

## 物流网络下的多产品多阶段随机库存问题\*

刘丰年<sup>1</sup>, 付永彬<sup>1</sup>, 孙海琳<sup>2</sup>

(1. 南京理工大学 经济管理学院, 南京 210094; 2. 南京师范大学 数学科学学院, 南京 210097)

**摘要:**【目的】讨论集生产、运输和批发为一体的垄断制造商在不确定的环境下对多种产品做出合理的生产、销售、库存和运输决策。【方法】在一个复杂的物流网络中产品的价格和运输都不确定的大背景下, 提出一个物流网络下的多产品多阶段随机库存模型, 并运用随机对偶动态规划(Stochastic dual dynamic programming, SDDP)算法对模型进行求解。【结果】1) 理论分析证明了在一定条件下多阶段随机库存模型的阶段数越多, 收益也会越高。2) 数值实验结果表明在一定条件下多阶段随机库存模型的最终收益会随着阶段数的增加而逐步提高。但在给定条件不满足的情况下, 多阶段随机库存模型未必会具有优势。【结论】物流网络下的多产品多阶段随机库存模型可以在不确定的环境下, 更好的对抗未来的风险, 具有重要的现实意义。

**关键词:** 多阶段库存问题; 物流网络; SDDP; 产品定价

**中图分类号:** O221

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1672-6693(2019)05-0022-13

当人们的需求朝着多样化、个性化的方向发展时, 企业想要精准预测某一行业市场需求的变化几乎是不可行的。正因为如此, 企业在制定生产决策时, 不仅要考虑到产品是否能够满足顾客的需求, 还要避免库存的大量积压。此时, 对于库存问题的研究就变得尤为重要。国内外学者对于具有随机需求的库存问题有过不少研究。Dvoretzky 等人<sup>[1]</sup>假定多产品的需求向量为随机的情况下研究了多产品库存问题; Abbou 等人<sup>[2]</sup>在考虑需求不确定性的情况下, 还把生产延迟引入到库存调节的问题中; 高婷等人<sup>[3]</sup>针对需求依赖于库存水平的风险规避型零售商, 提出了基于条件风险价值(Conditional value-at-risk, CVaR)准则的报童模型; Kitaeva 等人<sup>[4]</sup>则主要研究了当需求具有价格依赖性的多产品报童问题。考虑到制造商的生产与销售行为开始朝着多品种、小批量的方向演进, 为了进一步避免损失, 还需要对多阶段随机库存问题进行深入研究。Torkaman 等人<sup>[5]</sup>研究了闭环供应链中具有生产序列设置的多产品多阶段生产、库存问题; 陈杰等人<sup>[6]</sup>对具有多元马氏需求特征的多产品多阶段库存优化模型进行了研究; Pooya 等人<sup>[7]</sup>分析了具有生产周期的多阶段生产—库存系统的二次最优控制模型; Hu 等人<sup>[8]</sup>考虑了需求不确定的随机批量大小和调度问题, 并开发了多阶段随机规划模型以最小化整个系统成本; Chang 等人<sup>[9]</sup>开发出一种新颖的多阶段库存模型, 允许为选定的供应商分配不同的订单数量。

随着近些年经济全球化和全球电子营销的扩展, 高效合理的物流系统成为企业成功的关键因素。Keizer 等人<sup>[10]</sup>考虑了具有异质性衰减的易腐蚀品的物流网络设计问题; Cheong 等人<sup>[11]</sup>研究多个供应商运输原材料到多个制造工厂的物流网络设计问题; Fattahi 等人<sup>[12]</sup>讨论了在多个战术周期的规划范围内集成的前向/后向物流网络问题, 并提出了一种混合整数线性规划模型; Bozorgirad 等人<sup>[13]</sup>针对多源物流网络问题, 建立多源多产品多级物流网络模型, 并用遗传算法进行求解。但是在众多研究中鲜有学者将物流网络与多阶段随机库存问题联系在一起。

SDDP 算法是近些年来许多学者研究时用于解决多阶段随机规划问题<sup>[14]</sup>的有效算法, 该算法由 Pereira 和 Pinto<sup>[15]</sup>引入。Shapiro 等人<sup>[16]</sup>讨论了基于 SDDP 方法的多阶段(线性)随机规划问题的风险中性和风险规避方法。Rebennack<sup>[17]</sup>将 SDDP 算法与 Benders 分解技术相结合, 用于求解多阶段随机优化模型。在运用 SDDP 算法解决多阶段随机规划问题时, 通常需要巨大的计算量, 这会减慢高维问题的收敛速率, Dupačová 等人<sup>[18]</sup>通过

\* 收稿日期: 2018-12-25 修回日期: 2019-04-11 网络出版时间: 2019-09-26 11:24

资助项目: 国家自然科学基金(No. 11871276; No. 11571056)

第一作者简介: 刘丰年, 男, 研究方向为多阶段随机规划, E-mail: lfnysy@163.com; 通信作者: 孙海琳, 男, 教授, 博士, E-mail: hlsun@njnu.edu.cn

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190926.1123.008.html>

情景减少的预处理方式,有效地减少了总体的计算时间。Brandi 等人<sup>[19]</sup>提出一个新的收敛准则,保证在不增加计算负担情况下,运用条件风险价值(CVaR)使得 SDDP 算法的有效性得到提高。Philpott 等人<sup>[20]</sup>研究了一类具有分布鲁棒目标的 SDDP 算法,并在标准假设下证明了其几乎可靠的收敛性。

综上所述,本文首次将多产品多阶段随机库存问题与物流网络相结合,建立了物流网络下的多产品多阶段随机库存模型,并证明了在一定条件下,多阶段随机库存模型的阶段数越多,最终收益也会越高。随后运用 SDP 算法对模型进行求解。在数值实验部分,结果表明模型在一定条件下的最终收益会随着阶段数的增加而提高,但在给定条件不满足的情况下,多阶段模型不一定具有优势。

## 1 模型构建

### 1.1 模型描述及参数设定

在经济全球化和市场经济快速发展的大背景下,集生产、运输和批发为一体的垄断制造商为了满足顾客的需求,生产多种产品运送到批发点进行销售。在这个过程中,制造商为了保证整体运输系统的运输效率,往往不会直接将产品运输到相应的批发点,而是通过转运节点向批发点进行产品的配送。本文考虑制造商在多阶段内对多产品的生产及运输问题并进行建模。这里用随机变量来描述每一阶段未来不确定的市场情景,即市场中未来情景的实现情况无法事先预测,例如产品的供大于求或者供小于求等情况。进一步假设每一阶段未来不确定的市场情景是相互独立的,产品的销售价格与该随机变量相关。产品的制造成本为已知量。由于生产线上设备生产容量的限制,这里设置一个产品的订购约束。所谓订购约束是指考虑到单工厂生产能力有限,以及对市场需求的预测有一个上限,所以针对每个批发节点对于不同的产品在每一期设置一个最大订购量。本文假设每个批发点对各种产品均有销售,且制造中心与每个批发点之间存在一个物流网络。假设每一阶段物流网络中路况为随机变量,并且在每一阶段都是相互独立的,产品的运输成本与该随机变量相关。下面通过表 1 对模型参数的设定做一个详细介绍。

下面图 1 是表示多级物流网络的构造。图 2 是在随机变量服从离散分布,并且具有阶段独立性的情况下,假设每阶段有两种情景的情景树。

### 1.2 物流网络下的多产品多阶段随机库存模型

为了方便对模型的理解,下面将目标函数定义为如下形式:

$$J_T(y_{nmT}(\zeta_{[T]}), z_{nmT}(\zeta_{[T]}), W_{maT}(\zeta_{[T]}), \zeta_T) = -Y_T(y_{nmT}(\zeta_{[T]}), \zeta_T) + H_T(z_{nmT}(\zeta_{[T]})) + N_T(W_{maT}(\zeta_{[T]}), \zeta_T), \quad (1)$$

$$J_t(x_{nmt}(\zeta_{[t]}), y_{nmt}(\zeta_{[t]}), z_{nmt}(\zeta_{[t]}), W_{mat}(\zeta_{[t]}), \zeta_t) = -Y_t(y_{nmt}(\zeta_{[t]}), \zeta_t) + H_t(z_{nmt}(\zeta_{[t]})) + N_t(W_{mat}(\zeta_{[t]}), \zeta_t) + C_t(x_{nmt}(\zeta_{[t]})), \quad (2)$$

$$J_1(x_{nm1}) = C_1(x_{nm1}). \quad (3)$$

其中  $J_t$  是第  $t$  阶段制造商的总损失,  $t = 1, \dots, T$ 。  $Y_t(y_{nmt}(\zeta_{[t]}), \zeta_t)$ ,  $H_t(z_{nmt}(\zeta_{[t]}))$ ,  $N_t(W_{mat}(\zeta_{[t]}), \zeta_t)$ ,  $C_t(x_{nmt}(\zeta_{[t]}))$  分别表示销售收入、库存成本、运输成本和订购成本。具体的函数形式为:

$$Y_t(y_{nmt}(\zeta_{[t]}), \zeta_t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M y_{nmt}(\zeta_{[t]}) p_{nmt}(y_{nmt}(\zeta_{[t]}), \zeta_t), \forall n, m, t = 2, \dots, T, \quad (4)$$

$$H_t(z_{nmt}(\zeta_{[t]})) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N h_{nmt} z_{nmt}(\zeta_{[t]}), \forall n, m, t = 2, \dots, T, \quad (5)$$

$$N_t(W_{mat}(\zeta_{[t]}), \zeta_t) = \sum_{m=1}^M \sum_{a \in \mathcal{A}} f_{mat}(W_{mat}(\zeta_{[t]}), \zeta_t), \forall n, m, t = 2, \dots, T, a \in \mathcal{A}, \quad (6)$$

$$C_t(x_{nmt}(\zeta_{[t]})) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_m x_{nmt}(\zeta_{[t]}), \forall n, m, t = 1, \dots, T-1. \quad (7)$$

