

带不耐烦顾客和工作故障的多重休假排队系统*

马占友¹, 曹建¹, 于向然¹, 郭闪闪¹, 陈利²

(1. 燕山大学 理学院; 2. 燕山大学 里仁学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘要:【目的】为了拓展随机排队理论,在 M/M/1 多重休假排队模型的基础上,引入不耐烦顾客和工作故障策略,建立了一个新的排队模型。【方法】构建系统稳态下的平衡方程,运用母函数法求解,推导出服务台处于不同状态时系统中顾客数的概率母函数,进而得到系统稳态下平均队长等性能指标的表达式,通过数值举例分析系统参数与系统性能指标的关系。基于博弈论知识,构建效用函数优化模型,分析顾客的均衡策略以及社会最优策略。【结果】建立并分析了带有不耐烦顾客和工作故障的多重休假排队系统。【结论】为现实排队中服务商和顾客提供风险预测和决策评估。

关键词:不耐烦顾客;工作故障;多重休假;均衡策略;社会最优策略

中图分类号: O226

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2019)04-0007-07

自从休假排队系统被提出以来,它被广泛地应用到网络、计算机等实际生活中,对排队理论产生了巨大的影响。许多学者将不耐烦顾客策略与休假策略相结合,取得了一些研究成果^[1-9]。Altman 等人^[1]分析了由于服务台休假而出现不耐烦顾客的排队模型,通过求解平衡方程得到队长等性能指标。Yue 等人^[2]研究了带不耐烦顾客策略的工作休假排队模型,得到性能指标以及排队系统的稳态条件。Selvaraju 等人^[3]在文献[1-2]的基础上,分析了带不耐烦顾客的多重、单重工作休假排队模型。Yechiali 等人^[4]分别在 M/M/1, M/M/c 以及 M/M/∞ 排队模型的基础上,研究了带有不耐烦顾客的两阶段排队模型,得到性能指标的表达式。在许多排队文献中,服务台被假定是稳定可靠的,但在实际生活中,服务台一般会出现故障并需要修理。Kalidass 等人^[5]分析了带工作故障的排队系统,推导出平均队长和平均响应时间等性能指标。Yang 等人^[6]将工作故障策略与不耐烦顾客策略相结合,分析了有限空间下的排队系统。王金亭^[7]基于博弈论知识分析了各类排队模型的均衡进队策略。Wang 等人^[8]在带门控策略的双端排队系统中,分析了3种不同信息情境下的顾客均衡策略以及社会最优策略。本文在 M/M/1 多重休假排队模型的基础上,引入工作故障策略以及不耐烦顾客策略,分析新的排队模型,为实际生活中服务商和顾客的决策提供理论支持。

1 模型描述

对带不耐烦顾客以及工作故障的多重休假排队系统进行了描述,并假定相关的系统参数值。

1) 顾客的到达服从参数为 λ 的泊松过程且单个到达。

2) 当服务台处于正规忙期,顾客的服务时间服从参数为 μ_1 的指数分布。服务台只在正规忙期发生故障,发生故障的概率为 α ,服务台在发生故障之后并不停止服务,而是以一个低于正常水平的服务率提供服务,顾客的服务时间服从参数为 μ_2 的指数分布,其中 $\mu_2 < \mu_1$ 。对发生故障的服务台立刻进行修理,假定修理时间服从参数为 β 的指数分布,修理结束后,服务台按照正常状态提供服务。

3) 当系统中无到达顾客时,服务台立刻开始休假,在该次休假结束时,系统中仍没有顾客,则服务台再进行一次独立同分布的休假,直到有顾客到达系统,服务才开始,其中休假时间服从参数为 θ 的指数分布。

4) 服务台在工作故障期的服务率较低,考虑顾客的不耐烦情绪。当顾客在服务台工作故障期到达系统时,

* 收稿日期:2018-09-03 修回日期:2019-06-17 网络出版时间:2019-07-15 12:30

资助项目:国家自然科学基金(No. 61472342);河北省自然科学基金(No. A2018203088);河北省高等学校自然科学研究重点项目(No. ZD2017079);河北省高等学校科学技术研究青年基金(No. QN2016016)

