DOI:10.11721/cqnuj20190405

具有 Michaelis-Menten 食物链的随机恒化器模型的渐近行为*

赵翌含，杨志春
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】为了研究随机恒化器模型的渐近行为，本文考虑恒化器中一类稀释率受到白噪声干扰，具有 Michaelis-Menten 食物链的随机模型。首先证明模型正解的全局存在唯一性；【方法】然后通过构造 Lyapunov 函数，利用伊藤公式，得到模型的绝灭平衡点随机全局渐近稳定的充分条件；【结果】最后研究模型解的长期渐近行为，主要揭示在不同随机噪声条件下模型的解围绕其相应确定性模型的无捕食者平衡点和正平衡点的振荡行为。【结论】结果改进和推广现有文献的相关工作。

关键词:随机恒化器模型；Michaelis-Menten 食物链；渐近行为；随机全局渐近稳定

中图分类号:O211.63　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2019)04-0062-06

1 预备知识与模型建立

恒化器是一种使培养液的流速保持不变，并使微生物始终在低于其最高生长速率的条件下进行生长繁殖的连续培养装置。恒化器模型是描述在恒化器中微生物生长速率随时间变化的一类数学模型，是生物数学与理论生态学交叉领域的研究热点，该模型受到了学者的广泛研究[1-4]。在经典的具有单营养食物链的恒化器模型中，生物种群由营养物、食饵和捕食者组成，捕食者以食饵为食，食饵将消耗营养物，以 Holling II 型功能反应函数作为食饵和捕食者的增长率，该数学模型如下[4]：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=Q(s^0-s(t))-\dfrac{m_1 s(t)x(t)}{a_1+s(t)}\\ \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{m_1 s(t)x(t)}{a_1+s(t)}-Qx(t)-\dfrac{m_2 x(t)y(t)}{a_2+x(t)}\\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{m_2 x(t)y(t)}{a_2+x(t)}-Qy(t)\end{cases}。\tag{1}$$

其中：$s(t)$，$x(t)$和 $y(t)$分别表示营养物、食饵和捕食者在 t 时刻的浓度；s^0 表示输入营养物的浓度；Q 表示恒化器的稀释率；m_1，m_2，a_1 和 a_2 都是正常数；m_1 和 m_2 分别表示食饵和捕食者的最大增长率；a_1 和 a_2 分别表示食饵和捕食者的半饱和常数。Li 和 Kuang[1] 在模型(1)中结合一般反应函数和不同的去除率，提出了稳态的局部和全局稳定性并进行了持久性分析。

上述恒化器模型由确定性模型描述，可能只在宏观尺度上有效。然而，种群的自然生长不可避免地受到环境噪声的影响，因此，揭示噪声对生态系统动力学的影响是非常有用的。考虑到随机波动环境的影响，许多研究者将环境噪声引入确定性模型的参数中，建立起随机恒化器模型[5-9]。文献[8]研究一种具有 Lotka-Volterra 食物链的随机恒化器模型，利用 Lyapunov 函数和伊藤公式，证明了该模型正解的存在唯一性，得到了一些种群动力学性质的充分条件，并研究了随机模型的渐近行为及平稳分布的存在。文献[9]研究一种随机两种群 Monod 竞争恒化器模型，证明了该模型存在唯一的全局正解，并利用伊藤公式和 Lyapunov 方法，研究了随机系统的渐

* **收稿日期:**2019-01-11　　**修回日期:**2019-06-30　　**网络出版时间:**2019-07-15　12:30

资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11471061；No. 61673078)；重庆市基础研究与前沿探索项目(No. cstc2018jcyjAX0144)；重庆市高校科研创新团队支持计划项目(No. CXTDG201602008)；重庆市研究生科研创新项目(No. CYS18296)

第一作者简介:赵翌含，女，研究方向为微分方程与动力系统，E-mail: zhaoyihan13@126.com；**通信作者:**杨志春，男，教授，博士生导师，E-mail: yangzhch@126.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190715.1230.030.html

近行为和平稳分布。

不同于现有文献，本文考虑模型(1)中稀释率受白噪声的影响，即 $Q\to Q+\sigma B'(t)$，从而得到如下具有 Michaelis-Menten 食物链的随机恒化器模型：

$$\begin{cases}\mathrm{d}s(t)=\left[Q(s^0-s(t))-\dfrac{m_1s(t)x(t)}{a_1+s(t)}\right]\mathrm{d}t+\sigma(s^0-s(t))\mathrm{d}B(t)\\ \mathrm{d}x(t)=\left[\dfrac{m_1s(t)x(t)}{a_1+s(t)}-Qx(t)-\dfrac{m_2x(t)y(t)}{a_2+x(t)}\right]\mathrm{d}t-\sigma x(t)\mathrm{d}B(t)\\ \mathrm{d}y(t)=\left[\dfrac{m_2x(t)y(t)}{a_2+x(t)}-Qy(t)\right]\mathrm{d}t-\sigma y(t)\mathrm{d}B(t)\end{cases}\tag{2}$$

