

基于 CVaR 带有改进的典型交易成本的多目标投资组合模型^{*}

宋慧慧¹, 龙宪军², 龙 强³

(1. 重庆工商大学 国家智能制造服务国际科技合作基地; 2. 重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067;
3. 西南科技大学 理学院, 四川 绵阳 621010)

摘要:【目的】为了进行有效的投资, 即投资者在有限的资本上通过控制风险最小并取得最大收益。【方法】利用多目标遗传算法求解。【结果】建立了一个多目标的投资组合模型, 在改进后的典型交易成本基础上, 实现投资组合收益最大且 CVaR 最小。【结论】选取国内股票市场的历史数据, 用 Matlab R2016a 对所选数据进行实证分析, 得出了一个切实可行的投资策略。

关键词:多目标投资组合; CVaR; 多目标遗传算法; 交易成本函数

中图分类号:O224

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2019)03-0016-05

随着金融市场的快速发展, 对投资风险和收益的评估成为投资理论研究的关键问题之一。1952年, Markowitz^[1]提出了均值-方差模型。该模型通过计算投资模型的均值和方差来度量投资的风险和收益, 但此方法存在一些不足之处^[2]: 1) 损失和收益不对称; 2) 可能产生无效解; 3) 难以估计收益和风险的因果关系^[3]。为了改进这些缺陷, Morgan^[4]在1996年提出了风险价值(Value-at-risk, VaR), 它是指在正常的市场条件下和一定置信区间内, 投资者在持有资产期可能产生的最大损失。但 VaR 不能用于度量整个市场和波动市场的投资组合的风险, 且 VaR 不是凸函数, 不能保证最优解是全局最优解。2000年, Rockefellar 等人^[5]提出了条件风险价值(Conditional value-at-risk, CVaR), 它是指在给定的置信水平下, 投资资产在持有期可能下跌大于该置信水平下的 VaR 值时的平均损失, 它克服了上述 VaR 的缺陷。因此, CVaR 受到许多学者的广泛关注并利用它研究投资组合模型。

李晓清等人^[6]研究了带有改进的典型交易成本函数的 MCVaR 模型, 并用粒子群算法进行了例证分析; 房成德等人^[7]研究了基于 CVaR 的典型交易成本的投资组合模型, 并用杂草算法对模型求解分析, 但是他们建立的模型都是单目标模型, 不能同时满足收益最大和风险最小的要求。杨天山等人^[8]研究了基于 CVaR 的多目标投资组合模型, 建立了两个目标函数的模型, 并用多目标粒子群算法对模型进行检验, 但该模型没有考虑交易成本对目标函数的影响。而在实际交易中, 佣金、印花税等交易成本往往是不能忽视的^[9]。因此, 本文考虑基于 CVaR 的带有改进的典型交易成本的多目标投资组合模型, 在典型交易成本基础上的利润最大, 且要求 CVaR 最小, 并选择用收敛性好、鲁棒性高的多目标遗传算法求解该多目标投资组合模型, 选取了国内股票市场的历史数据, 用 Matlab R2016a 对所选数据进行实证分析, 得出了一个切实可行的投资策略。

1 CVaR 风险度量方法

设 $f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 表示一个投资组合的损失函数, 其中 \mathbf{X} 为投资决策向量, \mathbf{Y} 为收益率随机变量, 则 $f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\mathbf{X}^\top \mathbf{Y}$ 。当 \mathbf{X} 固定时, $f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 是关于 \mathbf{Y} 的函数。假设 \mathbf{Y} 为连续随机变量, 则 \mathbf{Y} 的概率密度函数为 $\varphi(\mathbf{Y})$, 则 $\forall \delta \in \mathbf{R}$, 分布函数为 $\psi(\mathbf{X}, \delta) = \int_{f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq \delta} \varphi(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y}$, 表示损失 $f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 不超过 δ 的概率, 它是关于 δ 的非增右连续函数。假设用 $\beta (0 \leq \beta \leq 1)$ 表示置信水平, 则关于 \mathbf{X} 的 VaR 表示为:

* 收稿日期:2018-06-07 修回日期:2018-11-27 网络出版时间:2019-05-09 19:29

资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11471059);重庆市基础与前沿研究计划(No. cstc2018jcyjAX0119);重庆高校创新团队建设设计划(No. CXTDX201601026);重庆工商大学科研平台开放课题(No. KFJJ2017071);重庆市巴渝学者特聘教授专项