第一作者简介:马占友,男,教授,博士,研究方向是排队论研究及网络性能分析,E-mail: mzhzy55@ysu.edu.cn;通信作者:曹建,男,E-mail: ydcaojian@163.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190715.1230.014.html>

将会激活一个随机长度 T 的不耐烦计时器,如果在不耐烦计时器到期前服务台被修理好,则顾客继续留在系统中直到完成服务。当服务台仍处在工作故障期,如果顾客在不耐烦计时器到期时没有接受完服务,就会变得不耐烦而离开系统,假设 T 服从参数为 ξ 的指数分布。

5) 假定顾客的到达过程、服务过程等相互独立,且服从先到先服务的服务规则。

2 稳态分析

2.1 系统的平衡方程

令 $N(t)$ 表示 t 时刻系统中的顾客数, $J(t)$ 表示 t 时刻服务台的状态,并令:

$$J(t) = \begin{cases} 0, & \text{时刻 } t \text{ 服务台处于休假状态;} \\ 1, & \text{时刻 } t \text{ 服务台处于正规忙期状态;} \\ 2, & \text{时刻 } t \text{ 服务台处于工作故障状态.} \end{cases}$$

则 $\{(N(t), J(t)), t \geq 0\}$ 是一个连续时间的二维 Markov 过程,且状态空间为 $\Omega = \{(0, 0) \cup (i, j), i \geq 1, j = 0, 1, 2\}$ 。

定义系统的稳态概率: $P_{n,j} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = n, J(t) = j\}$, $(n, j) \in \Omega$, 则排队模型的状态转移如图 1 所示。

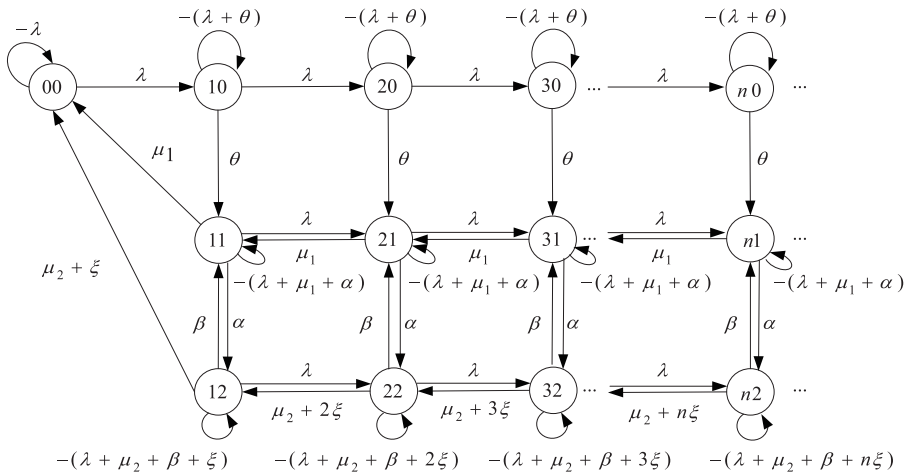


图 1 排队模型的状态转移

Fig. 1 State transition of the queueing model

系统稳态下的平衡方程为:

$$\lambda P_{00} = \mu_1 P_{11} + (\mu_2 + \xi) P_{12}, \quad (1)$$

$$(\lambda + \theta) P_{n,0} = \lambda P_{n-1,0}, n \geq 1, \quad (2)$$

$$(\lambda + \mu_1 + \alpha) P_{11} = \theta P_{10} + \beta P_{12} + \mu_1 P_{21}, \quad (3)$$

$$(\lambda + \mu_1 + \alpha) P_{n,1} = \lambda P_{n-1,1} + \theta P_{n,0} + \beta P_{n,2} + \mu_1 P_{n+1,1}, n \geq 2, \quad (4)$$

$$(\lambda + \mu_2 + \beta + \xi) P_{12} = \alpha P_{11} + (\mu_2 + 2\xi) P_{22}, \quad (5)$$

$$(\lambda + \mu_2 + \beta + n\xi) P_{n,2} = \lambda P_{n-1,2} + \alpha P_{n,1} + (\mu_2 + (n+1)\xi) P_{n+1,2}, n \geq 2. \quad (6)$$

