DOI:10.11721/cqnuj20190512

一类 Van der Pol-Duffing 振子的隐藏吸引子*

聂家升，李庶民
(昆明理工大学 理学院，昆明 650500)

摘要:【目的】分析和研究 Van der Pol-Duffing 系统中的隐藏吸引子问题。【方法】根据 Routh-Hurwitz 判据，运用经典动力系统 Hopf 分支理论，利用谐波线性化方法和分析-数值方法，研究该系统中平衡点的稳定性以及隐藏吸引子的存在性。【结果】该系统存在隐藏吸引子，并且会出现隐藏吸引子分别与稳定的平衡点、稳定的周期轨、混沌吸引子共存的现象。【结论】该系统具有更为复杂的动力学行为，包括周期轨、混沌吸引子与隐藏吸引子。

关键词:隐藏吸引子;Hopf 分支;分析-数值方法;动力系统
中图分类号:O175.14　　　　**文献标志码:**A　　　　**文章编号:**1672-6693(2019)05-0098-08

众所周知，Lorenz 吸引子、Rossler 吸引子、Chen 吸引子与 Chua 吸引子等都是传统意义下的典型吸引子类型，但是文献[1-9]却发现了一类不同于这些传统吸引子的另外一种吸引子，即隐藏吸引子。这些吸引子的吸引域不包含平衡点的邻域，因此无法用传统的算法来寻找出这些隐藏吸引子。特别地，没有平衡点或者只有稳定平衡点的动力系统[10-12]中的混沌吸引子都是隐藏吸引子，但截止目前对这类问题的研究成果鲜有报道。

在 20 世纪 50 至 60 年代，广为人知的 Markus-Yamabe，Aizerman 和 Kalman 在关于绝对稳定性的研究时，在具有独特稳定平衡点的自动控制系统中发现了隐藏振动;1961 年 Gubar[13]在研究 Kapranov 的工作时利用解析方法揭示了二维系统中隐藏振动的存在性;2010 年，Leonov 和 Kuznetsov 首次在经典的 Chua 电路中发现了隐藏混沌吸引子，但是 1990 年 Chua 本人在分析 Chua 电路中吸引子的各种情况时并没有承认在电路中存在隐藏吸引子;2012 年，Leonov 等人在光滑的 Chua 系统中发现了隐藏吸引子，并总结出了一种发现和分析隐藏吸引子的新数值方法。

这种新数值方法，即分析-数值方法，主要思想是引入一个连续的函数序列$\{\varphi^j(x), j=0,\cdots,m\}$，通过把函数$\varphi^0(x)$进行多次迭代和逐步演化，得到周期解$x^j(t)$($x^j(t)$即为原系统的解)，或者在运算到某一步时，不稳定分支破坏周期解，从而产生隐藏吸引子。本文根据该方法研究非线性 Van der Pol-Duffing 振子模型的隐藏吸引子问题。

1 Van der Pol-Duffing 振子模型

2008 年 Matouk 等人[14]研究了一类电路系统

$$\begin{cases} c_1\dot{v}_1=-\left[bv_1^3+av_1+\dfrac{1}{R}(v_1-v_2)\right], \\ c_2\dot{v}_2=\dfrac{1}{R}(v_1-\alpha v_2)-i_L, \\ \dot{i}_L=\dfrac{v_2}{L}。\end{cases} \tag{1}$$

此系统称为自治的 Van der Pol-Duffing 振子[15-17]，这里 c_1，c_2 是电容，L 是电感，R 是线性电阻，并且 $\alpha=\dfrac{(R+R_p)}{R_p}$，其中 R_p 是 Van der Pol-Duffing 电路的并联电阻。

* 收稿日期:2018-12-28　　修回日期:2019-02-26　　网络出版时间:2019-09-26 11:24
资助项目:国家自然科学基金(No.11561034)
第一作者简介:聂家升，女，研究方向为动力系统，E-mail: jiayuannie@qq.com;通信作者:李庶民，男，副教授，E-mail: leesm007@163.com
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190926.1123.012.html

为了研究系统(1)的定性行为，将变量重新调整为：

$$x=\sqrt{bR}v_1,y=\sqrt{bR}v_2,z=\sqrt{bR^3}i_L,\mu=-(1+aR),\tau=\frac{t}{Rc_2},v=\frac{c_2}{c_1},\beta=\frac{c_2R^2}{L}。$$

将上述方程转化为无量纲形式：

$$\begin{cases}\dot{x}=-v(x^3-\mu x-y),\\ \dot{y}=x-\alpha y-z,\\ \dot{z}=\beta y。\end{cases}\tag{2}$$

Matouk 等人[14]利用 Hopf 理论以及数值方法研究了系统(2)的 Hopf 分支和混沌行为，他们的研究表明周期轨和混沌吸引子是由系统(2)中的一个平衡点分支出来的。

2014 年 Zhao 等人[15]研究了一类推广的自治 Van der Pol-Duffing 振子模型：

$$\begin{cases}\dot{x}=-v(x^3-\mu x-y),\\ \dot{y}=kx-\alpha y-hz,\\ \dot{z}=\beta y。\end{cases}\tag{3}$$

