2019 年 3 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Mar. 2019
第 36 卷 第 2 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 36 No. 2

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20190210

具有独立偏好的三方匹配问题*

张 峰[1,2], 钟力炜[3]

(1. 上海第二工业大学 资源循环科学与工程中心; 2. 上海第二工业大学 文理学部, 上海 201209;
3. 上海交通大学附属第一人民医院, 上海 200080)

摘要:【目的】讨论 3 个主体集 U,V,W 之间的三方匹配问题,得到相关理论与算法。【方法】通过三方匹配问题所导出的一对一双边匹配问题,应用双边匹配问题的结果得到所讨论的三方匹配问题的相关结果。【结果】对于具有独立偏好三方匹配问题,给出其稳定匹配概念,并证明稳定匹配一定存在,以及给出了求解稳定匹配的算法。【结论】所讨论的具有独立偏好三方匹配问题所得到的结果与算法为三方匹配问题研究与应用提供新途径。

关键词:主体集;三方匹配;偏好;稳定匹配

中图分类号:O22;C931 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2019)02-0001-05

涉及偏好的匹配问题具有广泛的应用背景,例如住院医生与医院匹配、学生宿舍如何分配(学生与学生匹配)、肾移植病人与捐赠者匹配、物流管理(司机、车辆、线路之间匹配)等等。匹配是决策双方做出决策的重要机制,双边匹配问题首先由 Gale 和 Shapley 在研究婚姻匹配和大学招生问题中提出[1],并提出了著名的 Gale-shapley 算法。所谓双边匹配问题就是有两个主体集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 与 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,每个 $u_i\in U$ 对主体集 V 中所有主体有一个严格偏好(Strict preference)。同样地,每个 $v_j\in V$ 对主体集 U 中所有主体有一个严格偏好。在以后的几十年中,稳定匹配理论得到广泛的关注,相关研究得到了比较大的发展,应用领域也非常广泛[2-6]。双边匹配问题的模型更加广泛,从完全严格偏好推广到非完全偏好[7],双边一对一匹配问题发展为多对一(Many-to-one)匹配问题[8-9],成对(With couples)的双边匹配问题[10-11],以及其他各种匹配问题[12-16]。

三方(Three-sided)匹配问题就是研究有 3 个主体集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$,$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,$W=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$ 的匹配问题,研究内容包括主体对上严格偏好(Strict preferences over pairs)的匹配问题[17],即每个 $u_i\in U$,$v_j\in V$,$w_k\in W$ 分别对于 $V\times W$,$U\times W$,$U\times V$ 中所有主体对有一个严格偏好。循环偏好(Cyclic preferences)的匹配问题[18-20],即每个 $u_i\in U$ 对于主体集 V 中所有主体有一个严格偏好,每个 $v_j\in V$ 对主体集 W 中所有主体有一个严格偏好,每个 $w_k\in W$ 对主体集 U 中所有主体有一个严格偏好。以及混合偏好的匹配问题[21],即每个 $u_i\in U$ 对于 $V\times W$ 中所有主体对有一个严格偏好,每个 $v_j\in V$ 对主体集 U 中所有主体有一个严格偏好,每个 $w_k\in W$ 对主体集 U 中所有主体有一个严格偏好。

从上述几种三方匹配问题可以看出三方匹配问题不是简单地从双边匹配问题推广而来,从主体集个数的角度来看,是从双边推广到三方。然而对于一个三方匹配问题,如果只考虑其中两个主体集,并不能得到或导出相应的双边匹配问题,这主要是由于应用背景不同所讨论的三方匹配问题中给出的“偏好”定义可以有多种形式,不是双边匹配问题所定义的偏好的简单推广,即从三方匹配问题中所定义的偏好并不是都可以得到任意两个主体集之间的偏好。所以根据三方匹配问题所定义的偏好,有些类型的三方匹配问题与双边匹配问题由本质区别,这也是研究三方匹配问题意义所在。

本文讨论三方匹配问题是 3 个主体集 U,V,W 彼此之间具有独立偏好,即 U 与 V、V 与 W、U 与 W 之间分别有不同的偏好,这一问题可以与双边匹配问题建立联系。具有独立偏好的三方匹配问题也具有实际应用背景,

* **收稿日期:**2018-09-11 **修回日期:**2018-11-26 **网络出版时间:**2019-03-15 07:00

资助项目:上海市高原学科—环境科学与工程(资源循环科学与工程)项目;国家自然科学基金重点国际(地区)合作项目(No. 71520107003);上海市科委项目(No. 17495810500)