定义部分概率母函数 $G_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,0} z^n$, $G_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{n,1} z^n$, $G_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{n,2} z^n$, 且有: $G'_i(z) = \frac{d}{dz} G_i(z) =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n P_{n,i} z^{n-1}, i = 0, 1, 2.$$

在(2)式的两边乘以 z^n , 并对所有 n 求和, 得:

$$G_0(z) = \frac{\lambda + \theta}{\lambda(1-z) + \theta} P_{00}. \quad (7)$$

同理, 由(3), (4)式及(5), (6)式, 分别得:

$$\varphi(z) G_1(z) - \theta z G_0(z) - \beta z G_2(z) = -\theta P_{00} z - \mu_1 P_{11} z, \quad (8)$$

$$\omega(z) G_2(z) + \xi z(z-1) G'_2(z) - \alpha z G_1(z) = -(\mu_2 + \xi) P_{12} z, \quad (9)$$

其中 $\omega(z) = -\lambda z^2 + (\lambda + \mu_2 + \beta)z - \mu_2$, $\varphi(z) = -\lambda z^2 + (\lambda + \mu_1 + \alpha)z - \mu_1$ 。

将(7)式代入(8)式,得:

$$G_1(z) = \frac{\beta z}{\varphi(z)} G_2(z) + \frac{\lambda \theta z^2}{(\lambda(1-z) + \theta)\varphi(z)} P_{00} - \frac{\mu_1 z P_{11}}{\varphi(z)}. \quad (10)$$

将(10)式代入(9)式,并结合(1)式,整理得:

$$G_2'(z) = \frac{\omega(z)\varphi(z) - \alpha\beta z^2}{\xi(1-z)z\varphi(z)} G_2(z) = \left[\frac{\lambda}{\xi(1-z)} - \frac{\alpha\lambda\theta z^2}{\xi(1-z)(\lambda - \lambda z + \theta)\varphi(z)} \right] P_{00} + \left[\frac{\alpha\mu_1 z}{\xi(1-z)\varphi(z)} - \frac{\mu_1}{\xi(1-z)} \right] P_{11}. \quad (11)$$

2.2 微分方程求解

为了求解(11)式,假设 z_1 和 z_2 是方程 $\varphi(z)$ 的根,满足 $\varphi(z) = -\lambda(z - z_1)(z - z_2)$, 因为 $\varphi(0) = -\mu_1 < 0$, $\varphi(1) = \alpha > 0$, $\varphi(z)$ 是连续函数,所以 $z_2 > 1 > z_1 > 0$, $z_1 z_2 = \frac{\mu_1}{\lambda}$, $z_1 + z_2 = \frac{\lambda + \mu_1 + \alpha}{\lambda}$ 。

定义(11)式中 $G_2(z)$ 的系数为 $f(z) = -\frac{\omega(z)\varphi(z) - \alpha\beta z^2}{\xi(1-z)z\varphi(z)}$, 变形得:

$$f(z) = -\frac{\lambda}{\xi} + \frac{\mu_2}{\xi z} + \frac{\beta A}{\xi(z - z_1)} - \frac{\beta B}{\xi(z - z_2)}, \quad (12)$$

其中 $A = \frac{\mu_1 - z_1}{\lambda(z_2 - z_1)}$, $B = \frac{\mu_1 - z_2}{\lambda(z_2 - z_1)}$ 。

根据(12)式,计算 $e^{\int f(z) dz}$, 得:

$$e^{\int f(z) dz} = e^{-\frac{\lambda z}{\xi} + \frac{\mu_2}{\xi} \ln|z - z_1| + \frac{\beta A}{\xi} (z_2 - z)^{-\frac{\beta B}{\xi}}}. \quad (13)$$