下面从第  $T$  阶段开始介绍模型。

第  $T$  阶段:

$$\min_{y_{nmT}(\zeta_{[T]}), z_{nmT}(\zeta_{[T]}), W_{maT}(\zeta_{[T]})} J_T(y_{nmT}(\zeta_{[T]}), z_{nmT}(\zeta_{[T]}), W_{maT}(\zeta_{[T]}), \zeta_T), \quad (8)$$

$$\text{s. t. } z_{nmT}(\zeta_{[T]}) = z_{nmT-1}(\zeta_{[T-1]}) + x_{nmT-1}(\zeta_{[T-1]}) - y_{nmT}(\zeta_{[T]}), \forall n, m, \quad (9)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_0^+} W_{maT}(\zeta_{[T]}) = \sum_{n=1}^N x_{nmT-1}(\zeta_{[T-1]}), \forall m, \quad (10)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_k^-} W_{maT}(\zeta_{[T]}) = x_{nmT-1}(\zeta_{[T-1]}), \forall m, k = L + 1, \dots, L + N, n = k - L, \quad (11)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_k^+} W_{maT}(\zeta_{[T]}) = \sum_{b \in \mathcal{A}_k^-} W_{mbT}(\zeta_{[T]}), \forall m, k = 1, \dots, L, \quad (12)$$

$$y_{nmT}(\zeta_{[T]}), z_{nmT}(\zeta_{[T]}), W_{maT}(\zeta_{[T]}) \geq 0, \forall n, m \quad (13)$$

表 1 参数及变量

Tab.1 Parameters and variables

项目	符号	含义
参数	$T$	销售阶段数, $t = 1, \dots, T$
	$M$	产品种类数, $m = 1, \dots, M$
	$L$	转运节点数目
	$N$	批发点数目, $n = 1, \dots, N$
	$k$	$k = 0$ 表示制造节点, $k = 1, \dots, L$ 表示转运节点, $k = L + 1, \dots, L + N$ 表示批发节点, 当 $k$ 表示批发节点时, $k - L = n, k = L + 1, \dots, L + N$
	$\mathcal{A}$	物流网络中所有边的集合, $a \in \mathcal{A}, \mathcal{A}_k^+$ 表示以节点 $k$ 为起点边的集合, $\mathcal{A}_k^-$ 表示以 $k$ 为终点边的集合
	$c_m$	第 $m$ 种产品的生产成本
	$v_{nmt}$	第 $n$ 个批发点对第 $m$ 种产品在第 $t$ 阶段的订购约束
	$h_{nmt}$	第 $n$ 个批发点对第 $m$ 种产品在第 $t$ 阶段的库存成本
	随机变量	$\xi_{nmt}$
$CON_{at}$		表示边 $a$ 在第 $t$ 阶段的路况, $a = 1, \dots, A, A$ 表示网络中边的总数, $CON_{at} : \Omega \rightarrow \Xi_{at}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量, $CON_{a1} = 0$
$\zeta_t$		$\zeta_t = (\xi_{11t}, \dots, \xi_{NMt}, CON_{1t}, \dots, CON_{At})$ , 且 $\zeta_1 = (0, \dots, 0)$ 是确定的, $\zeta_t : \Omega \rightarrow \Xi_{at}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量, $\Xi_t = \Xi_{11t} \times \dots \times \Xi_{NMt} \times \dots \times \Xi_{1t} \times \dots \times \Xi_{At}$
$\zeta_{[t]}$		直到 $t$ 阶段的随机过程, $\zeta_{[t]} = (\zeta_1, \dots, \zeta_t)$
$f_{mat}(W_{mat}(\zeta_{[t]}), \zeta_t)$		产品 $m$ 在边 $a$ 上第 $t$ 阶段的运输成本 $f_{mat}(W_{mat}(\zeta_{[t]}), \zeta_t) = W_{mat}(\zeta_{[t]}) CON_{at} \beta, \beta > 0$
决策变量	$p_{nmt}(y_{nmt}(\zeta_{[t]}), \zeta_t)$	第 $n$ 个批发点对于第 $m$ 种产品在第 $t$ 阶段的售价 $p_{nmt}(y_{nmt}(\zeta_{[t]}), \zeta_t) = \alpha(\xi_{nmt} - y_{nmt}(\zeta_{[t]})), \alpha > 0$
	$x_{nmt}(\zeta_{[t]})$	第 $n$ 个批发点对第 $m$ 种产品在第 $t$ 阶段的订购量, 订购决策是随机变量 $\zeta_{[t]}$ 的函数, 其中 $x_{nm1}(\zeta_{[1]}) = 0$
	$y_{nmt}(\zeta_{[t]})$	第 $n$ 个批发点对第 $m$ 种产品在第 $t$ 阶段的销售量, 销售决策是随机变量 $\zeta_{[t]}$ 的函数, 其中 $y_{nm1} = 0$
	$z_{nmt}(\zeta_{[t]})$	第 $n$ 个批发点对第 $m$ 种产品在第 $t$ 阶段的库存量, 库存决策是随机变量 $\zeta_{[t]}$ 的函数, 其中 $z_{nm1} = 0$
	$W_{mat}(\zeta_{[t]})$	产品 $m$ 在边 $a$ 上第 $t$ 阶段的运输量, 运输决策是随机变量 $\zeta_{[t]}$ 的函数, 其中 $W_{ma1} = 0$

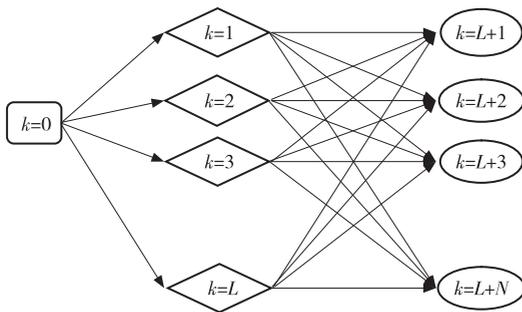


图 1 多级物流网络结构

Fig.1 Multi-level logistics network structure

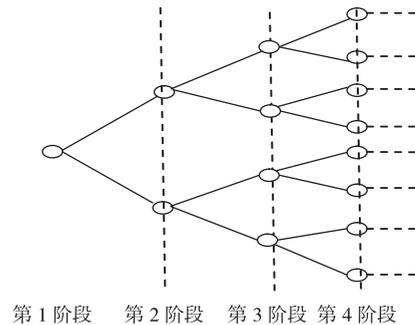


图 2 情景树

Fig.2 Scenarios tree

.....

第  $t$  阶段:

$$\min_{x_{nmt}(\zeta_{[t]}), y_{nmt}(\zeta_{[t]}), z_{nmt}(\zeta_{[t]}), W_{mat}(\zeta_{[t]})} J_t(x_{nmt}(\zeta_{[t]}), y_{nmt}(\zeta_{[t]}), z_{nmt}(\zeta_{[t]}), W_{mat}(\zeta_{[t]}), \zeta_t) + E[Q_{t+1}(x_{nmt}(\zeta_{[t]}), z_{nmt}(\zeta_{[t]}), \zeta_{t+1})], \quad (14)$$

$$\text{s. t. } z_{nmt}(\zeta_{[t]}) = z_{nmt-1}(\zeta_{[t-1]}) + x_{nmt-1}(\zeta_{[t-1]}) - y_{nmt}(\zeta_{[t]}), \forall n, m, t = 2, \dots, T-1, \quad (15)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_0^+} W_{mat}(\zeta_{[t]}) = \sum_{n=1}^N x_{nmt-1}(\zeta_{[t-1]}), \forall m, t = 2, \dots, T-1, \quad (16)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_k^-} W_{mat}(\zeta_{[t]}) = x_{nmt-1}(\zeta_{[t-1]}), \forall m, k = L+1, \dots, L+N, t = 2, \dots, T-1, n = k-L, \quad (17)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_k^+} W_{mat}(\zeta_{[t]}) = \sum_{b \in \mathcal{A}_k^-} W_{mbt}(\zeta_{[t]}), \forall m, k = 1, \dots, L, t = 2, \dots, T-1, \quad (18)$$

$$x_{nmt}(\zeta_{[t]}) \leq v_{nmt}, \forall n, m, t = 2, \dots, T-1, \quad (19)$$

$$x_{nmt}(\zeta_{[t]}), y_{nmt}(\zeta_{[t]}), z_{nmt}(\zeta_{[t]}), W_{mat}(\zeta_{[t]}) \geq 0, \forall n, m, t = 2, \dots, T-1. \quad (20)$$