第一作者简介:张峰,男,教授,博士,研究方向为运筹学,E-mail:zhangfeng@sspu.edu.cn;**通信作者:**钟力炜,男,主任医师,E-mail:zhongliwei@gmail.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190315.0056.020.html

比如在医院手术安排过程中,由一主刀医生、一上台护士和一麻醉师组成手术团队核心成员,每位主刀医生对所有上台护士(麻醉师)有一偏好,同样每位上台护士对所有主刀医生(麻醉师)有一偏好,每位麻醉师对所有主刀医生(护士)有一偏好。对于具有独立偏好的三方匹配问题,给出其三方稳定匹配的概念,以及求解稳定匹配的算法。

1 问题描述

设有 3 个主体集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$,$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,$W=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$,所谓 3 个主体集彼此之间有偏好的三方匹配问题,就是考虑主体集 U 与主体集 V 之间有严格偏好,主体集 V 与主体集 W 之间有严格偏好,主体集 W 与主体集 U 之间有严格偏好。主体集 U 中每个主体 $u_i(i=1,2,\cdots,n)$ 对于主体集 V 中个主体有一严格偏好(Strict preferencelist),记为 $P(u_i\Rightarrow V)$,用 $\mathrm{pri}(u_i,v_j)>\mathrm{pri}(u_i,v_l)$ 表示主体 u_i 对 v_j 的偏好优于对 v_l 的偏好;主体集 V 中每个主体 $v_j(j=1,2,\cdots,n)$ 对于主体集 U 中 n 个主体有一严格偏好,记为 $P(v_j\Rightarrow U)$,用 $\mathrm{pri}(v_j,u_i)>\mathrm{pri}(v_j,u_l)$ 表示主体 v_j 对 u_i 的偏好优于对 u_l 的偏好。类似地可定义主体集 U 与 W 彼此之间,以及主体集 V 与 W 彼此之间的偏好。

将要讨论的三方匹配问题记为 $P\{U\Leftrightarrow V,V\Leftrightarrow W,W\Leftrightarrow U\}$,由于 U 与 V、V 与 W、U 与 W 之间分别有不同的偏好,从而可导出 3 个双边匹配问题,由三方匹配问题 $P\{U\Leftrightarrow V,V\Leftrightarrow W,W\Leftrightarrow U\}$ 导出的主体集 U 与主体集 V 之间的一对一双边稳定匹配问题记为 $P\{U\Leftrightarrow V\}$;主体集 V 与主体集 W 之间的一对一双边稳定匹配问题记为 $P\{V\Leftrightarrow W\}$;主体集 U 与主体集 W 之间的一对一双边稳定匹配问题记为 $P\{U\Leftrightarrow W\}$,下面先引入一些基本概念与记号。

定义 1 设 $u_i\in U,v_j\in V,w_k\in W$,$(u_i,v_j,w_k)\in U\times V\times W$ 称为一个三元组,是 3 个主体集 U,V 与 W 的一个配对。集合 $M\subset U\times V\times W$ 称为三方匹配问题 $P\{U\Leftrightarrow V,V\Leftrightarrow W,W\Leftrightarrow U\}$ 的一个匹配,如果 M 中任意两个不同的三元组 $(u_{i_1},v_{j_1},w_{k_1})$ 与 $(u_{i_2},v_{j_2},w_{k_2})$ 一定满足 $i_1\neq i_2,j_1\neq j_2,k_1\neq k_2$。

设 M 是三方匹配问题 $P\{U\Leftrightarrow V,V\Leftrightarrow W,W\Leftrightarrow U\}$ 的一个匹配,$(u_i,v_j,w_k)\in M$,则记 $u_i=M_U(v_j)=M_U(w_k)=M(v_j,w_k)$;$v_j=M_V(u_i)=M_V(w_k)=M(u_i,w_k)$;$w_k=M_W(u_i)=M_W(v_j)=M(u_i,v_j)$。$M|_U=\{u_i\mid(u_i,v_j,w_k)\in M\}$,$M|_V=\{v_j\mid(u_i,v_j,w_k)\in M\}$,$M|_W=\{w_k\mid(u_i,v_j,w_k)\in M\}$。

