DOI:10.11721/cqnuj20190203

一类约化函数代数*

许安见[1], 邹 杨[2]
(1. 重庆理工大学 理学院, 重庆 400054; 2. 重庆第二师范学院 数学与信息科学学院, 重庆 400045)

摘要:【目的】研究当函数代数乘法作用在函数空间时的可约代数问题。【方法】设 X 是紧 Haursdorff 空间,A 是 X 上的对数模代数。根据 Riesz 表示定理,对 A 上每个正线性泛函 φ,存在唯一的表示测度 m。$L^2(m)$ 表示 X 上 m 可测的平方可积函数组成的勒贝格空间,$H^2(m)$ 表示 A 在 $L^2(m)$ 的闭。证得 $H^2(m)$ 中函数可表示为 $H^\infty(m)$ 中两个函数的商。【结果】证明了当 A 中函数的 A 乘法作用在 $H^2(m)$ 时,A 的每个稠定义的不变图变换 T 具有压缩谱,且进一步证明了若 B 是 $H^2(m)$ 上包含 A 的约化代数,则 B 是自伴的。【结论】推广了已有文献的结果。

关键词:对数模代数;哈代空间;可约算子代数

中图分类号:O177 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2019)02-0055-04

设 H 是一个可分 Hilbert 空间,$B(H)$ 是 H 上有界线性算子全体组成的代数。M 是 H 的闭子空间,对 $B(H)$ 中的算子 T,若有 $TM \subset M$,则 M 称为 T 的不变子空间;若 M 还是 T^* 的不变子空间,称 M 为约化子空间。若 M 不是零空间和全空间,则称 M 是非平凡的。闭子空间 M 称为一个算子集的不变子空间或约化子空间若它是算子集合中每个算子的不变子空间或约化子空间。

$B(H)$ 的有单位的子代数 B 称为可递的,若 B 只有平凡的不变子空间;B 称为约化的,若它的不变子空间一定是约化子空间。Kadison 提出了可递代数问题:是否每个可递代数 $B \subset B(H)$ 在 $B(H)$ 中都是强稠的? Radjavi 和 Rosenthal[1] 首先提出了可约代数问题:是否每个可约代数 $B \subset B(H)$ 都是自伴的? 可递代数问题、约化代数问题都与著名的不变子空间问题紧密相关,即:可分 Hilbert 空间上的任何有界线性算子是否都有非平凡的不变子空间?

不变子空间问题等价于 H 上每个算子 T 和单位生成的代数是否都是强稠的。Douglas 和许安见[2] 引入了催化算子的概念:称一个算子或算子集相对于可递代数是催化的,若包含该算子或算子集的可递代数在 $B(H)$ 都是强稠的;称算子相对于约化代数是催化的,若包含它的约化代数都是自伴的。若算子 A 相对于可递代数是催化的,则它一定有非平凡的不变子空间。Arveson[3] 第一个明确提出了可递代数问题,发展了一套研究可递代数的工具,并得到了部分结果;他证明了单重单向位移,以及非数值的自伴算子对可递代数是催化的。后来 Richter[4] 证明了 Dirichlet 位移相对于可递代数也是催化的。Nordgren[5] 将 Arveson 的结果推广到有限重的单向位移算子。程国正等人[6] 证明了具完备 Nevanlinna-Pick 核的函数 Hilbert 空间上的乘坐标函数的算子对可递代数和约化代数都是催化的。Douglas 和许安见[2] 证明了复平面中多连通域上的丛位移算子对可递单数是催化的。对约化代数,Radjavi 和 Rosenthal[1] 发展了一套类似于可递代数问题研究的方法,并证明了单向位移相对于约化代数是催化的。

在下一节,将先回顾函数代数的一些基本结果,并证明 $H^\infty(m)$ 中函数的商表示定理。在第二节,将证明对数模代数相对于约化代数是催化的,这推广了 Douglas 和许安见[2] 的结果。

