

带跳的随机利率模型的长时间行为分析及实证研究*

周纹心¹, 刁一帆², 李曼曼²

(1. 重庆师范大学 财务处, 重庆 401331; 2. 重庆大学 数学与统计学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】为了更好地反映周期性经济环境或未来货币预测对时间的依赖性。【方法】假设短期利率模型有一个随机回归水平, 利用鞅定价方法及相关的数学工具展开讨论, 综合考虑了随机利率模型的3个特征, 分别是关于利率水平的延迟性、跳跃性和回归水平的回归水平的时间依赖性。【结果】依据上海银行间同业拆借利率(Shanghai interbank offered rate, Shibor)数据, 采用WLS回归分析方法对CIR随机利率模型进行实证研究, 发现拟合曲线趋于水平。【结论】得到了长期投资回报几乎处处收敛到随机回归水平的结论。

关键词: 随机利率模型; 跳过程; 带记忆过程; 实证研究

中图分类号: O213.9

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2019)04-0100-06

利率是一个国家经济水平的重要体现。中国实行由市场供求决定利率的市场化机制, 即金融机构根据资金存量和对金融市场资金流方向来自调节利率水平。2013年7月, 中国人民银行全面放开金融机构贷款利率管制, 2015年5月中国人民银行将金融机构存款利率浮动区间的上限由存款基准利率的1.3倍调整为1.5倍, 同年8月和10月, 中国人民银行放开一年期以上定期存款的利率浮动上限以及商业银行和农村合作金融机构等不再设置存款利率浮动上限。中国人民银行一系列的利率政策促进了中国自由市场经济的活跃。资源的稀缺性和投资主体的多样性决定了利率引导市场经济利益的流向, 股票、债券、基金及衍生金融产品的市场风险、时间折现和估价都取决于对利率的预测。但影响利率的因素是错综复杂的, 同时受外部环境的变化, 各个期间的利率都是不断变化的。不同期间的利率变化也相互关联, 因此有必要将各个期间的利率看做随机变量处理。

1 预备知识

Cox等人^[1]提出了如下短期动态利率模型:

$$dS(t) = \kappa(\gamma - S(t))dt + \sigma\sqrt{S(t)}d(W(t)),$$

其中: κ, γ, σ 的和为大于0的常数, $\{W(t); t \geq 0\}$ 为标准布朗运动。这个模型又被称为Cox-Ingersoll-Ross模型, 简称CIR模型。为了更好获得经验数据的特性, Chan等人^[2]将大量短期利率模型嵌套入下式:

$$dS(t) = \kappa(\gamma - S(t))dt + \sigma S(t)^\alpha d(W(t)). \quad (1)$$

(1)式中 $\alpha \geq \frac{1}{2}$, 再对参数 κ, γ, α 进行合理的限制。其中: γ 表示该过程的长期均值; κ 表示偏移的速度; σ 表示波动幅; 2α 表示方差弹性。特别地, 通过对美国1个月的国库券收益率进行 χ^2 测试, Chan等人^[2]通过比较具有不同 α 的利率模型, 发现 α 是区别不同利率模型的最重要的特征。注意到时间期望 γ 、漂移速度 κ 以及波动性 σ 不是常数, 表明它们是马尔科夫跳跃过程^[3-4]。另一个CIR模型的推广是通过机制转换来举例说明^[5-6]。另一方面, 从经济学角度来看, 有证据表明某些必然事件发生在影响现在和将来的资产价格的交易周期之前, 因此许多学者在经济模型上引入了延迟性。例如 Arriojas等人^[7]对潜在的资产变化过程考虑了延迟, 并且建立了Black-Scholes公式。Benhabib^[8]考虑了一个线性的、灵活的价格模型, 其中名义利率是由一个灵活的分布延迟来衡量。Stoica^[9]通过利用随机延迟方程对金融市场来建模, 建立了延迟的Black-Scholes公式^[9]。又因为均值回归平方