若 $u_i\in M|_U$,则称 u_i(关于匹配 M)已指派,$u_i\notin M|_U$,则称 u_i(关于匹配 M)未指派。同样可定义 v_j 与 w_k 是否已指派。当 $(u_i,v_j,w_k)\notin M$ 时,一种情况是 u_i 已指派,在这种情况下显然有 $v_j\neq M_V(u_i)$ 或 $w_k\neq M_W(u_i)$ 成立;另一种情况是 u_i 未指派,即 $M_V(u_i)=M_W(u_i)=\varnothing$。

这样上述两种情况可统一表示为:当 $(u_i,v_j,w_k)\notin M$ 时,一定成立 $v_j\neq M_V(u_i)$ 或 $w_k\neq M_W(u_i)$。同样也一定成立 $w_k\neq M_W(v_j)$ 或 $u_i\neq M_U(v_j)$;以及成立 $u_i\neq M_U(w_k)$ 或 $v_j\neq M_V(w_k)$。

下面给出三方匹配问题 $P\{U\Leftrightarrow V,V\Leftrightarrow W,W\Leftrightarrow U\}$ 稳定匹配的概念。

定义 2 设 $M\subset U\times V\times W$ 是三方匹配问题 $P\{U\Leftrightarrow V,V\Leftrightarrow W,W\Leftrightarrow U\}$ 的一个匹配,设 $(u_i,v_j,w_k)\notin M$,则称 (u_i,v_j,w_k) 为匹配 M 的一个中意对,也称为阻碍对(A blocking pair of M),如果下列 3 个条件满足:

1) u_i 未指派。或 u_i 已指派:若 $v_j\neq M_V(u_i)$,则有 $\mathrm{pri}(u_i,v_j)>\mathrm{pri}(u_i,M_V(u_i))$ 成立;若 $w_k\neq M_U(u_i)$,则有 $\mathrm{pri}(u_i,w_k)>\mathrm{pri}(u_i,M_W(u_i))$ 成立。

2) v_j 未指派。或 v_j 已指派:若 $w_k\neq M_W(v_j)$,则有 $\mathrm{pri}(v_j,w_k)>\mathrm{pri}(v_j,M_W(v_j))$ 成立;若 $u_i\neq M_U(v_j)$,则有 $\mathrm{pri}(v_j,u_i)>\mathrm{pri}(v_j,M_U(v_j))$ 成立。

3) w_k 未指派。或 w_k 已指派:若 $u_i\neq M_U(w_k)$,则有 $\mathrm{pri}(w_k,u_i)>\mathrm{pri}(w_k,M_U(w_k))$ 成立;若 $v_j\neq M_V(w_k)$,则有 $\mathrm{pri}(w_k,v_j)>\mathrm{pri}(w_k,M_V(w_k))$ 成立。

定义 3 三方匹配问题 $P\{U\Leftrightarrow V,V\Leftrightarrow W,W\Leftrightarrow U\}$ 的一个匹配 M 称为是稳定的,如果不存在匹配 M 的中意对(阻碍对)。

例 1 设 3 个主体集 $U=\{u_1,u_2\}$,$V=\{v_1,v_2\}$,$W=\{w_1,w_2\}$,考虑三方匹配问题 $P\{U\Leftrightarrow V,V\Leftrightarrow W,W\Leftrightarrow U\}$ 的一个实例如下。

主体集 U 与主体集 V 之间偏好:u_1:$\mathrm{pri}(u_1,v_1)>\mathrm{pri}(u_1,v_2)$;$u_2$:$\mathrm{pri}(u_2,v_2)>\mathrm{pri}(u_2,v_1)$;$v_1$:$\mathrm{pri}(v_1,u_1)>\mathrm{pri}(v_1,u_2)$;$v_2$:$\mathrm{pri}(v_2,u_1)>\mathrm{pri}(v_2,u_2)$。

主体集 V 与主体集 W 之间偏好:v_1:$\mathrm{pri}(v_1,w_1)>\mathrm{pri}(v_1,w_2)$;$v_2$:$\mathrm{pri}(v_2,w_2)>\mathrm{pri}(v_2,w_1)$;$w_1$:$\mathrm{pri}(w_1,v_1)>\mathrm{pri}(w_1,v_2)$;$w_2$:$\mathrm{pri}(w_2,v_1)>\mathrm{pri}(w_2,v_2)$。