在(11)式的两边分别乘以(13)式,整理得:

$$\frac{d}{dz} [k_1(z) G_2(z)] = \left[\frac{\lambda(\lambda - \lambda z + \theta)\varphi(z) - \alpha\lambda\theta z^2}{\xi(1-z)(\lambda - \lambda z + \theta)\varphi(z)} P_{00} + \frac{\alpha\mu_1 z - \mu_1 \varphi(z)}{\xi(1-z)\varphi(z)} P_{11} \right] k_1(z), \quad z \leq z_1, \quad (14)$$

$$\frac{d}{dz} [k_2(z) G_2(z)] = \left[\frac{\lambda(\lambda - \lambda z + \theta)\varphi(z) - \alpha\lambda\theta z^2}{\xi(1-z)(\lambda - \lambda z + \theta)\varphi(z)} P_{00} + \frac{\alpha\mu_1 z - \mu_1 \varphi(z)}{\xi(1-z)\varphi(z)} P_{11} \right] k_2(z), \quad z > z_1, \quad (15)$$

其中 $k_1(z) = e^{-\frac{\lambda z}{\xi} + \frac{\mu_2}{\xi} \ln(z_1 - z) + \frac{\beta A}{\xi} (z_2 - z)^{-\frac{\beta B}{\xi}}}$, $k_2(z) = e^{-\frac{\lambda z}{\xi} + \frac{\mu_2}{\xi} \ln(z - z_1) + \frac{\beta A}{\xi} (z_2 - z)^{-\frac{\beta B}{\xi}}$ 。

对(14)式从 0 到 $z(z \leq z_1)$ 积分,对(15)式从 z_1 到 z 积分,整理得:

$$G_2(z) = \begin{cases} \frac{\frac{\lambda}{\xi} P_{00} \int_0^z \frac{k_1(x)((\lambda - \lambda x + \theta)\varphi(x) - \alpha\theta x^2)}{(1-x)(\lambda - \lambda x + \theta)\varphi(x)} dx + \frac{\mu_1}{\xi} P_{11} \int_0^z \frac{k_1(x)(\alpha x - \varphi(x))}{(1-x)\varphi(x)} dx}{k_1(z)}, & z \leq z_1, \\ \frac{\frac{\lambda}{\xi} P_{00} \int_{z_1}^z \frac{k_2(x)((\lambda - \lambda x + \theta)\varphi(x) - \alpha\theta x^2)}{(1-x)(\lambda - \lambda x + \theta)\varphi(x)} dx + \frac{\mu_1}{\xi} P_{11} \int_{z_1}^z \frac{k_2(x)(\alpha x - \varphi(x))}{(1-x)\varphi(x)} dx}{k_2(z)}, & z > z_1. \end{cases} \quad (16)$$

因此,得到了 $G_2(z)$ 的表达式,只要确定 P_{00} 和 P_{11} 的表达式,根据(10)式可以得到 $G_1(z)$ 。

2.3 平均队长

为求解服务台各状态下的系统平均队长表达式,令 $E(N_0)$, $E(N_1)$ 和 $E(N_2)$ 分别表示服务台在休假状态、正规忙期状态以及工作故障状态下的平均队长。令:

$$S = \int_0^{z_1} \frac{k_1(x)((\lambda - \lambda x + \theta)\varphi(x) - \alpha\theta x^2)}{(1-x)(\lambda - \lambda x + \theta)\varphi(x)} dx, D = \int_0^{z_1} \frac{k_1(x)(\alpha x - \varphi(x))}{(1-x)\varphi(x)} dx,$$

$$U = \int_{z_1}^1 \frac{k_2(x)((\lambda - \lambda x + \theta)\varphi(x) - \alpha\theta x^2)}{(1-x)(\lambda - \lambda x + \theta)\varphi(x)} dx, V = \int_{z_1}^1 \frac{k_2(x)(\alpha x - \varphi(x))}{(1-x)\varphi(x)} dx.$$

对于(16)式的第一个方程,令 $z \rightarrow z_1$ 时,分母趋近于 0,根据 L'Hospital 法则,分子必趋近于 0,则:

$$P_{00} = -\frac{\mu_1 D}{\lambda S} P_{11}. \quad (17)$$

令 $z=1$ 时,

$$G_2(1) = \frac{\frac{\lambda}{\xi} P_{00} U + \frac{\mu_1}{\xi} P_{11} V}{k_2(1)}. \quad (18)$$