第一作者简介:宋慧慧,女,研究方向为金融工程, E-mail: songhuihui126@126.com; 通信作者:龙宪军,男,教授,博士, E-mail: xianjunlong@ctbu.edu.cn

网络出版地址:<http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190509.1929.018.html>

$$\text{VaR}_\beta(\mathbf{X}) = \min\{\delta \in \mathbf{R} : \psi(X, \delta) \geq \beta\}.$$

由 CVaR 的定义知:

$$\text{CVaR}_\beta(\mathbf{X}) = E(f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mid f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \geq \text{VaR}_\beta(\mathbf{X})) = (1 - \beta)^{-1} \int_{f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \geq \text{VaR}_\beta(\mathbf{X})} f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \varphi(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y}. \quad (1)$$

不难发现(1)式求解过程必须要用到 VaR, 并且(1)式给出的数学表达式十分复杂, 难以计算出结果。因此, Rockafellar 和 Uryasev^[5]构造了辅助函数 $F_\beta(\mathbf{X}, \delta)$ 并有效地将 CVaR 和 VaR 联系起来, 辅助函数为:

$$F_\beta(\mathbf{X}, \delta) = \delta + (1 - \beta)^{-1} \int_{\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^n} \max[f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \delta, 0] \varphi(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y}.$$

此时 $\text{VaR}_\beta(\mathbf{X}) = \min F_\beta(\mathbf{X}, \delta)$ 。由于市场的复杂性, 所引起的损失也具有不确定性, 且概率密度函数 $\varphi(\mathbf{Y})$ 不容易计算, 故采用历史模拟方法计算, 用历史数据来预测未来随机向量的分布情况。假设随机变量 \mathbf{Y} 在过去交易日的情形来代表 m 个情景, 令每种情景下的取值为 $\bar{Y}_j (j = 1, 2, \dots, m)$, 且每种情形发生的概率均为 $\frac{1}{m}$ 。故有:

$$\tilde{F}_\beta(\mathbf{X}, \delta) = \delta + \frac{1}{m(1 - \beta)} \sum_{j=1}^m [\max(f(\mathbf{X}, \bar{Y}_j) - \delta, 0)]. \quad (2)$$

由于(2)式中 max 的存在, 且函数 $\tilde{F}_\beta(\mathbf{X}, \delta)$ 通常不是连续可微的, 这就使得一般的算法无法求解。这里利用李兴斯^[10]提出的聚合函数, 将 max 函数光滑化。对于任意的 $u > 0$, 则上述函数可以表示为:

$$\tilde{F}_\beta(\mathbf{X}, \delta, u) = \delta + \frac{1}{m(1 - \beta)} \sum_{j=1}^m \left[u \ln \left(\exp \left(\frac{f(\mathbf{X}, \bar{Y}_j) - \delta}{u} \right) + 1 \right) \right].$$

2 基于 CVaR 含有改进典型交易成本的多目标投资组合模型

在实际的金融市场中, 投资交易需要成本, 若忽略了交易成本的投资组合往往会对实际收益影响很大, 可能会使投资失效。2002 年, 王春峰等人^[2]提出了典型交易成本, 并引入到投资组合中, 他们认为图 1 中 AB 段为线性交易成本。但线性交易成本在投资成本中极少出现, 所以房成德等人^[7]提出将 AB 段视为凸函数, 又因为 AB 段的单位增加量不大于 B 点之后, 故改进后的交易成本函数 $C(\mathbf{X}) = (c(x_1), c(x_2), \dots, c(x_n))$ 可表示为:

$$c(x_i) = \begin{cases} r\sqrt{x_i}, & 0 \leq x_i < a; \\ r(kx_i^2 + hx_i + q), & a \leq x_i < b, 0 < k < 1; \\ rx_i^3, & b \leq x_i \leq 1. \end{cases}$$

本文借鉴改进后的典型交易成本函数, 建立一个收益期望最大且风险期望最小的双目标投资组合模型。设 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为对 n 种股票的投资比例, $\mathbf{R} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ 为期望收益率, w 表示股票的实际收益率, 则基于 CVaR 风险度量的多目标投资组合模型表示为:

$$\begin{aligned} \max w(\mathbf{X}) &= \sum_{i=1}^n r_i x_i - \sum_{i=1}^n c(x_i), \\ \min \tilde{F}_\beta(\mathbf{X}, \delta, u) &= \delta + \frac{1}{m(1 - \beta)} \sum_{j=1}^m \left[u \ln \left(\exp \left(\frac{f(\mathbf{X}, \bar{Y}_j) - \delta}{u} \right) + 1 \right) \right], \end{aligned}$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \sum_{i=0}^n x_i = 1, & i = 1, 2, 3, \dots, n. \\ 0 \leq x_i \leq 1 \end{cases}$$