主体集 U 与主体集 W 之间偏好：u_1：$\mathrm{pri}(u_1, w_1) > \mathrm{pri}(u_1, w_2)$；$u_2$：$\mathrm{pri}(u_2, w_2) > \mathrm{pri}(u_2, w_1)$；$w_1$：$\mathrm{pri}(w_1, u_1) > \mathrm{pri}(w_1, u_2)$；$w_2$：$\mathrm{pri}(w_2, u_1) > \mathrm{pri}(w_2, u_2)$。

可以验证匹配 $M = \{(u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2)\}$ 是三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的一个稳定匹配。因为三元组 (u_1, v_2, w_1) 是匹配 $\widetilde{M} = \{(u_1, v_2, w_1), (u_2, v_1, w_2)\}$ 的一个中意对（阻碍对），所以这个匹配 $\widetilde{M}$ 不是三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的一个稳定匹配。

2 定理与算法

由于主体集 U, V, W 之间是可以充分配对，如果匹配 M 是三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的稳定匹配，那么这个稳定匹配 M 所包含的匹配对个数一定是 n 个，所以下面讨论中都是针对匹配 M 所包含的匹配对个数为 n 的情况。

设 $M \subset U \times V \times W$，令 $M|_{U\times V} = \{(u_i, v_j) \mid (u_i, v_j, w_k) \in M\}$，称 $M|_{U\times V}$ 为集合 M 在 $U \times V$ 上投影，同样可定义集合 M 在 $V \times W$ 上投影 $M|_{V\times W} = \{(v_j, w_k) \mid (u_i, v_j, w_k) \in M\}$，以及在 $U \times W$ 上投影 $M|_{U\times W} = \{(u_i, w_k) \mid (u_i, v_j, w_k) \in M\}$。

根据上面的定义，显然有下面的结论。

引理 1　设 $M \subset U \times V \times W$ 是三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的一个匹配的充分必要条件：$M|_{U\times V}$，$M|_{V\times W}$，$M|_{U\times W}$ 分别是一对一双边稳定匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V\}$、$P\{V \Leftrightarrow W\}$ 以及 $P\{U \Leftrightarrow W\}$ 的匹配。并且：

1）若 $(u_i, v_j, w_k) \in M$，则 $(u_i, v_j) \in M|_{U\times V}$，$(v_j, w_k) \in M|_{V\times W}$，$(u_i, w_k) \in M|_{U\times W}$，反之亦然。

2）若 $(u_i, v_j, w_k) \notin M$，则 $(u_i, v_j) \notin M|_{U\times V}$，$(v_j, w_k) \notin M|_{V\times W}$，$(u_i, w_k) \notin M|_{U\times W}$ 至少两个成立。

定理 2　设 M 是三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的一个匹配，并设三元组 $(u_i, v_j, w_k) \notin M$，则 (u_i, v_j, w_k) 是匹配 M 的中意对（阻碍对）的充分必要条件是下面 3 个结果成立：

1）当 $(u_i, v_j) \notin M|_{U\times V}$ 时，则 (u_i, v_j) 是匹配 $M|_{U\times V}$ 的中意对（阻碍对）；

2）当 $(v_j, w_k) \notin M|_{V\times W}$ 时，则 (v_j, w_k) 是匹配 $M|_{V\times W}$ 的中意对（阻碍对）；

3）当 $(u_i, w_k) \notin M|_{U\times W}$ 时，则 (u_i, w_k) 是匹配 $M|_{U\times W}$ 的中意对（阻碍对）。

证明　必要性。若 (u_i, v_j, w_k) 是匹配 M 的中意对（阻碍对），如果 $(u_i, v_j) \notin M|_{U\times V}$，即 $v_j \neq M_V(u_i)$（$u_i \neq M_U(v_j)$），所以由定义 2 得到 $\mathrm{pri}(v_j, u_i) > \mathrm{pri}(v_j, M_U(v_j))$ 与 $\mathrm{pri}(u_i, v_j) > \mathrm{pri}(u_i, M_V(u_i))$，即证明 (u_i, v_j) 是匹配 $M|_{U\times V}$ 的中意对（阻碍对）。

同理可证 2）与 3）的结论。

充分性。当 $(u_i, v_j) \notin M|_{U\times V}$ 是匹配 $M|_{U\times V}$ 的中意对（阻碍对），则有 $\mathrm{pri}(u_i, v_j) > \mathrm{pri}(u_i, M_V(u_i))$，$\mathrm{pri}(v_j, u_i) > \mathrm{pri}(v_j, M_U(v_j))$ 成立。