其中 $B(t)$表示布朗运动，σ 表示白噪声的强度，其他符号含义同模型(1)。据笔者所知，目前对上述模型的研究未见报道，为此，本文将研究模型(2)的长期渐近行为，从而揭示白噪声对生态系统动力学行为的影响。

2 正解的全局存在唯一性

为保证模型具有生物意义，首先需要确保模型(2)存在唯一的解，并且要求它是正的和全局的。借助于比较原理和文献[10]的方法，将证明模型(2)存在唯一的全局正解。

定理 1　对于任意给定的初值$(s_0,x_0,y_0)\in\mathbf{R}_+^3$，模型(2)存在唯一的解$(s(t),x(t),y(t))$ $(t\geqslant0)$，且该解以概率 1 位于 $\mathbf{R}_+^3$ 内，即对所有的 $t\geqslant0$，$(s(t),x(t),y(t))\in\mathbf{R}_+^3$ a.s. 。

证明　因为对于任意给定的初值$(s_0,x_0,y_0)\in\mathbf{R}_+^3$，模型(2)的系数局部 Lipschitz 连续，所以模型存在唯一的局部正解$(s(t),x(t),y(t))$$(t\in[0,\tau_e))$，其中 τ_e 为爆破时间。为了证明该解的全局存在性，只需证明 $\tau_e=\infty$ a.s. 。

因为解是正的，由模型(2)中 3 个随机微分方程可得：$\mathrm{d}s\leqslant(s^0-s)(Q\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B(t))$，$\mathrm{d}x\leqslant(m_1-Q)x\mathrm{d}t-\sigma x\mathrm{d}B(t)$，$\mathrm{d}y\leqslant(m_2-Q)y\mathrm{d}t-\sigma y\mathrm{d}B(t)$。定义 $\Phi(t)$为如下随机微分方程的解：

$$\mathrm{d}\Phi=(s^0-\Phi)(Q\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B(t)),\Phi(0)=s_0。\tag{3}$$

$\Psi(t)$为如下随机微分方程的解：

$$\mathrm{d}\Psi=(m_1-Q)\Psi\mathrm{d}t-\sigma\Psi\mathrm{d}B(t),\Psi(0)=x_0。\tag{4}$$

$\Omega(t)$为如下随机微分方程的解：

$$\mathrm{d}\Omega=(m_2-Q)\Omega\mathrm{d}t-\sigma\Omega\mathrm{d}B(t),\Omega(0)=y_0。\tag{5}$$

由随机方程的比较定理得 $s(t)\leqslant\Phi(t)$，$x(t)\leqslant\Psi(t)$，$y(t)\leqslant\Omega(t)$$(t\in[0,\tau_e)$a. s.)。同样，由模型(2)中 3 个随机微分方程可得：$\mathrm{d}s\geqslant[Q(s^0-s)-m_1\Psi]\mathrm{d}t+\sigma(s^0-s)\mathrm{d}B(t)$，$\mathrm{d}x\geqslant-(Qx+m_2\Omega)\mathrm{d}t-\sigma x\mathrm{d}B(t)$，$\mathrm{d}y\geqslant-y(Q\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B(t))$。定义 $\varphi(t)$为如下随机微分方程的解：

$$\mathrm{d}\varphi=[Q(s^0-\varphi)-m_1\Psi]\mathrm{d}t+\sigma(s^0-\varphi)\mathrm{d}B(t),\varphi(0)=s_0。\tag{6}$$

$\psi(t)$为如下随机微分方程的解：

$$\mathrm{d}\psi=-(Q\psi+m_2\Omega)\mathrm{d}t-\sigma\psi\mathrm{d}B(t),\psi(0)=x_0。\tag{7}$$

$\omega(t)$为如下随机微分方程的解：

$$\mathrm{d}\omega=-\omega(Q\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B(t)),\omega(0)=y_0。\tag{8}$$

由随机方程的比较定理得 $s(t)\geqslant\varphi(t)$，$x(t)\geqslant\psi(t)$，$y(t)\geqslant\omega(t)$$(t\in[0,\tau_e)$a.s.)。