在(7),(8)式中,令 $z=1$,以及 $G_0(1)+G_1(1)+G_2(1)=1$,得:

$$G_0(1) = \frac{\lambda + \theta}{\theta} P_{00}, \quad (19)$$

$$G_1(1) = 1 - \frac{\lambda + \theta}{\theta} P_{00} - \frac{\alpha + \mu_1 P_{11} - \left(\lambda + \alpha + \frac{\alpha\lambda}{\theta}\right) P_{00}}{\alpha + \beta},$$

$$G_2(1) = \frac{\alpha + \mu_1 P_{11} - \left(\lambda + \alpha + \frac{\alpha\lambda}{\theta}\right) P_{00}}{\alpha + \beta}. \quad (20)$$

将(20)式代入(18)式,并结合(17)式,得:

$$P_{00} = \frac{\alpha \xi D k_2(1)}{\lambda(DU - SV)(\alpha + \beta) + \left(\left(\lambda + \alpha + \frac{\alpha\lambda}{\theta}\right) D + \lambda S\right) \xi k_2(1)},$$

$$P_{11} = -\frac{\alpha \lambda S \xi k_2(1)}{\mu_1 \lambda(DU - SV)(\alpha + \beta) + \left(\left(\lambda + \alpha + \frac{\alpha\lambda}{\theta}\right) D + \lambda S\right) \xi \mu_1 k_2(1)}.$$

对(7)式关于 $z=1$ 处求导,得:

$$E(N_0) = G'_0(1) = \frac{\lambda}{\theta} \left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right) P_{00}. \quad (21)$$

对于(9)式,利用 L'Hospital 法则,得:

$$E(N_2) = G'_2(1) = \frac{1}{\xi + \beta} [\alpha G'_1(1) - (\mu_2 - \lambda) G_2(1)]. \quad (22)$$

对(8)式关于 $z=1$ 处求导,整理得:

$$E(N_1) = G'_1(1) = \frac{1}{\alpha} [\theta G'_0(1) + \beta G'_2(1) - (\mu_1 - \lambda) G_1(1)]. \quad (23)$$

将(23)式代入(22)式,得:

$$E(N_2) = G'_2(1) = \frac{1}{\xi} [\theta G'_0(1) - (\mu_1 - \lambda) G_1(1) - (\mu_2 - \lambda) G_2(1)]. \quad (24)$$

将(24)式代入(23)式,得:

$$E(N_1) = G'_1(1) = \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{\theta(\beta + \xi)}{\xi} \right) G'_0(1) - \frac{\beta}{\xi} (\mu_2 - \lambda) G_2(1) - \left(\frac{\beta}{\xi} + 1 \right) (\mu_1 - \lambda) G_1(1) \right]. \quad (25)$$

3 性能指标

根据上述分析,得到如下的系统性能指标:

1) 系统的平均队长为 $E(N) = E(N_0) + E(N_1) + E(N_2)$;

2) 系统的平均等待队长为 $E(N_q) = \sum_{n=1}^{\infty} n P_{n+1,1} + \sum_{n=1}^{\infty} n P_{n+1,2} = E(N_1) + E(N_2) + G_0(1) - 1$;

3) 顾客的平均逗留时间为 $E(W) = \frac{E(N_0) + E(N_1) + E(N_2)}{\lambda}$;

4) 系统的离去率为 $R = \sum_{n=1}^{\infty} \xi n P_{n,2} = \xi E(N_2)$ 。

其中 $G_0(1), E(N_0), E(N_1), E(N_2)$ 的表达式分别见(19),(21),(25)和(24)式。

4 数值分析

根据上述分析得到的系统性能指标,利用数值实验检验系统参数对系统性能指标的影响。在图 2~3 中,假设 $\alpha=0.3, \lambda=0.6, \mu_1=0.7, \mu_2=0.4, \xi=0.3$ 。图 2 描述了系统平均队长 $E(N)$ 与休假率 θ 和修复率 β 之间的关