他们通过选取分支参数来研究系统(3)的 Hopf 分支，经过数值模拟发现了系统(3)具有更为复杂的动力学行为，包括周期轨、混沌吸引子与隐藏吸引子。

本文在 Leonov 和 Kuznetsov 工作的基础上，根据 Leonov 改进 Chua 系统的方法，以及 Zhao 对隐藏吸引子的研究，并在 Hu[18]对光滑 Chua 系统的反馈控制问题的基础上进行改动，考虑这样一个新的非线性 Van der Pol-Duffing 振子模型

$$\begin{cases}\dot{x}=\alpha(y-x+ax-x^2y-x^3),\\ \dot{y}=bx-cy+z,\\ \dot{z}=-\beta y。\end{cases}\tag{4}$$

其中 α,β,a,b,c 均为系统参数，且都大于 0。系统(4)是系统(2)的特例。本文将 α 作为分支参数来研究系统(4)的 Hopf 分支，并通过分析-数值方法进行模拟，发现系统(4)具有更为复杂的动力学行为，其中包括周期轨和隐藏吸引子。

本文首先讨论系统(4)的一些基本特性，并研究平衡点的稳定性，其次讨论在平衡点处的 Hopf 分支周期轨，然后根据系统(4)的隐藏吸引子的定位算法对隐藏吸引子进行定位，最后根据数值模拟找到隐藏吸引子。

2 基本特性与平衡点

首先，系统(4)在变换 $(x,y,z)\to(-x,-y,-z)$ 下是不变的，即系统(4)关于原点对称。

由于 $\alpha,\beta,a,b,c>0$，系统(4)有 3 个平衡点：$O(0,0,0)$，$P(\sqrt{a-1},0,-b\sqrt{a-1})$ 与 $Q(-\sqrt{a-1},0,b\sqrt{a-1})$，其中 $a>1$ 且 P,Q 关于原点对称。

下面来讨论平衡点 O,P,Q 的稳定性。

2.1 平衡点的稳定性

2.1.1 平衡点 O 的稳定性　平衡点 O 处的特征方程具有如下形式：

$$\lambda^3+[c-\alpha(a-1)]\lambda^2+[\beta-\alpha c(a-1)-\alpha b]\lambda-\alpha\beta(a-1)=0。\tag{5}$$

记 $p_1=c-\alpha(a-1),q_1=\beta-\alpha c(a-1)-\alpha b,r_1=-\alpha\beta(a-1)$，则(5)式可改写为：

$$\lambda^3+p_1\lambda^2+q_1\lambda+r_1=0。\tag{6}$$

同时，由韦达定理(5)式还可以改写为：

$$\lambda^3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)\lambda-\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0。\tag{7}$$

由(5)式和(7)式知 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\alpha\beta(a-1)>0$，则至少有一个正根，根据 Routh-Hurwitz 判据知，平衡点 O 不稳定。

2.1.2 平衡点 P,Q 的稳定性　由于平衡点 P,Q 关于原点对称，故在平衡点 P,Q 处有相同的特征方程：

$$\lambda^3+[c+2\alpha(a-1)]\lambda^2+[\beta+2\alpha c(a-1)-\alpha b(2-a)]\lambda+2\alpha\beta(a-1)=0。\tag{8}$$

记 $p_2=c+2\alpha(a-1),q_2=\beta+2\alpha c(a-1)-\alpha b(2-a),r_2=2\alpha\beta(a-1)$，则(8)式可改为：

$$\lambda^3+p_2\lambda^2+q_2\lambda+r_2=0。\tag{9}$$

由(7)式和(8)式知 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2\alpha\beta(a-1)<0$，于是方程(9)至少有一个负根，并且 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-[c+2\alpha(a-1)]<0$。

根据 Routh-Hurwitz 判据,可以得到如下结论。

引理 1 由于 α,β,a,b,c 均为正的且 $a>1$,则 p_2,q_2,r_2 均大于 0,由 Routh-Hurwitz 判据可知,特征方程(8)的根具有负实部。

由引理 1 可得如下定理。

定理 1 若特征方程(8)的根具有负实部,则系统(4)的平衡点 P,Q 渐进稳定。

引理 2 若特征方程(8)有一个负实根 $\lambda_1=-[c+2\alpha(a-1)]$ 和一对共轭纯虚根 $\lambda_{2,3}=\pm \mathrm{i}\omega(\omega>0)$,则系统(4)出现 Hopf 分支。

2.2 Hopf 分支

由于平衡点 O 是不稳定的,所以只须讨论平衡点 P,Q 处的 Hopf 分支周期轨。由于方程(8)至少有一个负实根,不妨将它设为 $-[c+2\alpha(a-1)]$,并且有一对纯虚根 $\pm \mathrm{i}\omega(\omega>0)$。将 $\lambda=\mathrm{i}\omega$ 代入(8)式,并分离出实部和虚部,则:

$$-\omega^3\mathrm{i}-[c+2\alpha(a-1)]\omega^2+[\beta+2\alpha c(a-1)-\alpha b(2-a)]\omega\mathrm{i}+2\alpha\beta(a-1)=0。\tag{10}$$