综上所述：

$$\varphi(t)\leqslant s(t)\leqslant\Phi(t),\psi(t)\leqslant x(t)\leqslant\Psi(t),\omega(t)\leqslant y(t)\leqslant\Omega(t)(t\in[0,\tau_e)\text{a.s.})。\tag{9}$$

注意(3)～(8)式都是线性随机微分方程，$\Phi(t)$，$\Psi(t)$，$\Omega(t)$，$\varphi(t)$，$\psi(t)$和 $\omega(t)$可以分别从对应方程中显式求解，显然，它们都是正的且全局存在对所有 $t\in[0,\infty)$。所以由(9)式得 $\tau_e=\infty$ a.s. 。　证毕

3 随机恒化器模型的渐近行为

类似于文献[1]的讨论，不难得到确定性模型(1)平衡点的存在性和部分平衡点的稳定性。

引理 1　若$\dfrac{Qa_1}{m_1-Q}\geqslant s^0$，模型(1)只存在绝灭平衡点 $\boldsymbol{E}_0=(s^0,0,0)$，且 $\boldsymbol{E}_0$ 全局渐近稳定。若 $0<\dfrac{Qa_1}{m_1-Q}<s^0$，模型(1)存在无捕食者平衡点 $\boldsymbol{E}_1=\left(\dfrac{Qa_1}{m_1-Q},s^0-\dfrac{Qa_1}{m_1-Q},0\right)$，且$\dfrac{s^0}{Q}-\dfrac{a_1}{m_1-Q}\leqslant\dfrac{a_2Q}{m_2-Q}$时，$\boldsymbol{E}_1$ 是局部渐近稳定的。

若 $0<\frac{Qa_1}{m_1-Q}<s^0$ 且 $\frac{s^0}{Q}-\frac{a_1}{m_1-Q}>\frac{a_2Q}{m_2-Q}$,模型(1)存在正平衡点 $\boldsymbol{E}_2=\left(s^*,\frac{Qa_2}{m_2-Q},\frac{a_2}{m_2-Q}\left(\frac{m_1s^*}{a_1+s^*}-Q\right)\right)$,其中 s^* 满足方程 $Q(s^0-s)-\frac{m_1s}{a_1+s}\cdot\frac{Qa_2}{m_2-Q}=0$。

由引理1,当 $\frac{Qa_1}{m_1-Q}\geqslant s^0$ 时,$\boldsymbol{E}_0=(s^0,0,0)$ 是确定性模型(1)唯一的绝灭平衡点且全局渐近稳定,显然 $\boldsymbol{E}_0$ 仍然是随机模型(2)的平衡点。下面将说明当 $\frac{Qa_1}{m_1-Q}\geqslant s^0$,噪声强度满足一定条件时,模型(2)的绝灭平衡点 $\boldsymbol{E}_0$ 是随机全局渐近稳定的。

定理2 如果 $\frac{Qa_1}{m_1-Q}\geqslant s^0$,$\frac{m_1s^0}{a_1}<2Q$ 且 $\sigma^2<2Q-\frac{m_1s^0}{a_1}$,那么模型(2)的绝灭平衡点 $\boldsymbol{E}_0=(s^0,0,0)$ 是随机全局渐近稳定的。

证明 定义一个函数 $V:\mathbf{R}_+^3\to\mathbf{R}_+$,$V(s,x,y)=\frac{1}{2}(s-s^0+x)^2+Ax+By$,其中 $A=\frac{a_1}{m_1}(2Q-\sigma^2)$,$B=\frac{a_1}{m_1}(2Q-\sigma^2)-s^0$。由 $\frac{m_1s^0}{a_1}<2Q$,$\sigma^2<2Q-\frac{m_1s^0}{a_1}$ 知函数 V 是正定的,通过伊藤公式得:$\mathrm{d}V=LV\mathrm{d}t-\sigma[(s-s^0+x)^2+Ax+By]\mathrm{d}B(t)$,其中

$$LV=\left(\frac{\sigma^2}{2}-Q\right)[(s-s^0)^2+x^2]+(\sigma^2-2Q)(s-s^0)x+A\left(\frac{m_1s}{a_1+s}-Q\right)x+\frac{m_2xy}{a_2+x}(B-A-x-(s-s^0))-BQy\leqslant$$

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}-Q\right)[(s-s^0)^2+x^2]+(\sigma^2-2Q)(s-s^0)x+A\left(\frac{m_1s}{a_1+s}-Q\right)x。\tag{10}$$