在目标函数(14)中  $Q_{t+1}(x_{nmt}(\zeta_{[t]}), z_{nmt}(\zeta_{[t]}), \zeta_{t+1})$  表示的是该模型在第  $t+1$  阶段的最优值函数。约束(15)表示在批发点  $n$  处,  $m$  种产品的库存平衡关系。约束(16)确保了产品  $m$  从制造中心运送到转运节点的运输量之和等于批发点对产品  $m$  的订购量之和。约束(17)是指在每个批发节点上每种产品的接收量等于订购量。约束(18)则是保证了在转运节点( $k=1, \dots, L$ )处, 产品的进出量相同。约束(19)表示的是第  $t$  期产品的订购约束。约束(20)表示变量的符号约束。而在  $T$  阶段, 由于不再订购产品, 所以目标函数中没有产品的订购成本。

第 1 阶段:

$$\min_{x_{nm1}} J_1(x_{nm1}) + E[Q_2(x_{nm1}, \zeta_2)] \quad (21)$$

$$\text{s. t. } x_{nm1} \leq v_{nm1}, \forall m, n, \quad (22)$$

$$x_{nm1} \geq 0, \forall n, m. \quad (23)$$

而在第 1 阶段, 制造商只考虑产品在批发点的订购情况, 并且产品是在第 2 阶段开始时运输到各个批发点, 所以目标函数中只包含产品的订购成本。

为了简化符号, 令  $s_2(\zeta_{[2]}), s_T(\zeta_{[T]})$  为:

$$s_2(\zeta_{[2]}) = (x_{nm2}(\zeta_{[2]}), y_{nm2}(\zeta_{[2]}), z_{nm2}(\zeta_{[2]}), W_{ma2}(\zeta_{[2]}), n=1, \dots, N, m=1, \dots, M, a \in \mathcal{A}),$$

$$s_T(\zeta_{[T]}) = (y_{nmT}(\zeta_{[T]}), z_{nmT}(\zeta_{[T]}), W_{maT}(\zeta_{[T]}), n=1, \dots, N, m=1, \dots, M, a \in \mathcal{A}).$$

综上可得到下列多阶段优化模型:

$$\min_{\substack{x_{nm1} \geq 0 \\ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M x_{nm1} \leq v_1}} J_1 + E \left[ \min_{s_2(\zeta_{[2]})} J_2 + E \left[ \dots + E \left[ \min_{s_T(\zeta_{[T]})} J_T + E \left[ \text{s. t. } s_T(\zeta_{[T]}) \in \theta_T \right] \right] \right] \right] \right]. \quad (24)$$

其中:

$$\theta_2 = \left\{ s_2(\zeta_{[2]}) \left| \begin{array}{l} J_1 = J_1(x_{nm1}), J_2 = J_2(x_{nm2}(\zeta_{[2]}), y_{nm2}(\zeta_{[2]}), z_{nm2}(\zeta_{[2]}), W_{ma2}(\zeta_{[2]}), \zeta_2), \\ J_T = J_T(y_{nmT}(\zeta_{[T]}), z_{nmT}(\zeta_{[T]}), W_{maT}(\zeta_{[T]}), \zeta_T), \\ z_{nm2}(\zeta_{[2]}) = z_{nm1}(\zeta_{[1]}) + x_{nm1}(\zeta_{[1]}) - y_{nm2}(\zeta_{[2]}), \forall n, m, \\ \sum_{a \in \mathcal{A}_0^+} W_{ma2}(\zeta_{[2]}) = \sum_{n=1}^N x_{nm1}(\zeta_{[1]}), \forall m, \\ \sum_{a \in \mathcal{A}_k^-} W_{ma2}(\zeta_{[2]}) = x_{nm1}(\zeta_{[1]}), \forall m, k = L+1, \dots, L+N, n = k-L, \\ \sum_{a \in \mathcal{A}_k^+} W_{ma2}(\zeta_{[2]}) = \sum_{b \in \mathcal{A}_k^-} W_{mb2}(\zeta_{[2]}), \forall m, k = 1, \dots, L, \\ x_{nm2}(\zeta_{[2]}) \leq v_{nm2}, \forall m, n, \\ s_2(\zeta_{[2]}) \geq 0 \end{array} \right. \right\},$$

$$\theta_T = \left\{ \begin{array}{l} s_T(\zeta_{[T]}) \left\{ \begin{array}{l} z_{nmT}(\zeta_{[T]}) = z_{nmT-1}(\zeta_{[T-1]}) + x_{nmT-1}(\zeta_{[T-1]}) - y_{nmT}(\zeta_{[T]}), \forall n, m, \\ \sum_{a \in \mathcal{A}_0^+} W_{maT}(\zeta_{[T]}) = \sum_{n=1}^N x_{nmT-1}(\zeta_{[T-1]}), \forall m, \\ \sum_{a \in \mathcal{A}_k^-} W_{maT}(\zeta_{[T]}) = x_{nmT-1}(\zeta_{[T-1]}), \forall m, k = L + 1, \dots, L + N, n = k - L, \\ \sum_{a \in \mathcal{A}_k^+} W_{maT}(\zeta_{[T]}) = \sum_{b \in \mathcal{A}_k^-} W_{mbT}(\zeta_{[T]}), \forall m, k = 1, \dots, L, \\ s_T(\zeta_{[T]}) \geq 0, x_{nmT}(\zeta_{[T]}) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right\}.$$

本文中订购决策(产品的订购数量)是在每一期随机变量实现之前确定的,而追索决策(Recourse decision)是受到先前的订购决策和本期随机变量实现情况的影响,所以订购决策是划分模型阶段数的关键决策。所谓追索决策指的是不确定情景实现后的补救或更新措施,在本文中是指确定订购决策以及不确定情景实现后对产品的运输决策、库存决策和销售决策。上述模型(24)式是考虑  $T$  个销售时期的  $T$  阶段模型,其中阶段数和时期数相等。本文为体现多阶段模型的优势,在多时期模型中,对较多阶段模型与较少阶段模型进行比较分析。下面就以两阶段模型、三阶段模型和四阶段模型为例进行说明。

这里将整个销售期分为 4 个时期,每一期有两种随机情景。情景树如图 3~图 5 所示,图中黑色正方形表示订购决策,黑色菱形表示追索决策。在图 3 中,两阶段模型所有的订购决策在第 1 期开始时就已经全部确定了,后续 3 个时期不再订货。这里需要注意的是产品在第 2 期已经运输到各个批发点了,所以两阶段模型在第 3 期和第 4 期只需要考虑销售和库存决策。在图 4 中,三阶段模型在第 2 期可以基于第 1 期的决策信息和第 2 期的不确定性来确定这一期的订购决策,并且第 2 期的订购可用于第 3 期和第 4 期的销售,第 3 期末销售完的部分直接作为库存用于第 4 期的销售。而四阶段模型则可以在第 1~3 期开始时就根据先前的信息和当期的不确定性来确定订购决策。显然,随着阶段数的增加模型将会具有更大的决策空间。

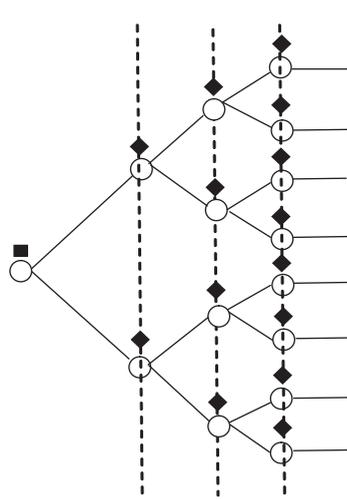


图 3 两阶段模型

Fig. 3 Two-stage model

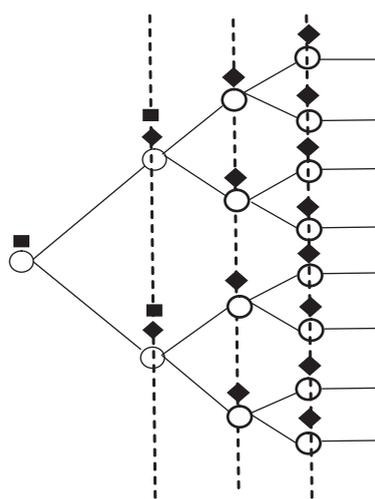


图 4 三阶段模型

Fig. 4 Three-stage model

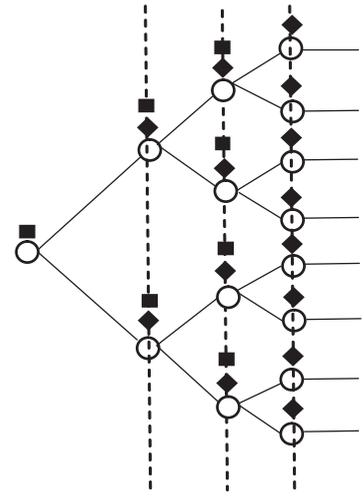


图 5 四阶段模型

Fig. 5 Four-stage model

接下来考虑一般情况,为了方便理解,这里假定  $t_1 (t_1 = 2, \dots, T)$  阶段模型和  $t_1 - 1$  阶段模型都为物流网络下的多产品多阶段随机库存模型,共有  $T$  个销售时期。两类模型在销售期内的订购时间如下:

$L_{t_1} = (1, 2, 3, 4, \dots, t_1 - 1)$ , 表示  $t_1$  阶段模型从第 1 期开始订购,直到  $t_1 - 1$  期结束。

$L_{t_1 - 1} = (1, 2, 3, 4, \dots, t_1 - 2)$ , 表示  $t_1 - 1$  阶段模型从第 1 期开始订购,直到  $t_1 - 2$  期结束。

$t_1$  阶段模型的订购决策为  $x_t(\zeta_{[t]})$ ,  $t = 1, \dots, t_1 - 1$ , 这里将订购决策作为随机变量  $\zeta_{[t]}$  的函数。 $t_1$  阶段模型的销售决策,库存决策分别用  $y_t(\zeta_{[t]})$ ,  $z_t(\zeta_{[t]})$  表示,且  $t = 2, \dots, T$ 。运输决策为  $w_t(\zeta_{[t]})$ ,  $t = 2, \dots, t_1$ 。 $t_1 - 1$  阶段模型订购决策为  $x'_t(\zeta_{[t]})$ ,  $t = 1, \dots, t_1 - 2$ 。销售决策、库存决策分别  $y'_t(\zeta_{[t]})$ ,  $z'_t(\zeta_{[t]})$ ,  $t = 2, \dots, T$ 。运输决策为  $w'_t(\zeta_{[t]})$ ,  $t = 2, \dots, t_1 - 1$ 。 $t_1$  阶段模型订购约束为  $v_t = (v_{1t}, \dots, v_{nt}, \dots, v_{Nt})$ ,  $t = 1, \dots, t_1 - 1$ 。 $t_1 - 1$  阶段模

型订购约束为  $v'_t = (v'_{1t}, \dots, v'_{nmt}, \dots, v'_{Nt}), t=1, \dots, t_1-2$ 。而两类模型的总损失分别用  $R_{t_1}$  和  $R_{t_1-1}$  表示。下面给出一条定理。

**定理 1** 在  $T$  个销售时期内, 当  $t_1 \leq T$  时  $t_1$  阶段模型和  $t_1-1$  阶段模型如果满足下列条件: 1)  $v_{nmt_1-2} \geq ri_{nmt_1-1}$ , 其中  $ri_{nmt_1-1} = \max_{\xi_{nmt_1-1} \in \Xi_{nmt_1-1}} \xi_{nmt_1-1}$ ; 2)  $\text{CON}_{a_1}(\omega) \leq \text{CON}_{a_1-1}(\omega), \omega \in \Omega$ ; 3)  $v'_{t_1-2} \leq v_{t_1-2} + v_{t_1-1}$ 。那么必有  $R_{t_1-1} \geq R_{t_1}$ 。

**证明** 本文证明部分是为了验证在一定条件下多阶段模型的最终收益会随着阶段数的增加而增加, 所以将  $t_1$  阶段模型与  $t_1-1$  阶段模型进行比较。为方便比较两类模型的最优决策, 在证明中将  $t_1-1$  阶段模型在  $t_1-2$  期的订购决策分解成为  $t_1-2$  期和  $t_1-1$  期的订购决策(使  $t_1-1$  阶段模型在  $t_1-1$  期也具有订购决策), 而销售决策、库存决策和运输决策也会相应地做出改变。为了方便理解, 下面给出定理中条件部分的简单解释。

1)  $v_{nmt_1-2} \geq ri_{nmt_1-1}$ , 其中  $ri_{nmt_1-1} = \max_{\xi_{nmt_1-1} \in \Xi_{nmt_1-1}} \xi_{nmt_1-1}$ , 保证了在  $t_1-2$  期,  $t_1$  阶段模型的最大订购量一定满足  $t_1-1$  期的市场需求, 即  $v_{t_1-2} - y'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]})$  必然大于等于 0。

2)  $\text{CON}_{a_1}(\omega) \leq \text{CON}_{a_1-1}(\omega), \omega \in \Omega$ , 表示  $t_1$  期道路运输情况一定不会  $t_1-1$  期差, 即保证  $t_1$  期的单位运输成本要比  $t_1-1$  低。

3)  $v'_{t_1-2} \leq v_{t_1-2} + v_{t_1-1}$ , 保证  $t_1-1$  阶段模型在  $t_1-2$  期的订购约束一定小于等于  $t_1$  阶段模型在  $t_1-2$  期和  $t_1-1$  期订购约束的总和。

考虑  $t_1, t_1-1$  阶段模型的最优决策如上所示, 现在分解  $t_1-1$  阶段模型的最优决策, 使它可以为  $t_1$  阶段模型的可行决策, 现在将  $t_1-1$  阶段模型在  $t_1-2$  期的订购决策分为下面两部分:

$$x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) = x''_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) + x''_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}).$$

将  $x''_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]})$  作为  $t_1-2$  期的订购决策,  $x''_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]})$  作为  $t_1-1$  期的订购决策。这里分两种情形进行讨论。

第 1 种情形是  $t_1-1$  阶段模型在  $t_1-2$  期的订购决策大于等于  $t_1$  阶段模型在  $t_1-2$  期的订购约束, 即  $x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) \geq v_{t_1-2}$ 。此时, 令  $x''_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) = v_{t_1-2}, x''_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) - v_{t_1-2}$ , 由条件 3) 可知  $v'_{t_1-2} - v_{t_1-2} \leq v_{t_1-1}$ , 且  $x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) \leq v'_{t_1-2}$ , 所以  $x''_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) \leq v_{t_1-1}$ 。

第 2 种情形为  $t_1-1$  阶段模型在  $t_1-2$  期的订购决策小于  $t_1$  阶段模型在  $t_1-2$  期的订购约束, 即  $x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) < v_{t_1-2}$ 。此时, 令  $x''_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) = x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}), x''_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = 0$ 。

再将  $t_1-1$  阶段模型在  $t_1-1$  期的运输决策分为两部分:  $w'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = w''_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) + w''_{t_1}(\zeta_{[t_1]})$ 。将  $w''_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]})$  作为  $t_1-1$  期的运输决策,  $w''_{t_1}(\zeta_{[t_1]})$  作为  $t_1$  期的运输决策。但是  $t_1-1$  期的运输决策是由  $t_1-2$  期的订购决策决定的。故两种情形下的运输决策分别为: 第 1 种情形中,  $w''_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = v_{t_1-2}, w''_{t_1}(\zeta_{[t_1]}) = x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) - v_{t_1-2}$ ; 第 2 种情形中,  $w''_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}), w''_{t_1}(\zeta_{[t_1]}) = 0$ 。

故在两种情形下  $t_1-1$  阶段模型在  $t_1-1$  期的库存决策为: 第 1 种情形中,  $v_{t_1-2} - y'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) + z'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]})$ ; 第 2 种情形中,  $x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) - y'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) + z'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]})$ 。

在第 2 种情形中, 由库存平衡关系可知库存决策没有发生变化。而在第 1 种情形中, 根据条件 1) 可知  $t_1$  阶段模型在  $t_1-2$  期的订购约束是要大于  $t_1-1$  期产品的市场不确定性, 从而  $t_1-2$  期的订购量一定可以满足  $t_1-1$  期市场的需求, 即  $v_{t_1-2} - y'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]})$  必然大于等于 0, 修改后的库存决策一定大于等于 0。

现在把  $t_1-1$  阶段模型的最优决策转换为  $\bar{x}_t(\zeta_{[t]}), \bar{y}_t(\zeta_{[t]}), \bar{z}_t(\zeta_{[t]}), \bar{w}_t(\zeta_{[t]})$ 。

订购决策: 第 1 种情形中,  $\bar{x}_t(\zeta_{[t]}) = x'_t(\zeta_{[t]}), t=1, \dots, t_1-3, \bar{x}_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) = v_{t_1-2}, \bar{x}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) - v_{t_1-2} \leq v_{t_1-1}$ 。第 2 种情形中,  $\bar{x}_t(\zeta_{[t]}) = x'_t(\zeta_{[t]}), t=1, \dots, t_1-3, \bar{x}_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) = x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}), \bar{x}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = 0$ 。

销售决策:  $\bar{y}_t(\zeta_{[t]}) = y'_t(\zeta_{[t]}), t=2, \dots, T$  (两种情形的销售决策相同)。

库存决策: 第 1 种情形中,  $\bar{z}_t(\zeta_{[t]}) = z'_t(\zeta_{[t]}), t=2, \dots, T$ , 其中  $\bar{z}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = v_{t_1-2} + z'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) - y'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) \geq 0$ ; 第 2 种情形中,  $\bar{z}_t(\zeta_{[t]}) = z'_t(\zeta_{[t]}), t=2, \dots, T$ 。

运输决策: 第 1 种情形中:  $\bar{w}_t(\zeta_{[t]}) = w'_t(\zeta_{[t]}), t=2, \dots, t_1-2, \bar{w}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = v_{t_1-2}, \bar{w}_{t_1}(\zeta_{[t_1]}) = x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) - v_{t_1-2}$ ; 第 2 种情形中:  $\bar{w}_t(\zeta_{[t]}) = w'_t(\zeta_{[t]}), t=2, \dots, t_1-2, \bar{w}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}), \bar{w}_{t_1}(\zeta_{[t_1]}) = 0$ 。