系。当 β 为定值时, $E(N)$ 随着 θ 的增大而减小, 当 θ 为定值时, $E(N)$ 随着 β 的增大而减小。图 3 描述了系统平均等待队长 $E(N_q)$ 与休假率 θ 和修复率 β 之间的关系, 当 β 为定值时, $E(N_q)$ 随着 θ 的增大而减小, 当 θ 为定值时, $E(N_q)$ 随着 β 的增大而减小。

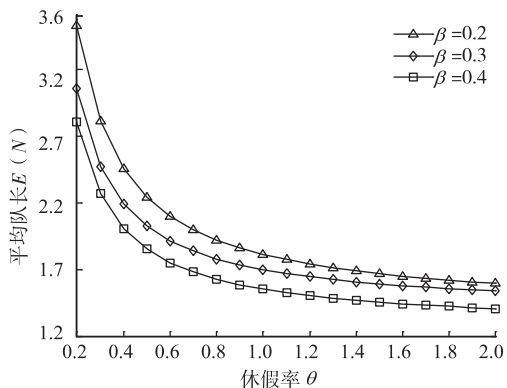


图 2 $E(N)$ 与 θ 和 β 的关系

Fig. 2 Relation of $E(N)$ with θ and β

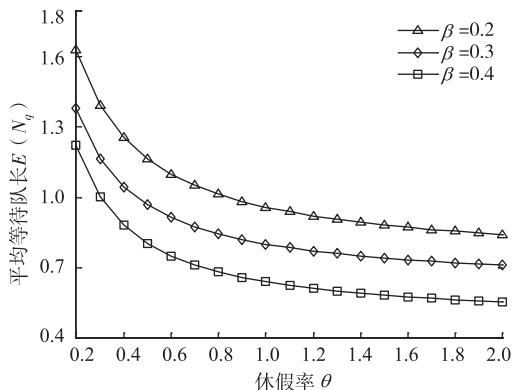


图 3 $E(N_q)$ 与 θ 和 β 的关系

Fig. 3 Relation of $E(N_q)$ with θ and β

在图 4 中, 假设 $\alpha=0.3, \mu_1=0.7, \mu_2=0.5, \beta=0.3, \xi=0.3$ 。图 4 描述了顾客的平均逗留时间 $E(W)$ 与到达率 λ 和休假率 θ 之间的关系, 当 θ 为定值时, $E(W)$ 随着 λ 的增大而增大, 当 λ 为定值时, $E(W)$ 随着 θ 的增大而减小。当 $\lambda > 1.8$, 取不同的 θ 值时, $E(W)$ 值变动较小, 主要原因是顾客的到达率高时, 服务台长时间处于正规忙期或者工作故障期, 休假期很少, 因此 θ 值将不会对 $E(W)$ 值产生明显影响。在图 5 中, 假设 $\alpha=0.3, \lambda=0.6, \mu_1=0.7, \beta=0.4, \theta=0.3$ 。图 5 描述了顾客离去率 R 与不耐烦率 ξ 和服务率 μ_2 之间的关系, 当 μ_2 为定值时, R 随着 ξ 的增大而增大, 当 ξ 为定值时, R 随着 μ_2 的增大而减小。