当 $s\geqslant s^0$ 时,由 $\frac{Qa_1}{m_1-Q}\geqslant s^0$ 得 $\frac{m_1s}{a_1+s}-Q\leqslant\frac{m_1s}{a_1+s}-\frac{m_1s^0}{a_1+s^0}\leqslant\frac{m_1}{a_1}(s-s^0)$,则 $(\sigma^2-2Q)(s-s^0)x+A\left(\frac{m_1s}{a_1+s}-Q\right)x\leqslant0$,由(10)式得:$LV\leqslant\left(\frac{\sigma^2}{2}-Q\right)[(s-s^0)^2+x^2]$。当 $s<s^0$ 时,由 $\frac{Qa_1}{m_1-Q}\geqslant s^0$ 得 $\frac{m_1s}{a_1+s}-Q\leqslant\frac{m_1s}{a_1+s}-\frac{m_1s^0}{a_1+s^0}\leqslant\frac{m_1a_1}{(a_1+s^0)^2}(s-s^0)$,则 $(\sigma^2-2Q)(s-s^0)x+A\left(\frac{m_1s}{a_1+s}-Q\right)x\leqslant\left(Q-\frac{\sigma^2}{2}\right)[(s-s^0)^2+x^2]\left(1-\frac{a_1^2}{(a_1+s^0)^2}\right)$,由(10)式得:$LV\leqslant-\frac{a_1^2}{(a_1+s^0)^2}\left(Q-\frac{\sigma^2}{2}\right)[(s-s^0)^2+x^2]$。

总之,$LV\leqslant0$ 且 $LV=0$ 当且仅当 $s=s^0$,$x=0$,即 LV 是负定的。因此,模型(2)的绝灭平衡点 $\boldsymbol{E}_0=(s^0,0,0)$ 是随机全局渐近稳定的。 证毕

由引理1,当 $0<\frac{Qa_1}{m_1-Q}<s^0$ 时,$\boldsymbol{E}_1=(s_1,x_1,0)=\left(\frac{Qa_1}{m_1-Q},s^0-\frac{Qa_1}{m_1-Q},0\right)$ 是确定性模型(1)的无捕食者平衡点,但 $\boldsymbol{E}_1$ 不一定是随机模型(2)的平衡点。下面将通过研究模型(2)的解在随机扰动下围绕 $\boldsymbol{E}_1$ 的振荡行为来了解它的渐近行为。

定理3 如果 $0<\frac{Qa_1}{m_1-Q}<s^0$,$\frac{m_1s^0}{a_1}<2Q$,$x_1<\frac{a_2}{m_2}\left(Q-\frac{m_1s^0}{2a_1}\right)$ 且 $\sigma^2<2Q-\frac{a_2m_1Qs^0}{a_1(a_2Q-x_1m_2)}$,那么对模型(2)带有初值 $(s(0),x(0),y(0))\in\mathbf{R}_+^3$ 的任意解 $(s(t),x(t),y(t))$,都有:

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t[(s(r)-s_1)^2+(x(r)-x_1)^2+y(r)]\mathrm{d}r\leqslant\frac{2a_1x_1}{m_1\Lambda}\sigma^2。$$

其中 $\Lambda=\min\left\{\frac{a_1^2}{(a_1+s_1+4x_1)^2},\Gamma\right\}$,$\Gamma=\frac{(2Q-\sigma^2)\frac{a_1}{m_1}\left(\frac{x_1m_2}{a_2}-Q\right)+s^0Q}{\frac{\sigma^2}{2}-Q}$。

证明 定义一个函数 $V:\mathbf{R}_+^3\to\mathbf{R}_+$,$V(s,x,y)=V_1+V_2+V_3$,其中 $V_1=\frac{1}{2}(s-s_1+x-x_1)^2$,$V_2=\mathrm{C}_1\left(x-x_1-x_1\ln\frac{x}{x_1}\right)$,$V_3=\mathrm{C}_2y$,其中 $\mathrm{C}_1=\frac{a_1}{m_1}(2Q-\sigma^2)$,$\mathrm{C}_2=\frac{a_1}{m_1}(2Q-\sigma^2)-s^0$。由 $\frac{m_1s^0}{a_1}<2Q$,$x_1<\frac{a_2}{m_2}\left(Q-\frac{m_1s^0}{2a_1}\right)$,$\sigma^2<2Q-\frac{a_2m_1Qs^0}{a_1(a_2Q-x_1m_2)}$ 知 $\mathrm{C}_1>0$,$\mathrm{C}_2>0$,因此函数 V 正定。利用伊藤公式得:$\mathrm{d}V_1=LV_1\mathrm{d}t-$