1 对数模代数

本文中,假设 X 是一个紧 Hausdorff 空间,$C(X)$ 为 X 上复值连续函数全体组成的代数。$C(X)$ 的子代数 A

---

* **收稿日期**:2018-03-12 **修回日期**:2018-12-05 **网络出版时间**:2019-03-15 07:00
资助项目:重庆市科学技术委员会基础研究与前沿探索项目(No. cstc2018jcyjAX0215);重庆市教育委员会科学技术研究项目(No. KJQN201801110);国家自然科学基金(No. 11871127;No. 11501068);重庆第二师范学院校内项目(No. KY201703A)
第一作者简介:许安见,男,副教授,博士,研究方向为算子理论与算子代数,E-mail:xuaj@cqut.edu.cn
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190315.0057.034.html

称为一致代数(Uniform algebra),若它满足:分离 X 中的点且包含所有的常值函数。用 ReA 表示 A 所有函数的实部,A^{-1} 表示 A 中所有可逆函数的全体,$\ln|A^{-1}|$ 表示集合 $\{\ln|f|, f\in A^{-1}\}$。

设 φ 是 A 上的乘法线性泛函,由 Riesz 表示定理知存在 X 上的正测度 m 满足:

$$\varphi(f)=\int_X f\mathrm{d}m, \forall f\in A,$$

且称 m 为 φ 的表示测度。表示测度通常不是唯一的。φ 的 Arens-Singer 测度是 X 上满足:

$$\ln|\varphi(f)|=\int_X \ln|f|\mathrm{d}m, \forall f\in A^{-1},$$

的正测度 m。φ 的 Arens-Singer 测度也是 φ 的表示测度。事实上,对 $f=u+\mathrm{i}v$,有:

$$\int_X f\mathrm{d}m=\int_X (u+\mathrm{i}v)\mathrm{d}m=\int_X \ln\mathrm{e}^u\mathrm{d}m+\mathrm{i}\int_X \ln\mathrm{e}^v\mathrm{d}m=\ln\mathrm{e}^{\varphi(u)}+\mathrm{i}\ln\mathrm{e}^{\varphi(v)}=\varphi(u)+\mathrm{i}\varphi(v)=\varphi(f).$$

Arens-Singer 测度总是存在的[3,7]。

称一致代数 A 称为 X 上的对数模代数,若 $\ln|A^{-1}|$ 在 Re$C(X)$ 中一致稠密。为叙述方便,后文中的 A 均表示紧 Hausdorff 空间 X 上的对数模代数。Dirichlet 代数是对数模代数,因为 Re$A\subset\ln|A^{-1}|$。对数模的函数论相关结果,可参考 Hoffman[8] 的研究。

对数模代数 A 上的任何乘法线性泛函 φ,在 X 上存在唯一的表示测度 m。A_φ 表示泛函 φ 的核空间,即 $A_\varphi=\{f\in A\mid \int_X f\mathrm{d}m=\varphi(f)=0\}$。$L^2(m)$ 是 X 上相对于测度 m 的勒贝格空间。$H^2(m)$ 和 $H^2_\varphi(m)$ 分别表示 A 和 A_φ 在 $L^2(m)$ 中的闭包。则 $A+\overline{A}$ 在 $L^2(m)$ 中稠密,$L^2(m)=H^2(m)\oplus\overline{H^2_\varphi(m)}$,且函数 $g\in L^2(m)$ 在 $H^2(m)$ 中的充要条件是对任何 $f\in H^2_\varphi(m)$ 有 $\int_X fg\mathrm{d}m=0$。$H^\infty(m)$ 是 A 在 $L^\infty(m)$ 中的弱闭包。$H^2(m)$ 中函数 g 称为外函数,若 Ag 在 $H^2(m)$ 中稠密;或等价地说,g 是外函数,若 $\int_X \ln|g|\mathrm{d}m=\ln\left|\int_X g\mathrm{d}m\right|>-\infty$。