* 收稿日期: 2018-12-17 修回日期: 2019-04-16 网络出版时间: 2019-07-15 12:30

资助项目: 教育部人文社会科学项目(No. 14XJC910001); 重庆大学中央高校基金项目(No. 2018CDXYST0024); 重庆市社会科学规划培育项目(No. 2018TY69); 重庆市教委人文社科规划项目(No. 19SKGH040)

第一作者简介: 周纹心, 女, 会计师, 研究方向为计量经济学, E-mail: 953374969@qq.com; 通信作者: 刁一帆, 女, E-mail: dyfan06@163.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190715.1230.034.html>

根过程不能揭示某些经验现象。例如随机波动率,为了解决这一问题,跳过程被引入到了金融模型中^[8-10]。

注意到(1)式中的回归水平 γ 是一个常数,为了更好地反映周期性经济环境或未来货币的预测对时间的依赖性,尝试证明短期利率模型存在一个随机回归水平^[11-12]。

综上所述,很自然地考虑随机利率模型的 3 个特征:延迟性、跳跃性和随机回归水平对时间的依赖性。

本文考虑以下带有跳跃性和记忆性的随机利率模型:

$$\begin{cases} dx(t) = \{2\beta x(t) + \delta(t)\} dt + \sigma x^\gamma(t-\tau) \sqrt{|x(t)|} dW(t) + \int_U g(x(t-), u) \tilde{N}(dt, du), \\ x_0 = \xi \in D. \end{cases} \quad (2)$$

其中 $x(t-) := \lim_{s \uparrow t} x(s)$, D 为定义在 $[-\tau, 0]$ ($\tau > 0$) 上的全体有界实右连左极函数。 $\int_U g(x(t-), u) \tilde{N}(dt, du)$ 依赖于泊松测度并且可以看作是一个跳过程。扩散项过去依赖于 $x^\gamma(t-\tau)$, 所以称它为延时或记忆。

令 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$ 为完备的概率空间, $\{F_t\}$ 满足通常条件(换句话说,它右连续并且 F_0 包含 P 中所有的空集)。令 $W(t)$ 为定义在概率空间 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上的标量布朗运动。令 $B(\mathbf{R}_+)$ 为定义在正实数上的博雷尔 σ -代数, 并且 $\lambda(dx)$ 为定义在 $B(\mathbf{R}_+)$ 上的 σ 有限测度。令 $D_p \subset \mathbf{R}_+$ 为可数集, $p = (p(t) (t \in D_p))$ 是一个定义在 \mathbf{R}_+ 上具有测度 $\lambda(\cdot)$ 的固定的 F_t -泊松点过程。定义 $N(dt, du)$ 为关于 p 的泊松计量测度。即对任意的 $U \in B(\mathbf{R}_+)$, 有 $N(t, U) = \sum_{s \in D_p, s \leq t} I_U(p(s))$ 。令 $\tilde{N}(dt, du) := N(dt, du) - dt\lambda(du)$ 为关于 $N(dt, du)$ 的补偿泊松测度。为了方便起见,用一个通用常量 $C > 0$ 来表示,该常量的值可能会在每行之间有变化。

2 随机利率模型的整体适定性、解的非负性以及矩估计

对于模型(2),做如下假设:(A1) $\beta < 0, \sigma > 0, \gamma \in [0, \frac{1}{2}]$; (A2) $\delta: \Omega \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, 且存在常数 $\mu \geq 1, v \geq 0$, 使得

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\mu} \int_0^t \delta(s) ds = v$; (A3) $G: \Omega \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, 其中 $g(0, u) = 0$, 且存在 $K > 0$ 使得 $\int_U |g(x, u) - g(y, u)|^2 \lambda(du) \leq K |x - y|^2, x, y \in \mathbf{R}$; (A4) 当 $x > 0$ 时,任意的 $\theta \in [0, 1]$ 有 $x + \theta g(x, u) \geq 0$; (A5) $G: \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 其中 $g(0, u) = 0$, 且存在 $K > 0$ 使得 $\int_U |g(x, u) - g(y, u)|^2 \lambda(du) \leq K |x - y|^2, x, y \in \mathbf{R}$ 。