$\sigma(s-s_1+x-x_1)^2\mathrm{d}B(t)$，$\mathrm{d}V_2=LV_2\mathrm{d}t-\sigma C_1(x-x_1)\mathrm{d}B(t)$，$\mathrm{d}V_3=LV_3\mathrm{d}t-\sigma C_2 y\mathrm{d}B(t)$，其中 $LV_1=\left(\frac{\sigma^2}{2}-Q\right)[(s-s_1)^2+(x-x_1)^2]+(\sigma^2-2Q)(s-s_1)(x-x_1)-\frac{m_2xy}{a_2+x}(s-s_1+x-x_1)$，$LV_2=C_1(x-x_1)\left(\frac{m_1s}{a_1+s}-Q-\frac{m_2y}{a_2+x}\right)+\frac{C_1x_1}{2}\sigma^2$，$LV_3=C_2y\left(\frac{m_2x}{a_2+x}-Q\right)$。注意 $C_1=C_2+s^0$，$s_1+x_1=s^0$，所以：

$$LV=LV_1+LV_2+LV_3\leqslant\left(\frac{\sigma^2}{2}-Q\right)[(s-s_1)^2+(x-x_1)^2+\Gamma y]+(\sigma^2-2Q)(s-s_1)(x-x_1)+C_1(x-x_1)\left(\frac{m_1s}{a_1+s}-Q\right)+\frac{C_1x_1}{2}\sigma^2。\tag{11}$$

其中 $\Gamma=\frac{C_1x_1\frac{m_2}{a_2}-C_2Q}{\frac{\sigma^2}{2}-Q}$。当 $(s-s_1)(x-x_1)\geqslant0$ 时，有 $\left(\frac{m_1s}{a_1+s}-Q\right)(x-x_1)=\left(\frac{m_1s}{a_1+s}-\frac{m_1s_1}{a_1+s_1}\right)(x-x_1)\geqslant0$ 且 $\left(\frac{m_1s}{a_1+s}-Q\right)(x-x_1)\leqslant\frac{m_1}{a_1}(s-s_1)(x-x_1)$，则 $(\sigma^2-2Q)(s-s_1)(x-x_1)+C_1(x-x_1)\left(\frac{m_1s}{a_1+s}-Q\right)\leqslant0$，由(11)式得 $LV\leqslant\left(\frac{\sigma^2}{2}-Q\right)[(s-s_1)^2+(x-x_1)^2+\Gamma y]+\frac{C_1x_1}{2}\sigma^2$。当 $(s-s_1)(x-x_1)<0$，$s>s_1+4x_1$ 时（即 $s-s_1>0$，$x-x_1<0$），有 $(x-x_1)\left(\frac{m_1s}{a_1+s}-Q\right)<0$ 且 $(\sigma^2-2Q)(s-s_1)(x-x_1)\leqslant\left(\frac{Q}{2}-\frac{\sigma^2}{4}\right)(s-s_1)^2$。由(11)式得 $LV\leqslant\left(\frac{\sigma^2}{4}-\frac{Q}{2}\right)[(s-s_1)^2+(x-x_1)^2+\Gamma y]+\frac{C_1x_1}{2}\sigma^2$。当 $(s-s_1)(x-x_1)<0$，$s\leqslant s_1+4x_1$ 时，有 $(x-x_1)\left(\frac{m_1s}{a_1+s}-Q\right)<0$，则 $(\sigma^2-2Q)(s-s_1)(x-x_1)+C_1(x-x_1)\left(\frac{m_1s}{a_1+s}-Q\right)\leqslant(2Q-\sigma^2)|s-s_1||x-x_1|-\frac{(2Q-\sigma^2)a_1^2}{(a_1+s_1+4x_1)^2}|s-s_1||x-x_1|\leqslant\left(Q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\left[1-\frac{a_1^2}{(a_1+s_1+4x_1)^2}\right][(s-s_1)^2+(x-x_1)^2]$。由(11)式得：

$$LV\leqslant\left(\frac{\sigma^2}{2}-Q\right)\left[\frac{a_1^2}{(a_1+s_1+4x_1)^2}(s-s_1)^2+\frac{a_1^2}{(a_1+s_1+4x_1)^2}(x-x_1)^2+\Gamma y\right]+\frac{C_1x_1}{2}\sigma^2。$$