因 $H^2(m)$ 是 A 的闭,所以对函数 $f\in A$ 和任意的 $g\in H^2(m)$,有 $fg\in H^2(m)$。称 $H^2(m)$ 的闭子空间 M 是 A 的不变子空间,若它在乘 A 中所有函数下是不变的。Hoffman[8] 刻画了 $H^2(m)$ 的不变子空间,有如下引理。

引理 1[8] 若 M 是 A 不变子空间,且存在函数 $f\in M$ 使得 $\int_X f\mathrm{d}m\neq0$。则存在 X 上的相对于 m 几乎处处为 1 的函数 $F\in H^2(m)$ 使得 $M=FH^2(m)$。进一步地,在相差一个模为 1 的常数下,该函数是唯一的。

一个自然的问题是:对 $H^2_H(m)$ 和 $L^2_H(m)$,Beurling 型定理[11] 是否成立?

对于该问题,有下面引理,它的证明类似于经典 Hardy 空间以及文献[7]中 Gamelin 的定理 V.4.3 的证明。

引理 2 设 A 为紧 Hausdorff 空间 X 上的对数模代数。对 A 上的任何乘法线性泛函 φ,m 表示 X 上相应于 φ 的表示测度。对任何函数 $f\in H^2(m)$,存在两个函数 $f_1\in H^\infty(m)$,$f_2\in(H^\infty(m))^{-1}$ 使得 $f=\dfrac{f_1}{f_2}$。

证明 有正交分解[8]:$L^2(m)=H^2(m)\oplus\overline{H^2_\varphi(m)}$,这里的 $H^2_\varphi(m)$ 是 A_φ 在 $H^2(m)$ 中的闭。注意到对任何函数 $u\in\mathrm{Re}H^2(m)$,存在唯一的函数 $v\in\mathrm{Re}H^2_\varphi(m)$ 使得 $u+\mathrm{i}v\in H^2(m)$。因此,对 $f\in H^2(m)$,存在函数 v 使得 $\ln^+|f|+\mathrm{i}v\in H^2(m)$,这里的 $\ln^+|f|=\max\{\ln|f|,0\}$。若定义 $g=\mathrm{e}^{-\ln^+|f|+\mathrm{i}v}$,则 g 在 $H^\infty(m)$ 中可逆[7],因此 fg 也是有界的。令 $f_1=fg$ 和 $f_2=g$,即可得 $H^2(m)$ 中函数的表示引理。 证毕

该引理推广了经典 Hardy 空间上的相应结果,该结果对研究与 Hardy 空间上乘法算子交换的稠定算子的闭性质是非常重要的[9-10]。

2 约化函数代数

H 表示一个无限维的 Hilbert 空间,$B(H)$ 是 H 上的有界线性算子全体组成的代数。B 为 $B(H)$ 的子代数,设 n 为一个正整数。

引理 3[12] 若对任何正整数 n,B^n 都是约化代数,则 B 是自伴的。

定义 1 闭线性流形 $M\subset H^{(n)}$ 称为 B^n 的不变图子空间若它是 B^n 不变的,且存在非零子线性流形 $D\subset H$ 上的线性变换 $T_1,\cdots,T_{n-1}$,使得:$M=\{(x,T_1x,\cdots,T_{n-1}x)\mid x\in D\}$,这里的 $H^{(n)}$ 表示 n 个 H 的直和。线性变换 T 称为相对于 B 的一个图变换,若存在 n 和 B^n 的某个不变图子空间 M,使得 T 是中 $\{T_i\}$ 的元素之一。

B^n 的约化性研究可转化为研究不变图子空间。

定义 2　称线性变换 T 有压缩谱，若存在 $\lambda\in C$ 使得 $T-\lambda$ 在 H 中不稠密。

下设 A 是紧 Hausdorff 空间 X 上的对数模代数，φ 是 A 上的正线性泛函，m 相应于 φ 的唯一表示测度。$L^2(m)$是 X 上由 m 定义的勒贝格空间，$H^2(m)$是 A 在 $L^2(m)$中的闭。A 乘法作用在 $H^2(m)$上。