当 $(v_j, w_k) \notin M|_{V\times W}$ 是匹配 $M|_{V\times W}$ 的中意对（阻碍对），则有 $\mathrm{pri}(v_j, w_k) > \mathrm{pri}(v_j, M_W(v_j))$，$\mathrm{pri}(w_k, v_j) > \mathrm{pri}(w_k, M_V(w_k))$ 成立。

当 $(u_i, w_k) \notin M|_{U\times W}$ 是匹配 $M|_{U\times W}$ 的中意对（阻碍对），则 $\mathrm{pri}(u_i, w_k) > \mathrm{pri}(u_i, M_W(u_i))$，$\mathrm{pri}(w_k, u_i) > \mathrm{pri}(w_k, M_U(w_k))$ 成立。

上述 6 个式子就是定义 2 中的 6 个式子，所以 (u_i, v_j, w_k) 是匹配 M 的中意对（阻碍对）。　　证毕

定理 3　给定一个三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$，若 $M(U, V)$ 是一对一双边稳定匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V\}$ 的稳定匹配，$M(V, W)$ 是一对一双边稳定匹配问题 $P\{V \Leftrightarrow W\}$ 的稳定匹配，令：

$$M = \{(u_i, v_j, w_k) \mid (u_i, v_j) \in M(U, V), (v_j, w_k) \in M(V, W)\},$$

则 M 是三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的一个稳定匹配。

证明　显然 M 是三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的一个匹配。设任意 $(u_i, v_j, w_k) \notin M$，要证明 (u_i, v_j, w_k) 不是匹配 M 的中意对，就是要证明下列 3 种情况不能全部成立：

1）当 $u_i \neq M_U(v_j)$，即 $v_j \neq M_V(u_i)$ 时，有 $\mathrm{pri}(u_i, v_j) > \mathrm{pri}(u_i, M_V(u_i))$，$\mathrm{pri}(v_j, u_i) > \mathrm{pri}(v_j, M_U(v_j))$ 成立；

2）当 $v_j \neq M_V(w_k)$，即 $w_k \neq M_W(v_j)$ 时，有 $\mathrm{pri}(v_j, w_k) > \mathrm{pri}(v_j, M_W(v_j))$，$\mathrm{pri}(w_k, v_j) > \mathrm{pri}(w_k, M_V(w_k))$ 成立；

3）当 $w_k \neq M_W(u_i)$，即 $u_i \neq M_U(w_k)$ 时，有 $\mathrm{pri}(w_k, u_i) > \mathrm{pri}(w_k, M_U(w_k))$，$\mathrm{pri}(u_i, w_k) > \mathrm{pri}(u_i, M_W(u_i))$ 成立。

若$(u_i,v_j)\in M(U,V)$,因为$(u_i,v_j,w_k)\notin M$,所以$(v_j,w_k)\notin M(V,W)$。因为$M(V,W)$是一对一双边稳定匹配问题$\{V\Leftrightarrow W\}$的稳定匹配,因此(v_j,w_k)不会是$M(V,W)$的中意对(阻碍对),即:$\mathrm{pri}(v_j,w_k)>\mathrm{pri}(v_j,M_W(v_j))$与$\mathrm{pri}(w_k,v_j)>\mathrm{pri}(w_k,M_V(w_k))$不会同时成立,所以$(u_i,v_j,w_k)$不是匹配$M$的中意对(阻碍对)。

若$(u_i,v_j)\notin M(U,V)$,根据$M(U,V)$是一对一双边稳定匹配问题$\{U\Leftrightarrow V\}$的稳定匹配,同样得到(u_i,v_j)不会是$M(U,V)$的中意对(阻碍对),即:$\mathrm{pri}(u_i,v_j)>\mathrm{pri}(u_i,M_V(u_i))$与$\mathrm{pri}(v_j,u_i)>\mathrm{pri}(v_j,M_U(v_j))$不会同时成立,所以$(u_i,v_j,w_k)$不是匹配$M$的中意对(阻碍对)。

所以匹配M是三方匹配问题$P\{U\Leftrightarrow V,V\Leftrightarrow W,W\Leftrightarrow U\}$的一个稳定匹配。 证毕