通过上述分析可知,  $t_1-1$  阶段模型转换后的最优决策必定是  $t_1$  阶段模型的一组可行解。用  $\bar{R}_{t_1}$  表示转换后

的总损失。因为  $t_1 - 1$  阶段模型转换后的最优决策不一定是  $t_1$  阶段模型的最优决策,所以必有  $\bar{R}_{t_1} \geq R_{t_1}$ 。

此外,由于每一期产品的单位订购成本和销售决策不变,所以订购成本和销售收入不变。但库存决策和运输决策的改变会导致总损失的变化。下面讨论  $t_1 - 1$  阶段模型转换后总损失的变化,即:

$$R_{t_1-1} - \bar{R}_{t_1} = H_{t_1-1}(z'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]})) - H_{t_1-1}(\bar{z}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]})) + N_{t_1-1}(w'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}), \zeta_{t_1-1}) - N_{t_1-1}(\bar{w}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}), \zeta_{t_1-1}) - N_{t_1-1}(\bar{w}_{t_1}(\zeta_{[t_1]}), \zeta_{t_1})。$$

接下来分两种情形讨论。

情形 1: 
$$z'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) + z'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) - y'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}),$$
$$\bar{z}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = v_{t_1-2} + z'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) - y'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}),$$

其中  $x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) \geq v_{t_1-2}$ , 所以  $z'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) \geq \bar{z}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]})$ , 从而  $H_{t_1-1}(z'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]})) - H_{t_1-1}(\bar{z}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]})) \geq 0$ 。

由条件 2) 可知,  $t_1$  期的路况比  $t_1 - 1$  期的路况要好, 且转换后  $\bar{w}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}), \bar{w}_{t_1}(\zeta_{[t_1]})$  的运输量之和等于  $w'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]})$ , 即  $w'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = \bar{w}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) + \bar{w}_{t_1}(\zeta_{[t_1]})$ , 其中  $\bar{w}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = v_{t_1-2}, \bar{w}_{t_1}(\zeta_{[t_1]}) = x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) - v_{t_1-2}$ 。所以  $N_{t_1-1}(w'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}), \zeta_{t_1-1}) - N_{t_1-1}(\bar{w}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}), \zeta_{t_1-1}) - N_{t_1-1}(\bar{w}_{t_1}(\zeta_{[t_1]}), \zeta_{t_1}) \geq 0$ 。

情形 2:  $z'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = \bar{z}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}), w'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = \bar{w}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}), \bar{w}_{t_1}(\zeta_{[t_1]}) = 0$ , 故  $R_{t_1-1} = \bar{R}_{t_1}$ 。

综上所述  $R_{t_1-1} - \bar{R}_{t_1} \geq 0$ , 由此可推出  $R_{t_1-1} \geq R_{t_1}$ 。

证毕

从以上分析可知, 在一定条件下物流网络下的多阶段库存模型的最优决策是随着阶段数的增加而越来越好。

## 2 运用 SDDP 算法求解模型(24)

SDDP 算法是一个用于求解多阶段随机规划问题的经典算法。本文将算法用于求解物流网络下的多产品多阶段随机库存模型, 这里先给出算法的基本描述, 然后再给出算法的逻辑流程图。

### 2.1 SDDP 算法的后向步骤

SDDP 算法的后向步骤是由后往前推进的一个过程, 详细步骤可参考文献[16], 这里定义决策变量  $X_t = (x_t, y_t, z_t, W_t)^T, x_t = (x_{11t}(\zeta_{[t]}), \dots, x_{nmt}(\zeta_{[t]}), \dots, x_{NMt}(\zeta_{[t]}))$ , 指每个批发点对每种产品在第  $t$  阶段的订购量,  $y_t = (y_{11t}(\zeta_{[t]}), \dots, y_{nmt}(\zeta_{[t]}), \dots, y_{NMt}(\zeta_{[t]}))$  和  $z_t = (z_{11t}(\zeta_{[t]}), \dots, z_{nmt}(\zeta_{[t]}), \dots, z_{NMt}(\zeta_{[t]}))$  分别表示每个批发点的每种产品在第阶段的销售量和库存量。  $W_t = (W_{11t}(\zeta_{[t]}), \dots, W_{mat}(\zeta_{[t]}), \dots, W_{Mat}(\zeta_{[t]}))$  是每种产品在每条边上第  $t$  阶段的运输量,  $A$  表示的是边的总数。  $\bar{X}_t (t=1, \dots, T-1)$  为迭代点(算法刚开始的时候可以将它们全设为 0, 后续可通过 SDDP 算法的前向步骤求得新的迭代点)。这里每阶段考虑  $S_t$  种确定的情景,  $\zeta_s, s=1, \dots, S_t$ 。  $Q_T(X_{T-1}, \zeta_T)$  是模型(8)~(13)在第  $T$  期的最优值函数, 而  $E[Q_T(X_{T-1}, \zeta_T)]$  则是其期望值。现在令  $\mathcal{Q}_T(X_{T-1})$  是  $E[Q_T(X_{T-1}, \zeta_T)]$  的近似值,  $\mathcal{Q}_T(X_{T-1})$  是由切平面集合的最大值构造而成, 表达式为:

$$\mathcal{Q}_T(X_{T-1}) = \max_{u \in \mathcal{S}} \{\alpha_{Tu} + \beta_{Tu}^T X_{T-1}\}。 \tag{25}$$

其中:  $\beta_{Tu}^T$  表示每一步迭代中求得的切线的梯度值,  $\alpha_{Tu}$  表示每一步迭代中求得的切线中的常数项,  $\mathcal{S}$  表示  $\beta_{Tu}^T$  和  $\alpha_{Tu}$  的指标集合。接下来从算法的第  $c$  步进行解释。

第  $T$  阶段:

$$\min_{X_T} J_T(X_T, \zeta_T), \tag{26}$$

$$\text{s. t. } A_1 X_T = B_1 \bar{X}_{T-1}^{-1}, \tag{27}$$

$$A_2 X_T = B_2 \bar{X}_{T-1}^{-1}, \tag{28}$$

$$A_3 X_T = B_3 \bar{X}_{T-1}^{-1}, \tag{29}$$

$$A_4 X_T = A_5 X_T, \tag{30}$$

$$X_T \geq 0. \tag{31}$$

此处的模型(26)~(31)与模型(8)~(13)是相互对应的, 只是模型(8)~(13)中将决策变量统一为向量的形式。下面以约束(27)为例进行说明, 在约束(27)中  $A_1$  和  $B_1$  都为 0, 1 矩阵。矩阵  $A_1$  中为 1 的元素分别对应决策变量中的销售量和库存量, 而矩阵  $B_1$  中为 1 的元素则对应决策变量中的订购量和库存量, 将矩阵  $A_1$  和  $B_1$  分别与  $T$  阶段的决策变量和  $T-1$  阶段的迭代点相乘得到如下形式:

$$z_{nmT}(\zeta_{[T]}) + y_{nmT}(\zeta_{[T]}) = z_{nmT-1}(\zeta_{[T-1]}) + x_{nmT-1}(\zeta_{[T-1]}), \forall n, m.$$

上式就等同于约束(9),其余部分的转化方式与上式类似,这里就不再说明。

根据上述模型,写出它的拉格朗日函数如下:

$$J_T(X_T, \zeta_T) + \lambda_{1T}(H_1 X_T - H_2 \bar{X}_{T-1}^{\zeta_{T-1}}) + \lambda_{2T}(A_4 X_T - A_5 X_T). \quad (32)$$

$$\text{其中 } H_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \end{bmatrix}.$$

在  $T$  阶段随机变量  $\zeta_T$  的支持集为含有  $S_T$  种已知情景的集合,且  $\bar{X}_{T-1}^{\zeta_{T-1}}$  为迭代点,所以可将模型(26)~(31)在  $T$  阶段的最优值和拉格朗日乘子分别表示为  $Q_{T_s}(\bar{X}_{T-1}^{\zeta_{T-1}}, \zeta_T^s)$ ,  $\lambda_{1T_s}, \lambda_{2T_s}, s=1, \dots, S_T$ , 其中  $\lambda_{1T_s}$  是与上一阶段决策相关的对偶解。并且从(32)式可知目标函数在第  $T$  阶段对偶问题的最优值是随着  $\bar{X}_{T-1}^{\zeta_{T-1}}$  的变化而改变的,对(26)~(31)的最优值函数在点  $\bar{X}_{T-1}^{\zeta_{T-1}}$  处求导,求得其梯度为  $-(\lambda_{1T_s} H_2)^T$ 。那么模型在点  $\bar{X}_{T-1}^{\zeta_{T-1}}$  处切线中的常数项和梯度为:

$$\alpha_T = \frac{1}{S_T} \sum_{s=1}^{S_T} Q_{T_s}(\bar{X}_{T-1}^{\zeta_{T-1}}, \zeta_T^s) + \frac{1}{S_T} \sum_{s=1}^{S_T} (\lambda_{1T_s} H_2)^T \bar{X}_{T-1}^{\zeta_{T-1}}, \quad (33)$$

$$\beta_T^T = -\frac{1}{S_T} \sum_{s=1}^{S_T} (\lambda_{1T_s} H_2)^T. \quad (34)$$