由于(2)式主要用于模拟随机波动率、利率或资产价格,因此方程的解 $\{x(t)\}_{t \geq -\tau}$ 非负,于是有引理 1。

引理 1 在满足(A1)~(A5)的条件下,(2)式对任意的 $\xi \in D$ 有唯一非负解 $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ 。

证明 参照文献[1]中定理 2.1 和 2.2 的证明方法进行证明。

不难得到方程(2)的解 $x(t)$ 的存在唯一性。且存在 $C > 0$ 使得对任意的 $T > 0, q > 0$, 有 $E|x(t)|^q \leq C, t \in [0, T]$ 。

下面证明 $\{X(t)\}_{t \in [0, t]}$ 解的非负性。

令 $a_0 = 1, a_k = \exp\left[-\frac{k(k+1)}{2}\right], k = 1, 2, \dots$ 。显然 $\int_{a_k}^{a_{k-1}} \frac{1}{kx} dx = 1$, 假设存在一个连续的非负函数 $\psi_k(x), x \in \mathbf{R}_+$, 该函数的支撑在 (a_k, a_{k-1}) 上, $\int_0^\infty \psi_k(x) dx = 1$, 并且满足 $\psi_k(x) \leq \frac{2}{kx}$ 。定义一个辅助函数,对任意的 $x > 0$ 有 $\Phi_k(x) = 0$, 并且 $\Phi_k(x) := \int_0^{-x} dy \int_0^y \psi_k(u) du, x < 0$ 。

于是 $\Phi_k(x) \in C^2(\mathbf{R}; \mathbf{R}_+)$ 有以下性质:i) 对任意的 $-a_{k-1} < x < -a_k$ 有 $-1 \leq \Phi'_k(x) \leq 0$, 否则 $\Phi'_k(x) = 0$;

ii) 对任意的 $-a_{k-1} < x < -a_k$, 有 $|\Phi''_k(x)| \leq \frac{2}{k|x|}$, 否则 $\Phi''_k(x) = 0$; iii) $x^- - a_{k-1} \leq \Phi_k(x) \leq x^-, x \in \mathbf{R}$ 。

因为 $\Phi'_k(x) \leq 0, \delta \geq 0$, 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 有:

$$E \int_0^t \Phi'_k(x(s)) 2\beta(x(s) + \delta(s)) ds \leq E \int_0^t \Phi'_k(x(s)) 2\beta x(s) ds. \quad (3)$$

由均值定理可得 $\Phi_k(x) - \Phi_k(0) = \Phi'_k(x)x$ 。因为 $\Phi_k(0) = 0$, 所以有 $0 \leq \Phi_k(x) = \Phi'_k(x)x$, 由于 $\psi_k(x)$ 的支集在 (a_k, a_{k-1}) 上, 所以当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有 $a_k \rightarrow 0$, 且:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_k(x) = 0, \forall x \in \mathbf{R}, |\Phi_k(x)| \leq |\Phi'_k(x)| |x| \leq |a_{k-1}| \leq 1.$$

由 Φ_k 的定义,对任意的 $x \leq 0$,可以推出 $\Phi'_k(x) = -\int_0^{-x} \psi_k(u)du$ 和 $\Phi''_k(x) = \psi_k(-x) \geq 0$ 。因此可以得到 $\Phi''_k(x)x \leq 0, x \leq 0$ 。进一步,通过 $\Phi_k(x)$ 的定义,对任意的 $x \geq 0$,有 $\Phi_k(x) = 0$ 。所以对任意的 $x \in \mathbf{R}$,有:

$$\Phi''_k(x)x \leq 0, \tag{4}$$

由性质 i)和(3),(4)式可以推出:

$$\begin{aligned} E\Phi_k(x(t)) &= E\Phi_k(x(0)) + E\int_0^t \Phi'_k(x(s))\{2\beta x(s) + \delta(s)\} ds + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \Phi''_k(x(s))x^{2\gamma}(s-\tau)x(s) ds + \\ &E\int_0^t \int_U \{\Phi_k(x(s) + g(x(s), u) - \Phi_k(x(s)) - \Phi'_k(x(s))g(x(s), u)\} \lambda(du) ds \leq \\ E\Phi_k(x(0)) &+ E\int_0^t \int_U \{\Phi_k(X(s) + g(x(s), u) - \Phi_k(x(s)) - \Phi'_k(x(s))g(x(s), u)\} g(x(s), u)\lambda(du) ds, \end{aligned}$$

由均值定理有:

$$\Phi_k(x(s) + g(x(s), u) - \Phi_k(x(s))) = \Phi'_k(x(s) + \theta g(x(s), u))g(x(s), u), 0 < \theta < 1.$$

因此,可以推出:

$$E\Phi_k(x(t)) \leq E\Phi_k(x(0)) + E\int_0^t \int_U [\Phi'_k(x(s) + \theta g(x(s), u)) - \Phi'_k(x(s))] g(x(s), u)\lambda(du) ds,$$

如果 $x(s) > 0$,那么有:

$$\Phi'_k(x(s) + \theta g(x(s), u)) = 0, \tag{5}$$

以及

$$\Phi'_k(x(s)) = 0, \tag{6}$$

因此根据(4)~(6)式、假设(A5)和性质 ii),有:

$$\begin{aligned} E\Phi_k(x(t)) &\leq E\Phi_k(x(0)) + E\int_0^t \int_U [\Phi'_k(x(s) + \theta g(x(s), u)) - \Phi'_k(x(s))] g(x(s), u)\lambda(du) ds \leq \\ &E\Phi_k(x(0)) + k\int_0^t E\Phi_k(x(s)) ds + ka_{k+1}T \end{aligned}$$

成立。

由 Gronwall 不等式和性质 iii),可知 $Ex^-(t) \leq k(a_{k-1} + E\Phi_k(x(0)))e^{kT}$ 。由控制收敛定理,当 $k \rightarrow \infty$ 时, $E\Phi_k(x(0)) \rightarrow 0$ 。所以 $x^-(t) = 0$ 。 证毕

引理 2 在条件(A1)~(A4)下,进一步假设 $4\rho + \kappa < 0$,从而存在 $\kappa > 0, C > 0$,使得 $E(x^2(\tau)) \leq C + CE\int_0^\tau (\delta^2(s) + 1) ds$,其中 $\tau > 0$ 是一个有界停时。

证明 令 $\kappa > 0$ 。由 Itô 公式,假设(A3)以及 Young 不等式可知,对充分小的 ϵ 存在 $C_1(\epsilon) > 0, C_2(\epsilon) > 0$,使得:

$$d(e^{-\kappa\beta t} x^2(t)) \leq e^{-\kappa\beta t} \{((4-\kappa)\beta x^2(t) + \epsilon e^{\kappa\beta t} x^2(t) + C_1(\epsilon)\delta^2(t)dt + C_2(\epsilon))dt + M_1(t) + M_2(t)\},$$

其中 $M_1(t) := 2\sigma e^{-\kappa\beta t} x^{\frac{3}{2}}(t)x^\gamma(t)dW(t), M_2(t) := \int_U \{g^2(x(t), u) + 2x(t)g(x(t), u)\} \tilde{N}(dt, du)$ 。

对 0 到 $t(t \geq 0)$ 积分,可得:

$$\begin{aligned} x^2(t) &\leq x^2(0) + C\int_0^t (\delta^2(s) + 1) ds + \int_0^t e^{\kappa\beta(t-s)} x^{\frac{3}{2}}(s) + x^\gamma(s)dW(s) + \\ &C\int_0^t e^{\kappa\beta(t-s)} \int_U \{g^2(x(s), u) + 2x(s)g(x(s), u)\} d\tilde{N}(ds, du). \end{aligned}$$