由于一对一双边稳定匹配问题一定存在稳定匹配[1],所以定理3的结论保证了三方匹配问题$P\{U\Leftrightarrow V,V\Leftrightarrow W,W\Leftrightarrow U\}$也一定存在稳定匹配,并且可以通过一对一双边稳定匹配问题$P\{U\Leftrightarrow V\}$的稳定匹配与一对一双边稳定匹配问题$P\{V\Leftrightarrow W\}$的稳定匹配构造得到三方匹配问题$P\{U\Leftrightarrow V,V\Leftrightarrow W,W\Leftrightarrow U\}$的一个稳定匹配。下面给出相应的算法。

算法1 步骤1,对于双边稳定匹配问题$P\{U\Leftrightarrow V\}$,应用Gale-Shapley算法得到稳定匹配$M(U,V)$;

步骤2,对于双边稳定匹配问题$P\{V\Leftrightarrow W\}$,应用Gale-Shapley算法得到稳定匹配$M(V,W)$;

步骤3,构造三方匹配问题$P\{U\Leftrightarrow V,V\Leftrightarrow W,W\Leftrightarrow U\}$的一个匹配:

$$M=\{(u_i,v_j,w_k)\mid(u_i,v_j)\in M(U,V),(v_j,w_k)\in M(V,W)\}。$$

根据定理3的结论,算法1所得到的匹配M是三方匹配问题$P\{U\Leftrightarrow V,V\Leftrightarrow W,W\Leftrightarrow U\}$的一个稳定匹配。下面给出一个例子。

例2 设3个主体集$U=\{u_1,u_2,u_3\}$,$V=\{v_1,v_2,v_3\}$,$W=\{w_1,w_2,w_3\}$,为了方便,用$>$表示表示偏好。

主体集U与主体集V之间偏好:$u_1:v_1>v_2>v_3$;$u_2:v_1>v_2>v_3$;$u_3:v_2>v_3>v_1$;$v_1:u_1>u_3>u_2$;$v_2:u_1>u_2>u_3$;$v_3:u_1>u_3>u_2$;

主体集V与主体集W之间偏好:$v_1:w_1>w_3>w_2$;$v_2:w_1>w_3>w_2$;$v_3:w_3>w_1>w_2$;$w_1:v_3>v_1>v_2$;$w_2:v_2>v_3>v_1$;$w_3:v_1>v_2>v_3$;

主体集U与主体集W之间偏好:$u_1:w_1>w_3>w_2$;$u_2:w_1>w_3>w_2$;$u_3:w_1>w_2>w_3$;$w_1:u_3>u_1>u_2$;$w_2:u_1>u_2>u_3$;$w_3:u_2>u_1>u_3$。

步骤1,应用Gale-Shapley算法求解双边匹配问题$P\{U\Leftrightarrow V\}$的稳定匹配$M(U,V)$:

1)对于$\{v_1,v_2,v_3\}$,u_1给v_1发出邀请;对于$\{v_1,v_2,v_3\}$,u_2给v_1发出邀请;对于$\{v_1,v_2,v_3\}$,u_3给v_2发出邀请。

2)v_1拒绝u_2的邀请,接受u_1的邀请,得到一配对(u_1,v_1);v_2接受u_3的邀请,得到一配对(u_3,v_2)。

3)对于$\{v_2,v_3\}$,u_2给v_2发出邀请。

4)v_2拒绝u_3的邀请,配对(u_3,v_2)不再存在,接受u_2的邀请,得到一配对(u_2,v_2)。

5)对于$\{v_1,v_3\}$,u_3给v_3发出邀请。

6)v_3接受的邀请u_3,得到一配对(u_3,v_3)。

7)得到双边稳定匹配问题$P\{U\Leftrightarrow V\}$的稳定匹配$M(U,V)=\{(u_1,v_1),(u_2,v_2),(u_3,v_3)\}$。

步骤2,同样应用Gale-Shapley算法求解双边匹配问题$P\{V\Leftrightarrow WV\}$的稳定匹配$M(V,W)=\{(v_1,w_3),(v_2,w_2),(v_3,w_1)\}$。

步骤3,得到三方匹配问题$P\{U\Leftrightarrow V,V\Leftrightarrow W,W\Leftrightarrow U\}$的稳定匹配$M=\{(u_1,v_1,w_3),(u_2,v_2,w_2),(u_3,v_3,w_1)\}$。

参考文献:

[1] GALE D,SHAPLEY L S. College admissions and the stability of marriage[J]. American Mathematical Monthly,1962,69(1):9-15.

