1	6.00	0.011 8	5.60
$(\boldsymbol{0},\boldsymbol{e})$	0.011 9	5.70	0.009 6	5.00
$(\boldsymbol{1},\boldsymbol{1})$	0.013 3	6.10	0.012 0	6.00
$10\times(\boldsymbol{1},\boldsymbol{1})$	0.013 5	6.70	0.013 2	6.60
$100\times(\boldsymbol{1},\boldsymbol{1})$	0.014 7	7.10	0.014 6	6.80

最后考虑非线性 wSOCCP，其中 $K=K^4$ 和 $F:\boldsymbol{R}^4\to\boldsymbol{R}^4$ 定义为：$F(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{x_1}+\boldsymbol{x}_1^2\\ \mathrm{e}^{x_2}+\boldsymbol{x}_2^2\\ \mathrm{e}^{x_3}+\boldsymbol{x}_3^2\\ \mathrm{e}^{x_4}+\boldsymbol{x}_4^2\end{pmatrix}$。

表 3　算法 1 求解不同初始点的非线性 SOCCP 和 wSOCCP 的数值结果

Tab. 3　Numerical results of Algorithm 1 for solving nonlinear SOCCP and wSOCCP with different initial points

$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{s}_0)$	SOCCP($\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$)		wSOCCP($\boldsymbol{w}=\boldsymbol{e}$)	
	ACPU	Iter	ACPU	Iter
$(\boldsymbol{e},\boldsymbol{0})$	0.004 5	6.00	0.003 8	5.00
$(\boldsymbol{0},\boldsymbol{e})$	0.003 3	5.00	0.001 9	4.00
$(\boldsymbol{e},\boldsymbol{e})$	0.003 1	5.00	0.001 5	4.00
$0.5\times(\boldsymbol{e},\boldsymbol{e})$	0.004 0	5.00	0.001 8	4.00

运用算法 1 解得 wSOCCP 的一个解为 $\boldsymbol{x}^*=(0.667\ 335,-0.235\ 678,-0.235\ 678,-0.235\ 678)^{\mathrm{T}}$ 和 SOCCP 的一个解为 $\boldsymbol{x}^*=(0.327\ 830,-0.189\ 273,-0.189\ 273,-0.189\ 273)^{\mathrm{T}}$。表 3 给出了算法 1 运用不同初始点求解非线性 SOCCP 和 wSOCCP 的数值结果。数值结果表明运用算法 1 能有效地求解非线性 SOCCP 和 wSOCCP，且不同初始点对算法 1 所需的 CPU 时间和平均迭代次数影响不大。

综合表 1～3 的数值结果知，运用算法 1 求解(1)式所需的 CPU 时间较少且平均迭代次数都在 10 次以内，选取不同初始点对所需 CPU 时间和平均迭代次数影响较小，因此算法 1 可行有效，且相对比较稳定。

参考文献：

[1] POTRA F A. Weighted complementarity problems a new paradigm for computing equilibria[J]. SIAM Journal on Optimization, 2012, 22(4): 1634-1654.

[2] ANSTREICHER K M. Interior-point algorithms for a generalization of linear programming and weighted centring [J]. Optimization Methods and Software, 2012, 27(4/5): 605-612.

[3] POTRA F A. Sufficient weighted complementarity problems [J]. Computational Optimization and Applications, 2016, 64(2): 467-488.

[4] ZHANG J. A smoothing Newton algorithm for weighted linear complementarity problem[J]. Optimization Letters, 2016, 10(3): 499-509.

[5] CHI X N, LIU S Y. A one-step smoothing Newton method for second-order cone programming[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 223: 114-123.

[6] TANG J Y, HE G P, DONG L, et al. A smoothing Newton method for second-order cone optimization based on a new smoothing function[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 218(4): 1317-1329.

[7] RUI S P, XU C. An inexact smoothing method for SOCCPs based on a one-parametric class of smoothing function[J].

Applied Mathematics and Computation, 2014, 241: 167-182.

[8] TANG J Y, DONG L, ZHOU J C, et al. A smoothing-type algorithm for the second-order cone complementarity problem with a new nonmonotone line search[J]. Optimization, 2015, 64(9): 1935-1955.

[9] CHI X N, WAN Z P, ZHU Z B, et al. A nonmonotone smoothing Newton method for circular cone programming [J]. Optimization, 2016, 65(12): 1-24.

[10] CHI X N, TAO J Y, ZHU Z B, et al. A regularized inexact smoothing Newton method for circular cone complementarity problem[J]. Pacific Journal of Optimization, 2017, 13(2): 197-218.

[11] ALIZADEH F, GOLDFARB D. Second-order cone programming[J]. Mathematical Programming, 2003, 95(1): 3-51.

[12] FARAUT J, KORANYI A. Analysis on symmetric cones [M]. New York: Oxford University Press, 1994.

[13] SUN D, SUN J. Strong semismoothness of the Fischer-Burmeister SDC and SOC complementarity functions[J]. Mathematical Programming, 2005, 103: 575-581.

[14] FUKUSHIMA M, LUO Z Q, TSENG P. Smoothing functions for second-order cone complementarity problems [J]. SIAM Journal on Optimization, 2002, 12(2): 436-460.

[15] JIANG H. Smoothed Fischer-Burmeister equation methods for the complementarity problem[M]. Parville: The University of Melbourne, 1997.

[16] QI L, SUN D, ZHOU G. A new look at smoothing Newton methods for nonlinear complementarity problems and box constrained variational inequalities[J]. Mathematical Programming, 2000, 87(1): 1-35.

Operations Research and Cybernetics

A Nonmonotone Inexact Smoothing Newton Algorithm for the Weighted Second-order Cone Complementarity Problem

CHI Xiaoni[1], ZENG Rong[2], ZHANG Suobin[3], ZHANG Ruijie[4]

(1. School of Mathematics and Computing Science, Guangxi Key Laboratory of Cryptography and Information Security, Guilin University of Electronic Technology;

2. School of Mathematics and Computing Science, Guangxi Key Laboratory of Automatic Detection Technology and Instrument, Guilin University of Electronic Technology;

3. School of Computer Science and Information Security, Guilin University of Electronic Technology;

4. School of Mathematics and Computing Science, Guangxi Colleges and Universities Key Laboratory of Data Analysis and Computation, Guilin University of Electronic Technology, Guilin Guangxi 541004, China)

Abstract: [**Purposes**]The weighted complementarity problem is introduced over the second-order cone, and the weighted second-order cone complementarity problem is studied. [**Methods**] Based on a new parametric smoothing function, this problem is reformulated as a nonlinear system of parameterized smooth equations, and a nonmonotone inexact smoothing Newton method is proposed to solve the nonlinear system of equations. [**Findings**] At each iteration, our algorithm needs to solve only one system of equations approximately and performs only one nonmonotone line search. [**Conclusions**] Under suitable conditions, the presented algorithm is shown to possess the global convergence and local quadratic convergence. Some numerical results indicate that our algorithm is effective.

Keywords: weighted second-order cone complementarity problem; a inexact smoothing Newton method; the nonmonotone line search; global convergence; local quadratic convergence

(责任编辑 陈 乔)