综上所述，

$$LV\leqslant\left(\frac{\sigma^2}{4}-\frac{Q}{2}\right)\Lambda[(s-s_1)^2+(x-x_1)^2+y]+\frac{C_1x_1}{2}\sigma^2。\tag{12}$$

其中 $\Lambda=\min\left\{\frac{a_1^2}{(a_1+s_1+4x_1)^2},\Gamma\right\}$，因此，$\mathrm{d}V\leqslant\left\{\left(\frac{\sigma^2}{4}-\frac{Q}{2}\right)\Lambda[(s-s_1)^2+(x-x_1)^2+y]+\frac{C_1x_1}{2}\sigma^2\right\}\mathrm{d}t-\sigma[(s-s_1+x-x_1)^2+C_1(x-x_1)+C_2y]\mathrm{d}B(t)$。上式两端从 0 到 t 积分，再取期望得：

$$EV(t)-V(0)\leqslant E\int_0^t\left\{\left(\frac{\sigma^2}{4}-\frac{Q}{2}\right)\Lambda[(s(r)-s_1)^2+(x(r)-x_1)^2+y(r)]+\frac{C_1x_1}{2}\sigma^2\right\}\mathrm{d}r,$$

所以

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t[(s(r)-s_1)^2+(x(r)-x_1)^2+y(r)]\mathrm{d}r\leqslant\frac{2a_1x_1}{m_1\Lambda}\sigma^2。$$

证毕

特别地，若 $\sigma=0$，模型(2)退化为确定性模型(1)，则 $\boldsymbol{E}_1$ 是模型(2)的无捕食者平衡点，且由(12)式得：$LV\leqslant-\frac{Q}{2}\Lambda[(s-s_1)^2+(x-x_1)^2+y]$，通过 Lyapunov 方法，可以得到如下推论。

推论 1　如果 $0<\frac{Qa_1}{m_1-Q}<s^0$，$\sigma=0$，那么模型(2)存在无捕食者平衡点 $\boldsymbol{E}_1$，且 $\frac{m_1s^0}{a_1}<2Q$，$x_1<\frac{a_2}{m_2}\left(Q-\frac{m_1s^0}{2a_1}\right)$ 时，$\boldsymbol{E}_1$ 是全局渐近稳定的。

注 1　文献[1]中给出确定性恒化器模型($\sigma=0$，$s^0=1$)关于平衡点 $\boldsymbol{E}_1$ 的局部渐近稳定性，推论 1 将该结论推广到 $\boldsymbol{E}_1$ 的全局渐近稳定性。

注 2　定理 3 表明如果 σ 非零但足够小，$\boldsymbol{E}_1$ 不是模型(2)的无捕食者平衡点，但模型(2)的解将围绕 $\boldsymbol{E}_1$ 振荡。事实上，这意味着若噪声强度控制在一定范围内，食饵将持续存在，而捕食者将趋于灭绝。

由引理 1，当 $0<\frac{Qa_1}{m_1-Q}<s^0$ 且 $\frac{s^0}{Q}-\frac{a_1}{m_1-Q}>\frac{a_2Q}{m_2-Q}$ 时，$\boldsymbol{E}_2=(s^*,x^*,y^*)$ 是确定性模型(1)的正平衡点，但

它不一定是随机模型(2)的平衡点。本节将通过研究模型(2)的解在随机扰动下围绕 $\boldsymbol{E}_2$ 的振荡行为来了解它的渐近行为。

定理 4 如果 $0<\dfrac{Qa_1}{m_1-Q}<s^0$,$\dfrac{s^0}{Q}-\dfrac{a_1}{m_1-Q}>\dfrac{a_2Q}{m_2-Q}$,$x^*+y^*<\dfrac{1}{2}$,$s^*<\min\left\{\dfrac{1}{4},\dfrac{a_2^2}{2(a_2+x^*+4y^*)^2}\right\}$ 且 $\sigma^2<2Q$,那么对模型(2)带有初值 $(s(0),x(0),y(0))\in\mathbf{R}_+^3$ 的任意解 $(s(t),x(t),y(t))$,都有

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}E\int_0^t[(s(r)-s^*)^2+(x(r)-x^*)^2+(y(r)-y^*)^2]\,\mathrm{d}r\leqslant\delta。$$

其中 $\delta=\dfrac{2M}{\Gamma(2Q-\sigma^2)}$,$\Gamma=\min\left\{1-2(x^*+y^*),\dfrac{1}{2}-2s^*,\dfrac{a_2^2}{(a_2+x^*+4y^*)^2}-2s^*\right\}$,$M=\left(Q-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)[s^0+s^*(1+2x^*(x^*+s^*)+2y^*(y^*+s^*))+\dfrac{a_2y^*}{m_2}\sigma^2]$。