但是由于  $E[Q_T(X_{T-1}, \zeta_T)]$  的表达式无法求得,所以用  $\mathcal{Q}_T^{\zeta}(X_{T-1})$  来近似,其中  $\mathcal{Q}_T^{\zeta}(X_{T-1})$  是在(25)式中定义的。通过(33)~(34)式可得  $\mathcal{Q}_T^{\zeta}(X_{T-1}) = \max\{\mathcal{Q}_T^{\zeta_{T-1}}(X_{T-1}), \alpha_T + \beta_T^T X_{T-1}\}$ 。

第  $T-1$  阶段:

$$\min_{X_{T-1}} J_{T-1}(X_{T-1}, \zeta_{T-1}) + \mathcal{Q}_T^{\zeta}(X_{T-1}), \quad (35)$$

$$\text{s. t. } H_1 X_{T-1} = H_2 \bar{X}_{T-2}^{\zeta_{T-2}}, \quad (36)$$

$$A_4 X_{T-1} = A_5 X_{T-1}, \quad (37)$$

$$A_6 X_{T-1} \leq v_{T-1}, \quad (38)$$

$$X_{T-1} \geq 0. \quad (39)$$

目标函数(35)中的  $E[Q_T(X_{T-1}, \zeta_T)]$  用切平面集  $\mathcal{Q}_T^{\zeta}(X_{T-1})$  近似替代了,且约束(38)表示的是  $T-1$  阶段的订购量约束,即  $v_{T-1} = (v_{11T-1}, \dots, v_{nmT-1}, \dots, v_{NMT-1})$ 。在  $T-1$  阶段也可以求得模型在每种情景下的最优值  $Q_{T-1,s}(\bar{X}_{T-2}^{\zeta_{T-2}}, \zeta_{T-1}^s)$  和拉格朗日乘子  $\lambda_{1,T-1,s}, \lambda_{2,T-1,s}, s=1, \dots, S_{T-1}$ ,  $E[Q_{T-1}(X_{T-2}, \zeta_{T-1})]$  的切线表达式为:

$$\alpha_{T-1} + \beta_{T-1}^T X_{T-2}. \quad (40)$$

$$\text{其中 } \alpha_{T-1} = \frac{1}{S_{T-1}} \sum_{s=1}^{S_{T-1}} Q_{T-1,s}(\bar{X}_{T-2}^{\zeta_{T-2}}, \zeta_{T-1}^s) + \frac{1}{S_{T-1}} \sum_{s=1}^{S_{T-1}} (\lambda_{1,T-1,s} H_2)^T \bar{X}_{T-2}^{\zeta_{T-2}}, \beta_{T-1}^T = -\frac{1}{S_{T-1}} \sum_{s=1}^{S_{T-1}} (\lambda_{1,T-1,s} H_2)^T.$$

将所求得的切线添加到切面集  $\mathcal{Q}_{T-1}^{\zeta}(X_{T-2})$  中,即  $\mathcal{Q}_{T-1}^{\zeta}(X_{T-2}) = \max\{\mathcal{Q}_{T-1}^{\zeta_{T-2}}(X_{T-2}), \alpha_{T-1} + \beta_{T-1}^T X_{T-2}\}$ 。以此类推可以求得每一阶段的切平面集,直到第 1 阶段。

第 1 阶段:

$$\min_{X_1} J_1(X_1) + \mathcal{Q}_2^{\zeta}(X_1), \quad (41)$$

$$\text{s. t. } A_6 X_1 \leq v_1, \quad (42)$$

$$X_1 \geq 0. \quad (43)$$

求解得到第 1 阶段的最优解  $X_1$  和最优值  $Q_1(X_1)$ , 而这里的最优值可以作为多阶段优化模型(24)的一个最优值下界,用  $z_1 = Q_1(X_1)$  来表示。

## 2.2 SDDP 算法的前向步骤

SDDP 算法前向步骤是从前往后推进的一个过程。根据后向步骤中所求得的切平面集的表达式,从而可以求得新的最优解代入到计算中。由于在后向步骤中已经求得第 1 阶段新的最优解,所以直接将它作为新的迭代点  $\bar{X}_1^{\zeta}$  代入到第 2 阶段进行计算。

第 2 阶段:

$$\min_{X_2} J_2(X_2, \zeta_2) + \mathcal{D}_3^c(X_2), \tag{44}$$

$$\text{s. t. } H_1 X_2 = H_2 \bar{X}_1^c, \tag{45}$$

$$A_4 X_2 = A_5 X_2, \tag{46}$$

$$A_6 X_2 \leq v_2, \tag{47}$$

$$X_2 \geq 0. \tag{48}$$

在此阶段,已知  $\mathcal{D}_3^c(X_2)$  的表达式,同样可以求得最优解并作为新的迭代点  $\bar{X}_2^c$ ,以此类推直到第  $T$  阶段。

第  $T$  阶段:

$$\min_{X_T} J_T(X_T, \zeta_T), \tag{49}$$

$$\text{s. t. } H_1 X_T = H_2 \bar{X}_{T-1}^c, \tag{50}$$

$$A_4 X_T = A_5 X_T, \tag{51}$$

$$X_T \geq 0. \tag{52}$$

可以求得阶段最优解为  $X_T$ ,这样每一阶段所求得的最优解都可以作为新的迭代点用于后向步骤的计算。下面给出多阶段模型(24)的最优值上界。

$$z_2 = \sum_{t=1}^T E[J_t(\bar{X}_t^c, \zeta_t)] \tag{53}$$

通过比较  $z_2$  和  $z_1$  的大小,可以判断模型(21)是否求得最优解。算法步骤总结见图 6。

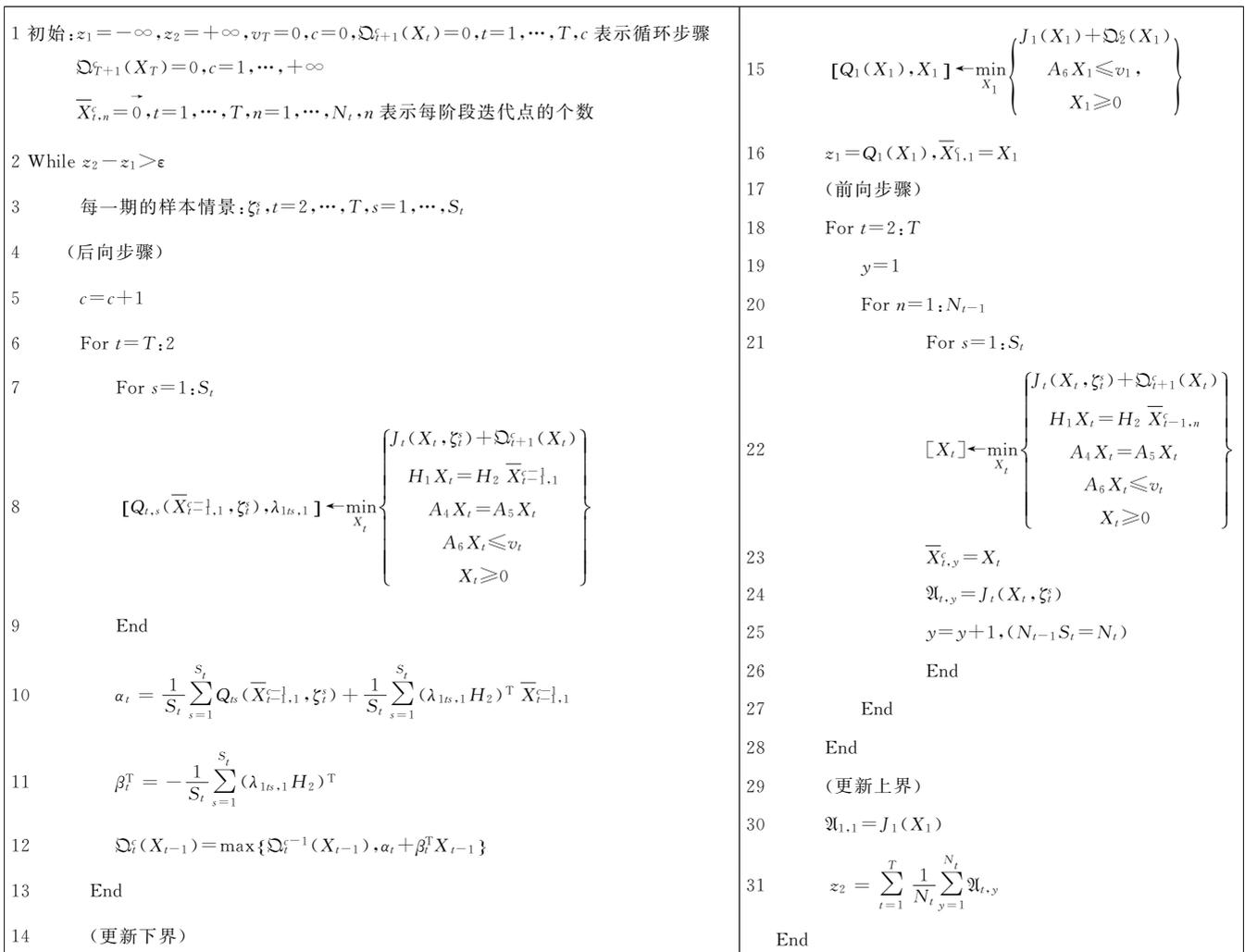


图 6 算法步骤

Fig. 6 Algorithm flowchart

### 3 案例分析

本节考虑 1 个含有单个制造中心, 3 个转运节点 ( $L=3$ ), 3 个批发点 ( $N=3$ ) 的物流网络。网络中赋予每条边一个编号,  $l_{0i}$  表示的是从制造中心 ( $k=0$ ) 到转运节点 ( $k=1$ ) 的边,  $l_{ij}$  ( $i=0, j=1, 2, 3$ ) 表示的是从制造中心到转运节点的边。同样地,  $l_{jr}$  ( $j=1, 2, 3, r=4, 5, 6$ ) 表示的是从转运节点到批发点的边。这样总共定义了 12 条边, 如图 7 所示。在此基础上设置下面 3 个示例, 例 1 是物流网络下的单产品的多阶段随机库存问题, 将会分别构建两阶段、三阶段和四阶段模型, 为的是检测多阶段随机库存模型的优势。例 2 是物流网络下的多产品三阶段随机库存问题, 将会测试多阶段模型在中等规模样本情景数下的计算能力。例 3 则是考虑某些特殊情形下, 多阶段模型是否一定具有优势。

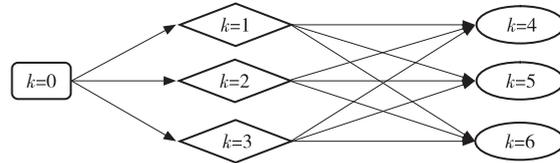


图 7 3 个转运节点、3 个批发点的物流网络

Fig. 7 Three transit nodes, three wholesale point transportation networks

#### 例 1 物流网络下的单产品的多阶段随机库存问题。

本例中将整个销售阶段分为 4 个时期, 且只销售同一种产品。这里分别构建两阶段模型、三阶段模型和四阶段模型, 路况和价格中参数分别设置为  $\beta=1, \alpha=0.1$ 。其中四阶段模型在第 1 期的订购约束为 (85, 90, 95), 第 2 期的订购约束为 (95, 100, 105), 第 3 期的订购约束为 (100, 110, 120)。三阶段模型第 1 期的订购约束和四阶段模型一致, 而第 2 期的订购约束为 (195, 210, 225)。两阶段模型第 1 期的订购约束为 (280, 300, 320)。每条边的路况服从下列均匀分布:

$$\begin{aligned} & \text{CON}_{l_{01}t}, \text{CON}_{l_{02}t}, \text{CON}_{l_{03}t} \sim U(0.5, 1); \\ & \text{CON}_{l_{14}t}, \text{CON}_{l_{24}t}, \text{CON}_{l_{34}t} \sim U(0.4, 0.8); \\ & \text{CON}_{l_{15}t}, \text{CON}_{l_{25}t}, \text{CON}_{l_{35}t} \sim U(0.6, 1.2); \\ & \text{CON}_{l_{16}t}, \text{CON}_{l_{26}t}, \text{CON}_{l_{36}t} \sim U(0.7, 1.4) (t=2, 3, 4). \end{aligned}$$

这里每阶段抽取的样本量为 2, 其中表 2 给出每一期产品的市场不确定性。单位产品的生产成本这里设为 20, 且 3 个批发点前 3 期的单位库存成本分别为 ( $h_{41t}=1, h_{51t}=1.2, h_{61t}=1.5, t=2, 3$ ), 由于最后一期以后产品无法销售, 这里定义各批发点最后一期的单位库存成本为 ( $h_{n14}=20, n=4, 5, 6$ )。则 3 种模型的最终盈利情况为: 两阶段模型盈利 3 469.2 万元; 三阶段模型盈利 3 999.8 万元; 四阶段模型盈利 4 271 万元。

另外本节考虑到在市场某些极端情景下 (如自然灾害或金融风暴等意外情况的发生), 产品的市场价格变动将会更大, 表 3 重新设置了与产品相关的市场不确定性。则 3 种模型在极端情况下的最终盈利情况为: 两阶段模型盈利 1 382.9 万元; 三阶段模型盈利 1 674.7 万元; 四阶段模型盈利 1 937.3 万元。

由得到的数据可知, 模型随着阶段数的增加总体盈利也在不断地提高。在市场较为平稳的时候, 四阶段模型和三阶段模型盈利额的差距占四阶段模型总体盈利的比例并不大, 但是当市场出现极端情景的时候, 这时会发现四阶段模型与三阶段模型、两阶段模型盈利额的差距占四阶段模型总体盈利的比例均增加了。这说明随着市场不确定性的增加, 多阶段模型的优势将会更加明显。

表 2 产品的市场不确定性

Tab. 2 Market uncertainty of products

期数	情景	未来不确定市场情景的取值
第 2 期	情景 1	$\xi_{112}=300, \xi_{512}=310, \xi_{612}=330$
	情景 2	$\xi_{112}=340, \xi_{512}=350, \xi_{612}=360$
第 3 期	情景 1	$\xi_{113}=320, \xi_{513}=330, \xi_{613}=350$
	情景 2	$\xi_{113}=345, \xi_{513}=360, \xi_{613}=380$
第 4 期	情景 1	$\xi_{113}=310, \xi_{513}=355, \xi_{613}=380$
	情景 2	$\xi_{113}=350, \xi_{513}=405, \xi_{613}=420$

表 3 极端情景下产品的市场不确定性

Tab. 3 Market uncertainty of products in extreme scenarios

期数	情景	未来不确定市场情景的取值
第 2 期	情景 1	$\xi_{112}=98, \xi_{512}=100, \xi_{612}=108$
	情景 2	$\xi_{112}=310, \xi_{512}=350, \xi_{612}=360$
第 3 期	情景 1	$\xi_{113}=130, \xi_{513}=141, \xi_{613}=152$
	情景 2	$\xi_{113}=350, \xi_{513}=380, \xi_{613}=430$
第 4 期	情景 1	$\xi_{113}=133, \xi_{513}=152, \xi_{613}=164$
	情景 2	$\xi_{113}=390, \xi_{513}=450, \xi_{613}=490$

**例 2 物流网络下的多产品三阶段随机库存问题。**

在这个例子中,每个批发点销售 3 种不同的产品,并将整个销售阶段划分为 3 个时期,只在第 1 期和第 2 期订购产品,第 3 期不订购。三阶段模型在第 1 期的订购约束为(85,90,95,90,100,105,95,110,115),第 2 期的订购约束为(95,100,105,100,105,110,105,110,120),其中路况和价格中参数的设置分别为  $\beta=1, \alpha=0.1$ ,且每条边路况的设置与例 1 中的相同,这里不再列出。3 种产品的生产成本此处为  $c_1=20, c_2=21, c_3=22$ 。该产品在每个批发点的市场不确定性都服从下列均匀分布  $\xi_{n1t} \sim U(300,350), \xi_{n2t} \sim U(310,360), \xi_{n3t} \sim U(330,380) (t=2,3, n=4,5,6)$ 。3 个批发点销售的 3 种产品在第 2 期的库存成本分别为  $h_{n12}=1, h_{n22}=1.2, h_{n32}=1.5, n=4,5,6$ ,由于最后一期之后产品无法销售这里定义各批发点最后一期库存成本为  $h_{n13}=20, h_{n23}=21, h_{n33}=22, n=4,5,6$ 。这里每一期抽取样本量为 10,50,100 的 3 组独立同分布样本,构造样本均值逼近问题并进行求解。表 4 根据每一期产生的样本数,分别计算三阶段模型的最终盈利情况和运算时间。

表 4 中的计算结果说明了该模型也可以解决中等规模的问题。根据文献[21]可知:随着样本量的增加,样本均值逼近多阶段库存问题的最优解是收敛到随机变量服从连续分布的原问题的最优解。从表中也可以发现运算时间是随着情景的增加而快速增长的。由于该问题天然具有并行计算的结构,可以采用并行计算的方式降低求解时间,这将是下一阶段的研究方向。

**表 4 不同样本情景数下的最终盈利和运算时间**  
Tab.4 Final profit and calculation time under different sample scenarios

样本数/个	计算时间/min	盈利/万元
10	7.53	6 027
50	147.86	5 958.6
100	589.44	5 944.6

**例 3 针对某些特殊情形研究物流网络下的单产品的多阶段随机库存问题。**

本例中也将整个销售阶段分为 4 个时期,且每个批发点同样只销售同一种产品。这里构建三阶段模型和四阶段模型,且每一期只考虑两种随机情景,而每期产品的市场不确定性同例 1 中的表 2 一致。四阶段模型第 1 期的订购约束为(80,90,100),第 2 期的订购约束为(90,100,110),第 3 期的订购约束为(95,105,110)。三阶段模型第 1 期的订购约束和四阶段模型一致,第 2 期的订购约束为(185,205,220)。第 2 期和第 3 期每条边的路况服从下列分布:

$$\begin{aligned} & \text{CON}_{l_{01}t}, \text{CON}_{l_{02}t}, \text{CON}_{l_{03}t} \sim U(0.5, 1); \\ & \text{CON}_{l_{14}t}, \text{CON}_{l_{24}t}, \text{CON}_{l_{34}t} \sim U(0.4, 0.8); \\ & \text{CON}_{l_{15}t}, \text{CON}_{l_{35}t} \sim U(0.6, 1.2); \\ & \text{CON}_{l_{16}t}, \text{CON}_{l_{26}t}, \text{CON}_{l_{36}t} \sim U(0.7, 1.4) (t=2,3). \end{aligned}$$