用任意有界停时 τ 来代替 t ,得 $Ex^2(\tau) \leq Ex^2(0) + EC\int_0^\tau (\delta^2(s) + 1) ds$ 。 证毕

3 长期利率的几乎处处收敛性

下面将阐述本文的主要结论。

定理 1 在条件(A1)~(A4)和 $4\beta + K < 0$ 的假设下,若 $\lambda > 0, \theta \in [1, 2\mu]$,使得 $\int_0^\infty \delta^2(s) ds < \infty$,则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\mu} \int_0^t \left\{ x(s) + \frac{\delta(s)}{2\beta} \right\} ds = 0, \text{ a. s. }。$$

证明 对 $e^{-2\beta t}x(t)$ 运用 Itô 公式得:

$$x(t) = e^{2\beta t} \left\{ \xi(0) + \int_0^t e^{-2\beta s} \delta(s) ds + \sigma \int_0^t e^{-2\beta s} x^\gamma(s) \sqrt{|x(s)|} dW(s) + \int_0^t \int_U e^{-2\beta s} g(x(s-), u) \tilde{N}(ds, du) \right\}.$$

因此有:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^\mu} \int_0^t \left\{ x(s) + \frac{\delta(s)}{2\beta} \right\} ds &= \frac{(e^{2\beta t} - 1)\xi(0)}{2\beta t^\mu} + \frac{1}{2\beta t^\mu} \int_0^t e^{-2\beta s} \delta(s) ds + \frac{\sigma}{2\beta} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^\mu \frac{1}{e^{-2\beta t}(1+t)^\mu} \times \\ &\int_0^t e^{-2\beta s} \delta(s) x^\gamma(s) \sqrt{|x(s)|} dW(s) - \frac{\sigma}{2\beta} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^\mu \frac{1}{(1+t)^\mu} \int_0^t x^\gamma(s) \sqrt{|x(s)|} dW(s) - \\ \frac{1}{2\beta} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^\mu \frac{1}{(1+t)^\mu} \int_0^t \int_U g(x(s-), u) \tilde{N}(ds, du) &+ \frac{1}{2\beta} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^\mu \frac{1}{e^{-2\beta t}(1+t)^\mu} \int_0^t \int_U e^{-2\beta s} g(x(s-), u) \tilde{N}(ds, du) := \\ I_1(t) + I_2(t) + \frac{1}{2\beta} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^\mu I_3(t) - \frac{\sigma}{2\beta} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^\mu I_4(t) - \frac{1}{2\beta} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^\mu I_5(t) &+ \frac{1}{2\beta} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^\mu I_6(t). \end{aligned}$$

接下来证明 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $I_i(t) \rightarrow 0, i=1, 2, \dots, 6$ 。

由 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(1+t)^\mu - (1+t-\sqrt{t})}{(1+t)^\mu} = 0^{[13]}$, 结合假设(A2)可以推出当 $t \rightarrow \infty$ 时 $I_3(t) \rightarrow 0$, 以及 $I_2(t) \rightarrow 0$ 。

接下来再证明当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $I_3(t) \rightarrow 0, I_4(t) \rightarrow 0$ 。根据 Kronecher's 引理^[13], 显然

$$\int_0^\infty \frac{x^\gamma(s) \sqrt{|x(s)|}}{(1+t)^\mu} dW(t) \tag{7}$$

是几乎处处存在的。

给定正数 n , 定义停时 $\tau_n := \inf \left\{ t \geq 0 \mid \int_0^t \frac{\delta^2(s)}{(1+s)^{2\mu}} ds \geq n \right\}$ 。当 $\theta \in [1, 2\mu]$ 时, 可以得出:

$$\int_0^\infty \frac{\delta^2(s)}{(1+s)^{2\mu}} ds = \int_0^\infty \delta^2(s) \left[1 - 2\mu \int_0^s (1+t)^{-2\mu-1} dt \right] ds = \int_0^\infty \delta^2(s) ds - 2\mu \int_0^\infty (1+t)^{-2\mu-1} dt \int_t^\infty \delta^2(s) ds.$$