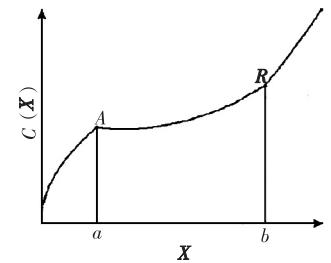


图 1 改进后的典型交易成本函数

Fig. 1 Improved typical transaction cost function

其中, $f(\mathbf{X}, \bar{Y}_j) = -\mathbf{X}^\top \bar{Y}_j, x_i \geq 0$ 表示不允许卖空。称投资方案 \mathbf{X} 比 \mathbf{Y} 好, 当且仅当 $w(\mathbf{X}) > w(\mathbf{Y})$ 且 $\tilde{F}_\beta(\mathbf{X}, \delta, u) < \tilde{F}_\beta(\mathbf{Y}, \delta, u)$ 。

3 求解算法及实证分析

3.1 求解算法设计

投资组合模型中, 含有改进的典型交易成本函数, 用传统的数值优化很难解决该问题。因此, 本文利用一种基于生物遗传法机理的智能算法——多目标遗传算法来求解多目标投资组合模型。多目标遗传算法与单目标

遗传的差别在于:第一,要满足恰当地评价和选择 pareto 最优解,并留给下一代;第二,要满足个体集合的多样性,以保证 pareto 最优解集合的多样性;第三,满足构造生成有效的 pareto 最优解的交叉、变异等遗传操作。算法的具体步骤如下:

步骤 1:设定种群的大小 pop_size , 交叉概率 p_c , 变异概率 p_m , 最大迭代数 $\max G$, 初始评价函数值 $\min E$ 。

步骤 2:生成初始解染色体(编码)。

步骤 3:根据编码求解码,即多目标优化问题的目标函数 $f_k(\mathbf{x})$ 。

步骤 4:根据各目标函数 $f_k(\mathbf{x})$,生成 pareto 最优解。

步骤 5:通过向量评价遗传算法,对各染色体进行评价和选择:

1) 将种群均匀的分成 q (目标函数的个数)个子种群,第 i 个子种群仅根据第 i 个目标函数值进行选择,生成各自的子种群;

2) 将各自生成的子种群合并到一个总的种群;

3) 对这一总的种群进行交叉和变异,并通过选择生成新的种群;

4) 若满足终止条件,则结束,否则转到 1)。

步骤 6:令 $gen=gen+1$,并进行如下操作:

1) 交叉:a) 经交叉生成染色体的数量 cC ,令 $cC=0$;

b) 在 $[0,1]$ 区间生成随机数表 $r_k(k=1,2,\dots,pop_size)$,选择 $r_k < p_c$ 的染色体 $v_k(*)$;

c) 将选中的染色体进行配对,令 $cC=cC+2$;

d) 随机确定交叉位置和区间,生成新的染色体分别为 $v_{cCnt-1}(*), v_{cCnt}(*)$ 。

2) 变异:a) 经变异生成的染色体数量 mC ,令 $mC=0$;

b) 在 $[0,1]$ 区间,随机生成数表 $r_k(k=1,2,\dots,pop_size)$;

c) 选择满足 $r_k < p_m$ 的染色体,并在 $[0,10]$ 区间变异;

d) 令 $mC=mC+1$,生成新的染色体 $v'_{cCnt+mC}$ 。

e) 解码新的子染色体,更新 pareto 最优解 E 。

f) 根据多目标遗产算法的向量评价遗传算法,对各染色体进行评价和选择。

步骤 7:若 $gen < \max G$,返回步骤 6;反之,因满足终止条件,输出 pareto 最优解 $E(*)$ 。

3.2 数值分析

从上证指数选取 5 支热门股票,分别为中国铝业、中国石油、工商银行、中国石化、宝钢股份。假设 2018 年 4 月 4 日买入这 5 支股票,计划 2018 年 4 月 23 日卖出共 10 个交易日。统计这 10 日 5 支股票的收盘价见表 1,然后计算出这 5 支股票在各个交易日的收益率见表 2,进而求得 5 支股票的期望收益率见表 3。