引理 4　对 $H^2(m)$，A 的每个稠定义的不变图变换 T 具有压缩谱。

证明　只需要证明对每个函数 $f\in D$，存在两个函数 $h_1,h_2\in H^\infty(m)$使得 $Tf=\dfrac{h_1}{h_2}$即可。

首先，证明对每对非零函数 $f,g\in D$，均有$\dfrac{Tf}{f}=\dfrac{Tg}{g}$。由引理 2，存在函数 $f_1,f_2,g_1,g_2\in H^\infty(m)$，其中 f_2 和 g_2 在 $H^\infty(m)$中是可逆的，使得 $f=\dfrac{f_1}{f_2}$和 $g=\dfrac{g_1}{g_2}$。这里将证明$\dfrac{Tf}{f}=\dfrac{Tg}{g}$，或 $g_1f_2Tf=g_2f_1Tg$。但由 T 与 $T_{g_1f_2}$ 和 $T_{g_2f_1}$ 的交换性，可知：

$$g_1f_2Tf=T_{g_1f_2}Tf=Tg_1f_2f=Tg_2f_1g=T_{g_2f_1}Tg=g_2f_1Tg。$$

因此通过在最后一个方程两边除以 g_1f_1，有$\dfrac{Tf}{f}=\dfrac{Tg}{g}$。令 $h=\dfrac{Tf}{f}$，就有 $Tf=hf$，h 是 $H^2(m)$中两个函数的商。又由引理 2 可知，$H^2(m)$函数可表示为 $H^\infty(m)$中两个函数的商。因此 h 可表示 $H^\infty(m)$中两个函数 h_1,h_2 的商。　证毕

引理 5[7]　若 B 是 Hilbert 空间 H 上的约化代数，T 是与 B 交换的闭线性变换且 T 的值域包含在 T 的核与 T 的定义域的正交补的直和中，则 T 与 B^* 交换。

引理 6　若 U 是 $H^2(m)$上包含 A 的约化代数，$M=\{(x,Tx)\mid x\in D\}$是 $U^{(2)}$ 的非零不变图子空间。则 M 包含 $U^{(2)}$ 的一个非零约化子空间。

证明　T 显然与 U 交换。由引理 4，存在 $\lambda\in C$ 使得 $T-\lambda$ 的值域 $\mathrm{Ran}(T-\lambda)$在 $H^2(m)$中不稠密。$\mathrm{Ran}(T-\lambda)$在 U 作用下不变，因此它的闭包$\overline{\mathrm{Ran}(T-\lambda)}$在 U 作用下也不变。$\overline{\mathrm{Ran}(T-\lambda)}$在 $H^2(m)$中的正交补$\overline{\mathrm{Ran}(T-\lambda)}^\perp$在 U 作用下也不变，因此在 $a\in A$ 作用下不变，因为 U 是约化代数。从而由引理 1，$H^2(m)$中存在函数 F 满足$\overline{\mathrm{Ran}(T-\lambda)}^\perp=FH^2(m)$且 $D_0=D\cap\overline{\mathrm{Ran}(T-\lambda)}^\perp$在$\overline{\mathrm{Ran}(T-\lambda)}^\perp$中稠密。因此 D_0 是非空的。

现在定义 $M_0=\{(x,Tx)\mid x\in D_0\}$。显然 M_0 是 M 的闭子空间，且在 $U^{(2)}$ 作用下不变。进一步地，$(T-\lambda)|_{D_0}$ 是与 U 交换的闭线性变换，它的值域正交于 D_0。因此由引理 5 知，$(T-\lambda)|_{D_0}$ 与 U^* 交换。故 M_0 在$(U^*)^{(2)}$作用下不变，从而为 $U^{(2)}$ 的约化子空间。　证毕

定理 1　若 B 是 $H^2(m)$上包含 A 的约化代数，则 $B^{(2)}$ 是$(H^2(m))^{(2)}$上的约化代数。

证明　设 M 是 $B^{(2)}$ 的不变子空间，N 是 $B^{(2)}$ 的且包含在 M 中的所有约化子空间的线性闭包。则 $N\subset M$ 显然也是 $B^{(2)}$ 的约化子空间。