因此 $\{\tau_n = \infty\} \uparrow \Omega$, 并且可证(13)式在 $\{\tau_n = \infty\}$ 上成立。因为 $J(t) := \int_0^t \frac{x^\gamma(s) \sqrt{|x(s)|}}{(1+s)^\mu} 1_{\{s \leq \tau_n\}} dW(s)$ 是一个局部鞅, 事实上可以验证 $J(t)$ 是一个二次变差有界的局部鞅。通过 Itô 公式以及引理 2 可知:

$$\begin{aligned} E | J(t) |^2 &= \int_0^t \frac{E \{ x^{2\gamma}(s) x(s) 1_{\{s \leq \tau_n\}} \}}{(1+s)^{2\mu}} ds \leq C + C \int_0^t \frac{1 + E \int_0^{s \wedge \tau_n} \delta^2(u) du}{(1+s)^{-2\mu}} ds \leq \\ &C \left(1 + E \int_0^{\tau_n} \delta^2(u) (1+u)^{-2\mu+1} du \right) \leq C(n+1). \end{aligned}$$

最后, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 几乎处处有 $I_5(t) \rightarrow 0$ 和 $I_6(t) \rightarrow 0$, 因为:

$$E \left(\int_\tau^t \int_U \frac{g(x(s-), u)}{(1+s)^\mu} 1_{\{r \leq \tau_n\}} \tilde{N}(ds, du) \right) = E \int_\tau^t \int_U \frac{g(x(s-), u)}{(1+s)^\mu} 1_{\{r \leq \tau_n\}} \lambda(du) ds. \tag{证毕}$$

4 长期利率收敛的实证研究

接下来选择 2015 年 3 月至 2018 年 3 月 Shibor 进行讨论, 数据来源于东方财富网, 共计 1 000 个数据作为本文实证研究的样本。

首先令 $\delta(t) = v$, 满足假设(A2); 方程 $g(x, u) = 0$, 满足假设(A5)。

将参数代入(2)式, 并将模型随机过程形式进行离散化处理:

$$x(t+1) = x(t) + (2\beta x(t) + v + \sigma x^\gamma(t-\tau) \sqrt{|x(t)|}) \epsilon, \tag{8}$$

$$x(t+1) = v + (1+2\beta)x(t) + \sigma x^\gamma(t-\tau) \sqrt{|x(t)|} \epsilon. \tag{9}$$

两边同除以 $x^\gamma(t-\tau) \sqrt{|x(t)|}$, 将(9)式变形为同方差:

$$\frac{x(t+1)}{x^\gamma(t-\tau) \sqrt{|x(t)|}} = \frac{v}{x^\gamma(t-\tau) \sqrt{|x(t)|}} + \frac{(1+2\beta) \sqrt{|x(t)|}}{x^\gamma(t-\tau)} + \sigma \epsilon.$$

先令 $\gamma=0$, 上式变为 $\frac{x(t+1)}{\sqrt{|x(t)|}} = \frac{v}{\sqrt{|x(t)|}} + (1+2\beta) \sqrt{|x(t)|} + \sigma \epsilon$, 对于这样一个无截距项的模型, 利用最小

二乘法进行参数估计,同时利用 R 语言得到表 1。

表 1 采用 WLS 方法的回归分析表

Tab. 1 Regression analysis table using WLS method

回归结果	估计值	标准误差	T 值	Pr(> t)	最小值	1Q	中位数	3Q	最大值
回归系数 x_1	0.318	0.045	6.917	8.22e-12					
回归系数 x_2	0.893	0.015	57.528	< 2e-16					
残差					-1.260	-0.060	-0.012	0.049	2.222

注: $y = x_1 z_1 + x_2 z_2$

其中, $x_1 = v, x_2 = 1 + 2\beta$, 于是解得 $v = 0.3180, \beta = -0.0532$, v, β 均符合参数范围, 且 $x(t)$ 的均值 3.002316 与 $-\frac{v}{2\beta} = 2.990118$ 接近。