表 1 选取的 5 支股票在 10 个交易日的收盘价

Tab. 1 The closing price of the selected 5 stocks on 10 trading days

股票名称	交易日期									
	9 日	10 日	11 日	12 日	13 日	16 日	17 日	18 日	19 日	20 日
中国铝业	4.51	4.70	4.72	4.59	4.62	4.55	4.62	4.65	5.12	5.13
中国石油	7.48	7.59	7.69	7.73	7.62	7.55	7.52	7.64	7.75	7.64
工商银行	5.86	6.12	6.24	6.08	6.03	5.82	5.79	5.88	5.92	5.92
中国石化	6.59	6.77	6.89	6.94	6.83	6.71	6.62	6.85	6.90	6.83
宝钢股份	8.56	8.88	8.78	8.72	8.75	8.50	8.45	8.74	9.12	9.09

表 2 选取的 5 支股票在 10 个交易日的收益率

Tab. 2 The rate of return of the selected 5 stocks on 10 trading days

股票名称	交易日期									
	9 日	10 日	11 日	12 日	13 日	16 日	17 日	18 日	19 日	20 日
中国铝业	18.06	6.09	6.55	3.61	4.29	2.71	4.29	4.97	15.58	15.80
中国石油	0.27	1.74	3.08	3.62	2.14	1.21	0.80	2.41	3.89	2.41
工商银行	-0.17	4.26	6.30	3.58	2.73	-0.85	-1.36	0.17	0.85	0.85
中国石化	2.49	5.29	7.15	7.93	6.22	4.35	2.95	6.53	7.31	6.22
宝钢股份	4.01	7.90	6.68	5.95	6.32	3.28	2.67	6.20	10.81	10.45

表3 选取的5支股票的期望收益率

Tab. 3 The average rate of return of the selected 5 stocks

	中国铝业	中国石油	工商银行	中国石化	宝钢股份
期望收益率	0.065 688 488	0.021 581 769	0.016 354 344	0.056 454 121	0.064 277 035

此时 $n=5, m=10, a=0.2, b=0.8, \beta=0.95, pop_size=200, p_m=0.01, \max G=60$, 则计算出的5支股票的最优投资比例及所对应的投资组合的收益和风险见表4。选取迭代过程中解的变化,即投资组合的比例与收益和风险的关系见表5。同时绘制了迭代过程中收益与风险的相关关系图,如图2。

表4 选取的5支股票的投资比例及收益和风险

Tab. 4 The investment proportion of 5 stocks and their return and risk

	中国铝业	中国石油	工商银行	中国石化	宝钢股份	投资风险	投资收益
投资比例	0.784	0	0	0	0.216	0.7	0.065

表5 投资组合的比例与收益和风险的关系

Tab. 5 The relationship between portfolio ratio and return and risk

中国铝业	中国石油	工商银行	中国石化	宝钢股份	投资风险	投资收益
0.784 0	0	0	0	0.216 0	0.700 0	0.065 0
0.224 0	0	0	0.425 0	0.732 5	0.480 0	0.063 4
0.204 3	0	0	0.237 6	0.558 1	0.440 0	0.062 5
0	0.305 0	0	0.459 0	0.237 0	0.156 0	0.047 4
0	0.039 8	0	0.259 1	0.214 8	0.082 5	0.039 5

从表4可以看出,投资比例主要集中在收益率较高的中国铝业和宝钢股份上,此时的实际收益率较高,风险也较高,符合“高收益高风险”。且从表5可以看出,如果将投资比例分在其他期望收益率较低的股票上时,实际收益率就会降低,风险也会降低,且从图2可以看出,收益和风险成正相关关系,显然该模型是合理有效的。

4 总结

本文运用CVaR作为计算风险的方法,并在收益函数中考虑了改进后的典型交易成本函数,建立了含有两个目标函数的投资组合模型,结合历史数据,利用多目标遗传算法求解该问题,并用Matlab R2016a对该组合模型进行数值验证,得到了一个切实可行的投资策略。在现有的条件下,求解结果符合投资的一般规律,即追求利益最大同时尽量减少风险。当存在高风险的资产时,作为一个不偏好风险的理性人,自然会减少对该资产的投资比例,如果过于追求收益最大化,必然会承担较大的风险。

参考文献:

- [1] MARKOWITZ H M. Portfolic selection[J]. Journal of Finance, 1952, 7(1): 77-91.
- [2] 王春峰,杨建林,赵欣. 具有典型交易成本的投资组合管理模型及其求解[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(10): 134-138.
- WANG C F, YANG J L, ZHAO X. Portfolio management

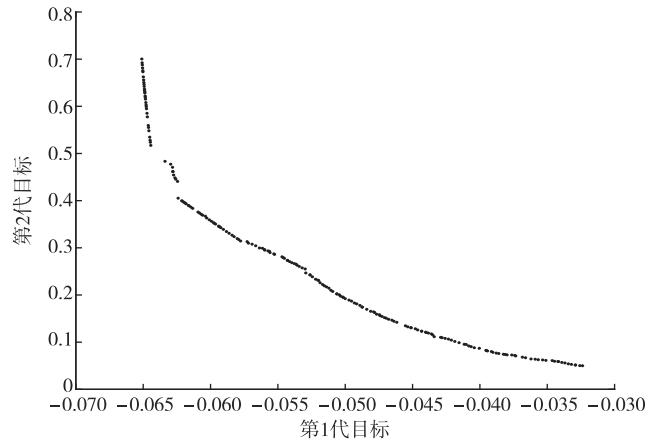


图2 收益与风险的相关关系

Fig. 2 Correlation between income and risk

- model with typical transaction cost and its solution[J]. System Engineering Theory and Practice, 2002, 22(10): 134-138.
- [3] ARTZNER P, DELBAEN F, EBER J M, et al. Thinking coherently[J]. Risk, 1997, 10(11): 68-71.
- [4] JORION P. Value at risk: the benchmark for controlling

- market risk [M]. Chicago: Irwin Professional Publishing, 2000.
- [5] ROCKAFELLAR T, URYASEV S. Optimization of conditional value-at-risk [J]. Journal of Risk, 2000, 2(3):21-41.
- [6] 李晓清, 宋江泽, 韦增欣. 带有改进的典型交易成本函数的MCVaR模型及其例证分析[J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(13):103-114.
- LI X Q, SONG J Z, WEI Z X. MCVaR model with improved typical transaction cost function and its example analysis [J]. Journal of Mathematics in Practice and Theory, 2014, 44(13):103-114.
- [7] 房成德, 韦增欣, 张梦颖. 基于CVaR的典型交易成本的投资组合模型[J]. 广西大学学报(自然科学版), 2015, 40(6): 1611-1616.
- FANG C D, WEI Z X, ZHANG M Y. Portfolio model of typical transaction cost based on CVaR [J]. Journal of
- Guangxi University (Natural Science), 2015, 40(6): 1611-1616.
- [8] 杨天山, 韦增欣, 雷震, 等. 基于CVaR的多目标投资组合模型[J]. 数学的实践与认识, 2015, 45(2):82-88.
- YANG T S, WEI Z X, LEI Z, et al. Multi objective portfolio model based on CVaR [J]. Journal of Mathematics in Practice and Theory, 2015, 45(2):82-88.
- [9] 李阿娜, 孙华东, 景永强. 基于交易费用的信息控制投资组合模型[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2017, 31(4): 163-168.
- LI A N, SUN D H, JIN Y Q. Model of portfolio optimization based on information control and transaction cost [J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science), 2017, 31(4): 163-168.
- [10] LI X S. An aggregate function method for monliner programming [J]. Science in China(A), 1991, 34:1467-1473.

Operations Research and Cybernetics

A Multi-Objective Portfolio Model with Improved Transaction Cost Based on CVaR

SONG Huihui¹, LONG Xianjun², LONG Qiang³

(1. National Intelligent Manufacturing Service Site, Chongqing Technology and Business University;
 2. College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067;
 3. School of Science, Southwest University of Science and Technology, Mianyang Sichuan 621010, China)

Abstract: [Purposes] Effective portfolios are the greatest gains that investors can achieve in controlling and minimizing risk. [Methods] The multi-objective genetic algorithm is used to solve the multi-objective investment portfolio model. [Findings] A multi-objective portfolio model is established which requires the minimum CVaR and the maximum profit on the basis of the typical transaction cost. [Conclusions] By using the multi-objective genetic algorithm, a practical investment strategy is obtained by analyzing the historical data of the China's stock market by Matlab 2016a.

Keywords: multi-objective portfolio; CVaR; multi-objective genetic algorithm; transaction cost function

(责任编辑 黄颖)