[2] MANLOVE D F. The structure of stable marriage with indifference[J]. Discrete Applied Mathematics,2002,122(1/2/3):167-181.

[3] KOBAYASHI H,MATSUI T. Cheating strategies for the Gale-shapley algorithm with complete preference lists[J]. Algorithmica,2010,58(1):151-169.

[4] VANDE V J H. Linear programming brings marital bliss[J]. Operations Research Letters,1989,8(3):147-153.

[5] AFACAN M O. Group robust stability in matching mar-

kets [J]. Games and Economic Behavior, 2012, 74(1): 394-398.
[6] ROTH A E. Two-sided matching with incomplete information about others' preferences [J]. Games and Economic Behavior, 1989, 1(2): 191-209.
[7] GELAIN M, PINI M S, ROSSI F, et al. Local search for stable marriage problems with ties and incomplete lists [C]//ZHANG B T, ORGUN M A. PRICAI 2010, LNAI 6230: 64-75.
[8] 李建荣. 多对一双方匹配市场中的最优化[J]. 运筹学学报, 2013, 17(4): 1-10.
LI J R. Optimization in many-to-one two-sided matching market[J]. Operations Research Transactions, 2013, 17(4): 1-10.
[9] ROMM A. Implications of capacity reduction and entryin many-to-one stable matching[J]. Social Choice and Welfare, 2014, 43(4): 851-875.
[10] McDERMID E J, MANLOVE D F. Keeping partners together: algorithmic results for the hospitals/residents problem with couples[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2010, 19(3): 279-303.
[11] MANLOVE D F, McBRIDE I, TRIMBLE J. "Almost-stable" matchings in the hospitals/residents problem with couples[J]. Constraints, 2017, 22(1): 50-72.
[12] IRVING R W, MANLOVE D F. The stable roommates problem with ties[J]. Journal of Algorithms, 2002, 43(1): 85-105.
[13] PYCIA M. Stability and preference alignment in matching and coalition formation[J]. Econometrica, 2012, 80(1): 323-362.
[14] ANSHELEVICH E, BHARDWAJ O, HOEFER M. Stable matching with network externalities[J]. Algorithmica, 2017, 78(3): 1-40.
[15] McDERMID E, IRVING R W. Sex-Equal stable matchings: complexity and exact algorithms[J]. Algorithmica, 2014, 68(3): 545-570.
[16] LAZAROVA E, BORM P, ESTÉVEZ-FERNÁNDEZ A. Transfers and exchange-stability in two-sided matching problems[J]. Theory and Decision, 2016, 81(1): 53-71.
[17] NG C, HIRSCHBERG D S. Three-dimensional stable matching problems[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 1991, 4(2): 245-252.
[18] HUANG C C. Circular Stable Matching and 3-way Kidney Transplant [J]. Algorithmica, 2010, 58(1): 137-150.
[19] ERIKSSON K, SJÖSTRAND J, STRIMLING P. Three-dimensional stable matching with cyclic preferences[J]. Mathematical Social Sciences, 2006, 52(1): 77-87.
[20] BIRÓP, McDERMID E. Three-sided stable matchings with cyclic preferences[J]. Algorithmica, 2010, 58(1): 5-18.
[21] ZHANG F, LI J, FAN J, et al. Three-dimensional stable matching with hybrid preferences[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2019, 37(1): 330-336..

Operations Research and Cybernetics

Three-Sided Stable Matching Problem with Independent Preferences

ZHANG Feng[1,2], ZHONG Liwei[3]
(1. Research Center of Resource Recycling Science and Engineering, Shanghai Polytechnic University;
2. Art and Science Department, Shanghai Polytechnic University, Shanghai 201209;
3. Shanghai General Hospital, School of Medicine, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200080, China)

Abstract: [**Purposes**]The three-sided matching problem is discussed here. Relevant results and algorithm are obtained. [**Methods**] The results of the one-to-one two-sided matching problem derived from the three-sided matching problem are used to obtain the relevant results of the three-sided matching problem. [**Findings**]For the three-sided matching problem with independent preferences, the concept of stable matching is given, the existence of stable matching is proved, and the algorithm to solve stable matching is given. [**Conclusions**]The results and algorithms of three-sided matching problem with independent preferences discussed provide a new approach for the research and application of three-sided matching problems.

Keywords: agent set; three-sided matching problem; preference; stable matching

(责任编辑　黄　颖)