将下式代入条件方法公式, 对 σ 进行估计:

$$\text{var}(x(t+1) | x(t)) = \sigma^2 x(t), E(x(t+1) | x(t)) = v + (1+2\beta)x(t).$$

由条件方差公式 $\text{var}(X) = \text{var}(E(X|Y)) + E(\text{var}(X|Y))$ 可得: $\sigma^2 = \frac{\text{var}(x(t)) \times [1 - (1+2\beta)^2]}{-\frac{v}{2\beta}}$, 由 $\text{var}(x(t)) =$

0.3119 可得 $\sigma^2 = 0.00743$ 。

至此已经估算出模型中 3 个参数的值 $v = 0.3180, \beta = -0.0532, \sigma = 0.08619$ 。

图 1 是初始值为 2018 年 10 月 22 日的利率, 再往后 1 000 d 的拆借利率真实值与预测值的对比折线。图 2 是初始值为 2018 年 10 月 22 日的利率, 再往后 2 000 d 的拆借利率预测折线图, 从图 3 可以看出, 长期利率收敛于一个常数值 2.990118。

接下来验证 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left\{ x(s) + \frac{\delta(s)}{2\beta} \right\} ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left\{ x(s) + \frac{v}{2\beta} \right\} ds = 0$ 是否成立。

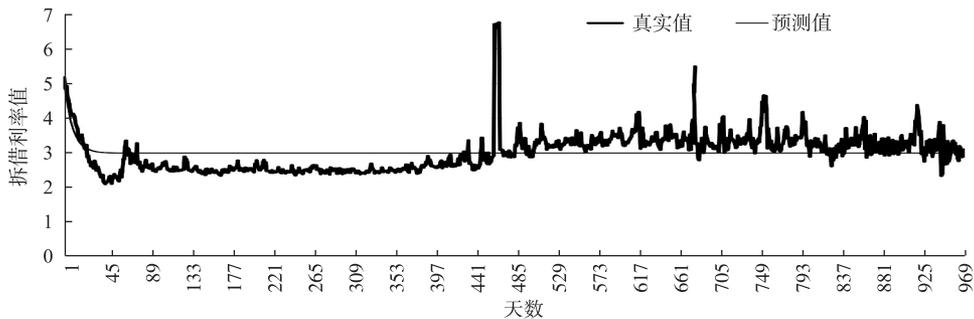


图 1 拆借利率真实值与预测值对比折线图

Fig. 1 Straight line comparison line graph of the real and predicted lending rates

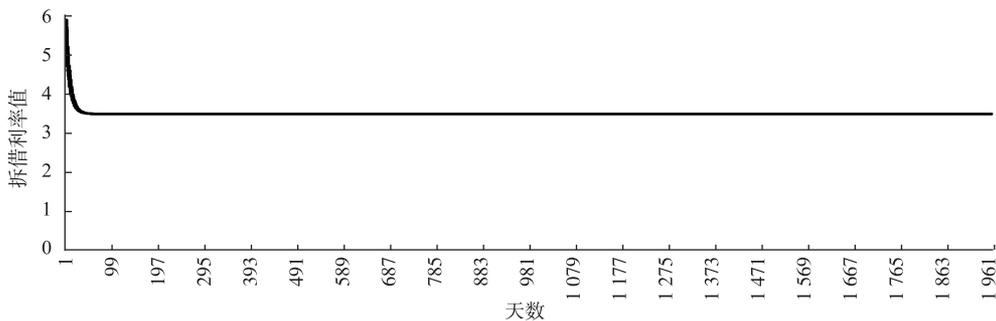


图 2 拆借利率预测值折线图

Fig. 2 Straight line graph of the predicted lending rates

由图 3, 将参数代入, 显然有:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left\{ x(s) + \frac{\delta(s)}{2\beta} \right\} ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left\{ x(s) + \frac{v}{2\beta} \right\} ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \{ 2.990118 - 2.990118 \} ds = 0$$