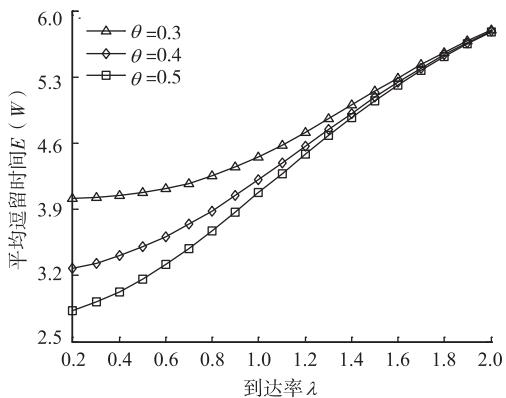


图 4 $E(W)$ 与 λ 和 θ 的关系

Fig. 4 Relation of $E(W)$ with λ and θ

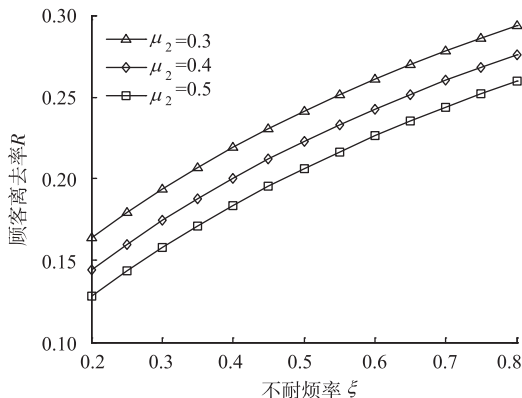


图 5 R 与 ξ 和 μ_2 的关系

Fig. 5 Relation of R with ξ and μ_2

5 均衡策略以及社会最优策略

构建个人以及社会的效用函数, 分析顾客的均衡策略以及社会最优策略。假设 r 表示每个顾客在服务完成后获得的效用, C 表示顾客在逗留过程中的单位等待费用, f 表示每个进队顾客需要支付的入场费用。则顾客的个人效用 U_i 的函数定义为: $U_i = r - CE(W) - f$ 。

假设到达系统的顾客面对完全不可见情形的排队情况, 即顾客既不清楚系统队长又不知道服务台状态。假设 Λ 表示顾客潜在到达率, q^e 表示均衡策略下顾客的进队概率。则顾客的均衡策略为:

$$q^e = \begin{cases} 0, & \text{当 } r < CE(W)_{\lambda=0} + f, \\ \frac{\lambda^e}{\Lambda}, & \text{当 } CE(W)_{\lambda=0} + f \leq r \leq CE(W)_{\lambda=\Lambda} + f, \\ 1, & \text{当 } r > CE(W)_{\lambda=\Lambda} + f. \end{cases}$$

其中 λ^e 是 $U_I=0$ 的解。

在图 6~7 中,参数假设为 $\alpha=0.3, \mu_1=0.7, \mu_2=0.5, \beta=0.3, \xi=0.3, r=50, C=6, f=18$ 。图 6 描述了个人效用 U_I 与到达率 λ 、休假率 θ 的变化情况。对于不同的 θ 值, U_I 随着 λ 的增大而减小,并且 U_I 均有零点,那么均衡到达率 λ^e 存在。

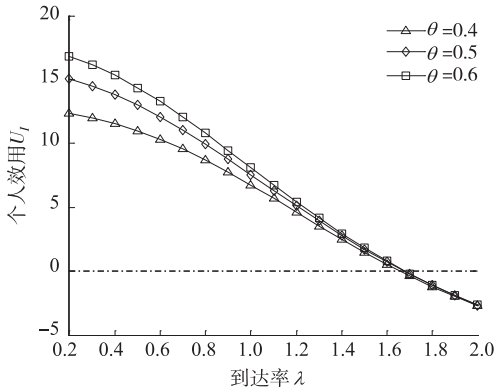


图 6 U_I 与 λ 和 θ 的关系

Fig. 6 Relation of U_I with λ and θ

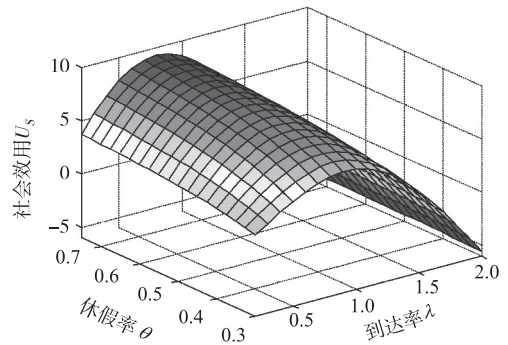


图 7 U_S 与 λ 和 θ 的关系

Fig. 7 Relation of U_S with λ and θ

为了讨论社会最优策略,假设 q^* 是社会最优进队概率, λ^* 为社会最优下的实际到达率,并且 $\lambda^* = q^* \Lambda$ 。社会效用 U_S 的函数定义为:

$$U_S = \lambda(r - CE(W) - f). \quad (26)$$

利用社会效用函数(26)式,得到 U_S 取最大值的最优到达率 λ^* :

$$\lambda^* = \operatorname{argmax}_{0 \leq \lambda \leq \Lambda} U_S. \quad (27)$$