证明 定义一个函数 $V:\mathbf{R}_+^3\to\mathbf{R}_+$,$V(s,x,y)=V_4+V_5$,其中 $V_4=\dfrac{1}{2}(s-s^*+x-x^*+y-y^*)^2$,$V_5=C_3\left(y-y^*-y^*\ln\dfrac{y}{y^*}\right)$,其中 $C_3=\dfrac{a_2}{m_2}(2Q-\sigma^2)$。由 $\sigma^2<2Q$ 知 $C_3>0$,因此函数 V 正定。利用伊藤公式得:$LV_4=\left(\dfrac{\sigma^2}{2}-Q\right)[(s-s^*)^2+(x-x^*)^2+(y-y^*)^2]+(\sigma^2-2Q)[(s-s^*)(x-x^*)+(s-s^*)(y-y^*)+(x-x^*)(y-y^*)]$,$LV_5=C_3(y-y^*)\left(\dfrac{m_2x}{a_2+x}-Q\right)+\dfrac{C_3y^*}{2}\sigma^2$。由 $\sigma^2<2Q$ 得 $(\sigma^2-2Q)[(s-s^*)(x-x^*)+(s-s^*)(y-y^*)]\leqslant(2Q-\sigma^2)\{(x^*+y^*)[(s-s^*)^2+s^{*2}]+s^*[(x-x^*)^2+x^{*2}+(y-y^*)^2+y^{*2}]+\dfrac{s^*+s^0}{2}\}$,所以:

$$LV=LV_4+LV_5\leqslant\left(\frac{\sigma^2}{2}-Q\right)[(1-2(x^*+y^*))(s-s^*)^2+(1-2s^*)(x-x^*)^2+(1-2s^*)(y-y^*)^2]+(\sigma^2-2Q)(x-x^*)(y-y^*)+C_3(y-y^*)\left(\frac{m_2x}{a_2+x}-Q\right)+M。\tag{13}$$

其中 $M=\left(Q-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\left[s^0+s^*(1+2x^*(x^*+s^*)+2y^*(y^*+s^*))+\dfrac{a_2y^*}{m_2}\sigma^2\right]$。当 $(x-x^*)(y-y^*)\geqslant0$ 时,有 $(y-y^*)\left(\dfrac{m_2x}{a_2+x}-Q\right)=(y-y^*)\left(\dfrac{m_2x}{a_2+x}-\dfrac{m_2x^*}{a_2+x^*}\right)\geqslant0$ 且 $(y-y^*)\left(\dfrac{m_2x}{a_2+x}-Q\right)\leqslant\dfrac{m_2}{a_2}(x-x^*)(y-y^*)$,则 $(\sigma^2-2Q)(x-x^*)(y-y^*)+C_3(y-y^*)\left(\dfrac{m_2x}{a_2+x}-Q\right)\leqslant0$,由(13)式得:

$$LV\leqslant\left(\frac{\sigma^2}{2}-Q\right)[(1-2(x^*+y^*))(s-s^*)^2+(1-2s^*)((x-x^*)^2+(y-y^*)^2)]+M。$$

当 $(x-x^*)(y-y^*)<0$,$x>x^*+4y^*$ 时(即 $x-x^*>0$,$y-y^*<0$),有 $(y-y^*)\left(\dfrac{m_2x}{a_2+x}-Q\right)<0$ 且 $(\sigma^2-2Q)(x-x^*)(y-y^*)\leqslant\left(\dfrac{Q}{2}-\dfrac{\sigma^2}{4}\right)(x-x^*)^2$,由(13)式得:$LV\leqslant\left(\dfrac{\sigma^2}{2}-Q\right)[(1-2(x^*+y^*))(s-s^*)^2+\left(\dfrac{1}{2}-2s^*\right)((x-x^*)^2+(y-y^*)^2)]+M$。当 $(x-x^*)(y-y^*)<0$,$x\leqslant x^*+4y^*$ 时,有 $(y-y^*)\left(\dfrac{m_2x}{a_2+x}-Q\right)<0$,则 $(\sigma^2-2Q)(x-x^*)(y-y^*)+C_3(y-y^*)\left(\dfrac{m_2x}{a_2+x}-Q\right)\leqslant(2Q-\sigma^2)|x-x^*||y-y^*|-\dfrac{(2Q-\sigma^2)a_2^2}{(a_2+x^*+4y^*)^2}|x-x^*||y-y^*|\leqslant\left(Q-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\left[1-\dfrac{a_2^2}{(a_2+x^*+4y^*)^2}\right][(x-x^*)^2+(y-y^*)^2]$,由(13)式得:

$$LV\leqslant\left(\frac{\sigma^2}{2}-Q\right)\left\{[1-2(x^*+y^*)](s-s^*)^2+\left(\frac{a_2^2}{(a_2+x^*+4y^*)^2}-2s^*\right)[(x-x^*)^2+(y-y^*)^2]\right\}+M。$$