接着证明 $N=M$。假设等式不成立，令 M_0 为 N 在 M 中的正交补，则它是非平凡的。M_0 也是 $B^{(2)}$ 的不变子空间。进一步地，若$(0,f)\in M_0$，则 $f=0$。

因此 M_0 是 $H^2(m)$上某个线性变换 T 的图，即：$M_0=\{(f,Tf)\mid f\in D_0\}$。

从而由引理 6 知 M_0 中包含 $B^{(2)}$ 的至少一个非平凡约化子空间，这与 M_0 中不包含 $B^{(2)}$ 的约化子空间矛盾。　证毕

定理 2　若 B 是 $H^2(m)$上包含 A 的约化代数，则 B 是自伴的。

证明　由定理 1，$B^{(2)}$ 是约化代数，因此 $B^{(4)}$ 也是约化代数。归纳法知对任何正整数 n，$B^{(2^n)}$ 也是约化代数。也表明对任何正整数 n，$B^{(n)}$ 是约化代数。从而由引理 3 知 B 是自伴的。　证毕

参考文献：

[1] RADJAVI H，ROSENTHAL P. A sufficient condition that an operator algebra be self-adjoint[J]. Canad J Math，1971，23：588-597.

[2] DOUGLAS R G，XU A J. Transitivity and bundle shifts [EB/OL]. [2018-03-12]. https://arxiv. org/abs/1403.5032.

[3] ARVESON W B. A density theorem for operator algebras [J]. Duke Math J，1967，34(4)：635-647.

[4] RICHTER S. Invariant subspaces of the Dirichlet shift[J]. J Reine Angew Math，1988，386：205-220.

[5] NORDGREN E A. Tansitive operator algebras[J]. J Math Anal App, 1970, 32(3): 639-643.

[6] CHENG G Z, GUO K Y, WANG K. Transitive algebras and reductive algebras on reproducing analytic Hilbert spaces[J]. J Funct Anal, 2010, 258(12): 4229-4250.

[7] GAMELIN T W. Uniform algebras[M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1969.

[8] HOFFMAN K. Analytic functions and logmodular banach algebras[J]. Acta Mathematica, 1962, 33(1): 271-317.

[9] BERCOVICI H, DOUGLAS R G, FOIAS C, et al. Confluent operator algebras and the closability property[J]. J Funct Anal, 2010, 258(12): 4122-4153.

[10] HADWIN D, LIU Z, NORDGREN E A. Closed densely defined operators commuting with multiplications in a multiplier pair[J]. Proc Amer Math Soc, 2013, 141: 3093-3105.

[11] RADJAVI H, ROSENTHAL P. Invariant subspaces[M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1973.

[12] NORDGREN E A. Alegbras containing unilateral shifts or finite-rank operators[J]. Duke Math J, 1973, 40(2): 419-424.

A Reductive Function Algebra

XU Anjian[1], ZOU Yang[2]

(1. College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054;
2. College of Mathematics and Information, Chongqing University of Education, Chongqing 400045, China)

Abstract: [**Purposes**]To study reducibility of a function algebra which acts on a function space. [**Methods**]If X is a compact Hausdorff space, A is a logmodular algebra on X, m is the unique representation measure corresponding to a positive linear functional φ on A. $H^2(m)$ is the closure of A in $L^2(m)$ which is the Lebesgue space over X defined by m. It is shown that every function in $H^2(m)$ is a quotient of two functions in $H^\infty(m)$. [**Findings**]A acts on $H^2(m)$ by multiplication. Then every densely defined linear transform T on A has compressed spectrum, and if B is a reductive algebra on $H^2(m)$ containing A, then B is self adjoint. [**Conclusion**]It generalizes known results.

Keywords: logmodular algebra; Hardy space; reductive operator algebra

(责任编辑 许 甲)