图 7 描述了社会效用 U_S 与到达率 λ 、休假率 θ 的变化情况。当 θ 取不同值时,随着 λ 的增大, U_S 呈现先增大再减小的变化趋势。因此,社会最优下的实际到达率和社会最大效用值存在。例如,当 $\theta=0.4$,在 $\lambda^* = 0.8566$ 处, U_S 取最大值为 6.9920。

6 结论

本文在 M/M/1 多重休假排队模型的基础上,结合了不耐烦顾客策略以及工作故障策略,分析了一个新的排队系统。对构建的平衡方程进行详细推导,得到系统稳态队长,逗留时间以及顾客离去率等性能指标,通过数值例子,得到系统参数变化对各个系统性能指标的影响。最后构建效用函数,得到顾客的均衡策略以及社会最优下实际到达率和效用值。

参考文献:

- [1] ALTMAN E, YECHIALI U. Analysis of customers' impatience in queues with server vacations[J]. Queueing Systems, 2006, 52(4): 261-279.
- [2] YUE D Q, YUE W Y, XU G. Analysis of a queueing system with impatient customers and working vacations[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2011, 8(4): 208-212.
- [3] SELVARAJU N, GOSWAMI C. Impatient customers in an M/M/1 queue with single and multiple working vacations [J]. Computers and Industrial Engineering, 2013, 65: 207-215.
- [4] YECHIALI U, PEREL N. Queues with slow servers and impatient customers[J]. European Journal of Operational Research, 2010, 201: 247-258.
- [5] KALIDASS K, KASTURI R. A queue with working breakdowns[J]. Computers and Industrial Engineering, 2012, 63: 779-783.
- [6] YANG D Y, WU Y Y. Analysis of a finite-capacity system with working breakdowns and retention of impatient customers[J]. Journal of Manufacturing Systems, 2017, 44: 207-216.
- [7] 王金亭. 排队博弈论基础[M]. 北京: 科学出版社, 2016. WANG J T. Foundation of queue game theory[M]. Beijing: Science Press, 2016.
- [8] WANG F, WANG J T, ZHANG Z G. Strategic behavior and social optimization in a double-ended queue with gated

policy[J]. Computers and Industrial Engineering, 2017, 114:264-273.

[9] 付馨雨, 罗国旺. 多服务窗等待制 M/M/n 排队模型[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2013, 27(12):139-142.

FU X Y, LUO G W. M/M/n queue model of multi service window waiting system[J]. Journal of Chongqing University (Natural Science), 2013, 27(12):139-142.

Operations Research and Cybernetics

The Multiple Vacations Queueing System with Impatient Customers and Working Breakdowns

MA Zhanyou¹, CAO Jian¹, YU Xiangran¹, GUO Shanshan¹, CHEN Li²

(1. School of Science, Yanshan University; 2. Liren College, Yanshan University, Qinhuangdao Hebei 066004, China)

Abstract: [Purposes] In order to expend the random queueing theory, on the basis of the M/M/1 queueing model with multiple vacations, the impatient customers strategy and working breakdowns strategy are introduced. Therefore, a new queueing system is constructed. [Methods] The balance equations of the queueing system in steady state are constructed. The probability generating functions of the number of customers in the system when the server is in different states are derived by using the generating function approach. Furthermore, the explicit expressions of the performance measures are derived in steady state, such as the average queue length and the rate of abandonment of the customers etc. The relation which is between the parameters and performance measures is examined by numerical analysis. According to the game theory, the equilibrium strategy of the customer and the social optimal strategy are analyzed in detail by constructing the utility functions. [Findings] The multiple vacations queueing system with impatient customers and working breakdowns is analyzed. [Conclusions] Service providers and customers take the risk prediction and evaluation decision according to the results in the realistic queue.

Keywords: impatient customers; working breakdowns; multiple vacations; equilibrium strategy; social optimal strategy

(责任编辑 黄颖)