综上所述,$LV\leqslant\left(\dfrac{\sigma^2}{2}-Q\right)\Gamma[(s-s^*)^2+(x-x^*)^2+(y-y^*)^2]+M$,其中 $\Gamma=\min\left\{1-2(x^*+y^*),\dfrac{1}{2}-2s^*,\dfrac{a_2^2}{(a_2+x^*+4y^*)^2}-2s^*\right\}$。从 $E\int_0^t\mathrm{d}V=E\int_0^tLV\mathrm{d}t$ 得:$\lim\limits_{t\to\infty}\sup\dfrac{1}{t}E\int_0^t[(s(r)-s^*)^2+(x(r)-x^*)^2+(y(r)-y^*)^2]\mathrm{d}r\leqslant\delta$。

证毕

注 3 若$\sigma=0$,模型(2)退化为确定性模型(1),则$\boldsymbol{E}_2$是模型(2)的正平衡点。定理4表明如果σ非零但足够小,$\boldsymbol{E}_2$不是模型(2)的正平衡点,但模型(2)的解将围绕$\boldsymbol{E}_2$振荡。事实上,这意味着若噪声强度控制在一定范围内,微生物(食饵和捕食者)将持续存在。

参考文献:

[1] LI B T,KUANG Y. Simple food chain in a chemostat with distinct removal rates[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2000,242(1):75-92.

[2] WANG L,WOLKOWICZ GSK. A delayed chemostat model with general nonmonotone response functions and differential removal rates[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2006,321(1):452-468.

[3] SUN S L,CHEN L S. Dynamic behaviors of Monod type chemostat model with impulsive perturbation on the nutrient concentration[J]. Journal of Mathematical Chemistry,2007,42(4):837-847.

[4] ALI E,ASIF M,AJBAR A H. Study of chaotic behavior in predator-prey interactions in a chemostat[J]. Ecological Modelling,2013,259:10-15.

[5] CHEN Z Z,ZHANG T H. Dynamics of a stochastic model for continuous flow bioreactor with contois growth rate[J]. Journal of Mathematical Chemistry,2013,51(3):1076-1091.

[6] XU C Q,YUAN S L,ZHANG T H. Asymptotic behavior of a chemostat model with stochastic perturbation on the dilution rate[J]. Abstract & Applied Analysis. 2013(1):233-242.

[7] XU C Q,YUAN S L. An analogue of break-even concentration in a simple stochastic chemostat model[J]. Applied Mathematics Letters,2015,48:62-68.

[8] SUN M J,DONG Q L,WU J. Asymptotic behavior of a Lotka-Volterra food chain stochastic model in the Chemostat[J]. Stochastic Analysis and Applications,2017,35(4):645-661.

[9] SUN S L,SUN Y R,ZHANG G,LIU X Z. Dynamical behavior of a stochastic two-species Monod competition chemostat model[J]. Applied Mathematics and Computation,2017,298:153-170.

[10] JI C,JIANG D,SHI N. Analysis of a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes with stochastic perturbation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2009,359(2):482-498.

The Asymptotic Behavior of a Stochastic Chemostat Model with Michaelis-Menten Food Chain

ZHAO Yihan, YANG Zhichun

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]To investigate the asymptotic behaviors of a stochastic chemostat model with Michaelis-Menten food chain in which the dilution rate is disturbed by white noise. First, the global existence and uniqueness of the positive solution of the model is proved. [**Methods**]Then, by constructing Lyapunov function and using Itô's formula, the sufficient condition for the stochastic global asymptotic stability of the washout equilibrium of the model is obtained. [**Findings**]Finally, the long-time asymptotic behaviors of the solution of the model are studied, which mainly reveals the oscillatory behavior of the solution around the predator-free equilibrium and positive equilibrium of the corresponding deterministic model under different conditions. [**Conclusions**]The results improve and extend the relevant work of the existing literature.

Keywords: stochastic chemostat model; Michaelis-Menten food chain; asymptotic behavior; stochastic global asymptotic stability

(责任编辑 陈 乔)