成立。

由此可见,存在满足假设(A1)~(A5)的参数,使得长期利率 $\frac{1}{t^\mu} \int_0^t \{X(s)\} ds$ 几乎处处收敛于一个随机回归水平。

参考文献:

- [1] WU F K, MAO X R, CHEN K. The Cox-Ingersoll-Ross model with delay and strong convergence of its Euler-Maruyama approximate solutions [J]. Applied Numerical Mathematics, 2009, 59(10): 2641-2658.
- [2] CHAN K C, KAROLY A G, LONGSTAFF F A, et al. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate[J]. The Journal of Finance, 1992, 47(3): 1209-1227.
- [3] 盛洁, 闫理坦. 跳跃扩散 Cox-Ingersoll-Ross 利率模型[J]. 苏州科技大学学报(自然科学版), 2018, 35(1): 33-38.
- SHENG J, YAN L T. The interest rate model with Cox-Ingersoll-Ross jump diffusion[J]. Journal of Suzhou University of Science and Technology (Natural Science), 2018, 35(1): 33-38.
- [3] 周双娇. 跳跃扩散模型下的两种奇异期权定价[J]. 泰山学院学报, 2015, 37(6): 18-23.
- ZHOU S J. Pricing of two kinds of exotic option with jump-diffusion mode[J]. Journal of Taishan University, 2015, 37(6): 18-23.
- [5] ANG A, BEKAERT G. Regime switching in interest rates [J]. Journal of Business & Economic Statistics, 2002.
- [6] GRAY S F. Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process[J]. Journal of Financial Economics, 1996, 42(1): 27-76.
- [7] ARRIOJAS M, HU Y, MOHAMMED S E, et al. A delayed black and scholes formula[J]. Stochastic Analysis and Applications, 2007, 25(2): 471-492.
- [8] BEHABIB J. Interest rate policy in continuous time with discrete delays[J]. Journal of Money, Credit and Banking, 2004, 36(1): 1-15.
- [9] STOICA G. A stochastic delay financial model[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2005, 133(6): 1837-1841.
- [10] BARDHAN I, CHAO X. Pricing options on securities with discontinuous returns [J]. Stochastic Processes & Their Applications, 1993, 48(1): 123-137.
- [11] MERCURIO F, RUNGGALDIER W J. Option pricing for jump diffusions: approximations and their interpretation [J]. Mathematical Finance, 1993, 3(2): 191-200.
- [12] WU F, MAO X, CHEN K. Strong convergence of Monte Carlo simulations of the mean-reverting square root process with jump[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 206(1): 494-505.
- [13] DEELSTRA G, DELBAEN F. Long-term returns in stochastic interest rate models [J]. Insurance; Mathematics and Economics, 1995, 17(2): 163-169.
- [14] DEELSTRA G, DELBAEN F. Long-term returns in stochastic interest rate models: different convergence results [J]. Applied Stochastic Models and Data Analysis, 1997, 13: 401-407.

Long-Term Behavior of Stochastic Interest Rate Models with Jumps and Memory

ZHOU Wenxin¹, DIAO Yifan², LI Manman²

(1. The Finance Department, Chongqing Normal University, Chongqing 401331;

2. School of Mathematical Sciences, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] In order to better reflect the dependence on time, which is caused by the cyclical economic environment or the prediction of the impact of future monetary. [Methods] Martingale pricing method and related mathematical tools are used to study, by assuming that the short-term interest rate model has a random reversion level, considering the three characteristics of stochastic interest rate model, namely, the delay, jump and time dependence of reversion level. [Findings] At the same time, based on the overnight Shibor data of Shanghai interbank offered rate, the WLS regression analysis method was used to conduct an empirical study on the CIR stochastic interest rate model. It is found that the fitted curve tends to be horizontal. [Conclusions] Revealing that long-term benefits almost certainly converge to a random reversion level.

Keywords: stochastic interest rate model; jump process; memory process; long-term return