这里需要注意的是,将第 4 期的路况考虑为特殊情形(道路塌陷、大型车祸等),第 4 期路况分布如下:

$$\begin{aligned} & \text{CON}_{l_{01}4}, \text{CON}_{l_{02}4}, \text{CON}_{l_{03}4} \sim U(5, 10); \\ & \text{CON}_{l_{14}4}, \text{CON}_{l_{24}4}, \text{CON}_{l_{34}4} \sim U(4, 8); \\ & \text{CON}_{l_{15}4}, \text{CON}_{l_{25}4}, \text{CON}_{l_{35}4} \sim U(6, 12); \\ & \text{CON}_{l_{16}4}, \text{CON}_{l_{26}4}, \text{CON}_{l_{36}4} \sim U(7, 14). \end{aligned}$$

单位生产成本和单位库存成本的设置与例 1 相同,这里就不再一一列出。则三阶段模型的最终盈利为 3 999 万元,四阶段模型的最终盈利为 3 899.2 万元,此时三阶段模型的最终盈利情况要高于四阶段模型,且四阶段模型在第 3 期的订购决策为批发点 1,2,3 的产品订购量均为 0。

原本四阶段模型比三阶段模型拥有更大的决策空间,但是由于第 4 期物流网络中的路况极差,导致单位运输成本极速上升,使得批发点在第 3 期没有任何订购量。但是三阶段模型在第 2 期的订购量限制要高于四阶段模型,即三阶段模型可以在第 3 期存储更多的货物以便批发点在第 4 期进行售卖。以上说明了在某些特殊情形中,多阶段模型并不一定具有更大优势。

**4 总结**

本文在已有的库存问题研究的基础上,将物流网络中的运输问题引入到多阶段库存模型中,构建了一个物流网络下的多产品多阶段随机库存模型,并证明了在一定条件下随着阶段数的增加,模型的收益也会随之增加。

本文进一步运用 SDDP 算法对模型进行求解,并通过比较两阶段模型、三阶段模型和四阶段模型最终盈利情况,验证了随着阶段数的增加,模型收益也会逐渐增加的理论结果。本文还测试了该模型也能解决中等规模的问题。并且展示了在本文条件不满足的情况下,多阶段模型的收益未必会随着阶段数的增加而增加。本文中所构建的物流网络下的多产品多阶段随机库存模型可以在不确定的市场环境下,更好的对抗未来的风险,具有重要的现实意义。此外,在本文研究的基础上还可以继续讨论多产品多阶段的风险厌恶模型,以及如何更加有效的求解模型。

#### 参考文献:

- [1] DVORETZKY A, KIEFER J, WOLFOWITZ J. The inventory problem: ii. case of unknown distributions of demand [J]. *Econometrica*, 1952, 20(3): 450-466.
- [2] ABBOU R, LOISEAU J J, MOUSSAOUI C. Robust inventory control of production systems subject to uncertainties on demand and lead times [J]. *International Journal of Production Research*, 2017, 55(8): 2177-2196.
- [3] 高婷, 叶涛锋, 陈福明. 需求依赖库存时基于 CVaR 准则的报童模型 [J]. *中国管理科学*, 2016, 24: 602-608.  
GAO T, YE T F, CHEN F M. Newsboy model based on CVaR criterion when demand depends on inventory [J]. *China Management Science*, 2016, 24: 602-608.
- [4] KITAEVA A, LIVSHITS K, ULYANOVA E. The multi-product newsboy problem with price-depended demand and fastmoving items [J]. *Communications in Computer and Information Science*, 2017, 800: 297-311.
- [5] TORKAMAN S, GHOMI S M T F, KARIMI B. Multi-stage multi-product multi-period production planning with sequence-dependent setups in closed-loop supply chain [J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2017, 113: 602-613.
- [6] 陈杰, 陈志祥. 具有多元马氏需求的多产品多阶段库存优化模型 [J]. *中国管理科学*, 2015, 23(5): 151-160.  
CHEN J, CHEN Z X. Multi-product multi-stage inventory optimization model with multiple Markov requirements [J]. *China Management Science*, 2015, 23(5): 151-160.
- [7] POOYA A, PAKDAMAN M. A delayed optimal control model for multi-stage production-inventory system with production lead times [J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2018, 94: 751-761.
- [8] HU Z, HU G. A multi-stage stochastic programming for lot-sizing and scheduling under demand uncertainty [J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2018, 119: 157-166.
- [9] CHANG S C, CHANG C T. A multi-stage and multi-supplier inventory model allowing different order quantities [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, 52: 613-625.
- [10] KEIZER M D, AKKERMAN R, GRUNOW M, et al. Logistics network design for perishable products with heterogeneous quality decay [J]. *European Journal of Operational Research*, 2017, 262: 535-549.
- [11] CHEONG M L F, BHATNAGAR R, GRAVES S C. Logistics network design with supplier consolidation hubs and multiple shipment options [J]. *Journal of Industrial & Management Optimization*, 2007, 3(1): 51-69.
- [12] FATTAHI M, GOVINDAN K. Integrated forward/reverse logistics network design under uncertainty with pricing for collection of used products [J]. *Annals of Operations Research*, 2017, 253: 193-225.
- [13] BOZORGIRAD S, DESA M I, WIBOWO A. Genetic algorithm enhancement to solve multi source multi product flexible multistage logistics network [J]. *International Journal of Computer Science Issues*, 2012, 9(3): 157-164.
- [14] SHAPIRO A, DENTCHEVA D, RUSZCZYNSKI A. *Lectures on stochastic programming: modeling and theory* [M]. 2<sup>nd</sup> Edition. Philadelphia, USA: SIAM, 2014.
- [15] PEREIRA M V F, PINTO L M V G. Stochastic optimization of a multireservoir hydroelectric system: a decomposition approach [J]. *Water Resources Research*, 1985, 21(6): 779-792.
- [16] SHAPIRO A, TEKAYA W, da COSTA J P, et al. Risk neutral and risk averse stochastic dual dynamic programming method [J]. *European Journal of Operational Research*, 2013, 224: 375-391.
- [17] REBENNACK S. Combining sampling-based and scenario-based nested Benders decomposition methods: application to stochastic dual dynamic programming [J]. *Mathematical Programming*, 2016, 156: 343-389.
- [18] DUPAČOVÁ J, KOZMÍK V. SDDP for multistage stochastic programs: preprocessing via scenario reduction [J]. *Computational Management Science*, 2017, 14: 67-80.
- [19] BRANDI R B S, MARCATO A L M, DIAS B H, et al. A convergence criterion for stochastic dual dynamic programming: application to the long-term operation planning problem [J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2018, 33(4): 3678-3690.
- [20] PHILPOTT A B, MATOS V L D, KAPELEVICH L. Distributionally robust SDDP [J]. *Computational Management Science*, 2018, 15(3/4): 431-454.
- [21] KLEYWEGT A J, SHAPIRO A, HOMEM-DE-MELLO

T. The sample average approximation method for stochastic discrete optimization [J]. Siam Journal on Optimiza-

tion, 2002, 12(2): 479-502.

## Operations Research and Cybernetics

### Multi-Product Multi-Stage Stochastic Inventory Problem Under Logistics Network

LIU Fengnian<sup>1</sup>, FU Yongbin<sup>1</sup>, SUN Hailin<sup>2</sup>

(1. School of Economics and Management, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094;

2. School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

**Abstract:** [Purposes] The monopoly manufacturer with production, transportation and wholesale makes reasonable decisions, including production, sales, inventory and transportation for a variety of products under uncertain environment. [Methods] The prices and transport conditions of products transported in a complex logistics network are affected by the uncertainty of markets and road condition. With this background, a multi-product multi-stage stochastic inventory model under a logistics network is proposed and is solved by Stochastic Dual Dynamic Programming (SDDP) algorithm. [Findings] 1) Theoretical analysis proves that the more the number of stages of the multi-stage stochastic inventory model, the higher the return under certain conditions. 2) The results of numerical experiments show that the final return of the multi-stage stochastic inventory model will gradually increase with the increase of the number of stages under certain conditions. However, when the given conditions are not met, the multi-stage stochastic inventory model may not have advantages. [Conclusions] The multi-product multi-stage stochastic inventory model under the logistics network can confront future risks better under uncertain environment and has a profound and far reaching significance.

**Keywords:** multi-stage inventory problem; logistics network; SDDP; product pricing

(责任编辑 黄 颖)