则 ω 满足:

$$\begin{cases}-[c+2\alpha(a-1)]\omega^2+2\alpha\beta(a-1)=0,\\ -\omega^3+[\beta+2\alpha c(a-1)-\alpha b(2-a)]\omega=0。\end{cases}\tag{11}$$

将 α 作为分支参数,则分支临界点 α_c 满足以下方程:

$$2(a-1)[2c(a-1)-b(2-a)]\alpha^2+c[2c(a-1)-b(2-a)]\alpha+\beta c=0。\tag{12}$$

注意到 $\alpha>0$ 且 $a>1$,利用韦达定理,则有以下结论成立:

i) 若 $2c(a-1)\geqslant b(2-a)$,方程(12)无正根;

ii) 若 $2c(a-1)<b(2-a)$,方程(12)仅有唯一正根:

$$\alpha_c=\frac{-c[2c(a-1)-b(2-a)]-\sqrt{\Lambda}}{4(a-1)[2c(a-1)-b(2-a)]},\tag{13}$$

其中 $\omega=\sqrt{\dfrac{2\alpha_c\beta(a-1)}{c+2\alpha_c(a-1)}}$,$\Lambda=c^2[2c(a-1)-b(2-a)]^2-8(a-1)\beta c[2c(a-1)-b(2-a)]$。

若 $2c(a-1)<b(2-a)$ 成立,当 $\alpha=\alpha_c$ 时,方程(8)有一对纯虚根 $\pm\mathrm{i}\omega$,利用隐函数求导公式由方程(8)可得:

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\alpha}=-\frac{2(a-1)\lambda^2+[2c(a-1)-b(2-a)]\lambda+2\beta(a-1)}{3\lambda^2+2[c+2\alpha(a-1)]\lambda+[\beta+2\alpha c(a-1)-\alpha b(2-a)]}。\tag{14}$$

将 α_c 代入方程(14)并注意到 $\lambda(\alpha_c)=\mathrm{i}\omega$,且由(11)式可得:

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{Re}\lambda(\alpha_c))}{\mathrm{d}\alpha}=-\frac{2(a-1)(\omega^2-\beta)\omega^2+[c+2\alpha_c(a-1)][2c(a-1)-b(2-a)]\omega^2}{2\omega^4+2[c+2\alpha_c(a-1)]^2\omega^2}。$$

已知 $a>1$,且由(11)式的第一个方程可得 $\omega^2=\dfrac{2\alpha_c\beta(a-1)}{c+2\alpha_c(a-1)}<\dfrac{\beta c+2\alpha_c\beta(a-1)}{c+2\alpha_c(a-1)}=\beta$。易知 $\omega^2-\beta<0$,因此若 $2c(a-1)<b(2-a)$,有 $\dfrac{\mathrm{d}(\mathrm{Re}\lambda(\alpha_c))}{\mathrm{d}\alpha}>0$。

于是有以下结论。

定理 2 若 $2c(a-1)<b(2-a)$ 且 α_c 由(13)式所定义,则当 α 经过临界值 α_c 时,系统(4)在平衡点 P,Q 处出现 Hopf 分支。

3 隐藏吸引子的定位算法

本节运用文献[2,5-7]中的方法,提出了在系统(4)中定位隐藏吸引子的算法。首先,采用分析-数值方法的思想来定位隐藏吸引子。

考虑如下动力系统:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\psi(\boldsymbol{x}),\tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 为 $n\times n$ 常数矩阵,$\psi(\boldsymbol{x})$ 为一个连续的向量函数,且 $\psi(0)=0$。

为了寻找接近谐波振动的周期解,定义矩阵 $\boldsymbol{K}$,使其满足:

$$\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{K}, \tag{16}$$

有一对纯虚根$\pm \mathrm{i}\omega_0(\omega_0>0)$，并且其余特征根均有负实部，则系统(15)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{x}+\varphi(\boldsymbol{x}), \tag{17}$$

其中 $\varphi(\boldsymbol{x})=\psi(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$。

引入一个连续的函数序列 $\varphi^0(\boldsymbol{x}),\varphi^1(\boldsymbol{x}),\cdots,\varphi^m(\boldsymbol{x})$，使得每两个相邻的函数 φ^j 与 φ^{j+1} 都具有轻微的差别，这里函数 $\varphi^0(\boldsymbol{x})$的值很小，且 $\varphi^m(\boldsymbol{x})=\varphi(\boldsymbol{x})$。基于函数 $\varphi^0(\boldsymbol{x})$的值很小这一特征，采用谐波线性化方法(即描述函数法)，将系统(17)转化为：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{x}+\varphi^0(\boldsymbol{x}), \tag{18}$$

从而确定一个稳定的非平凡周期解 $\boldsymbol{x}^0(t)$。对于初始系统(15)吸引子的定位问题，随着 j 的增加，将对该周期解进行数值计算。这时将出现两种情形：

情形 1：稳定周期解 $\boldsymbol{x}^0(t)$上的点位于下面系统的稳定周期解的吸引域上

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{x}+\varphi^j(\boldsymbol{x}), \tag{19}$$

其中 $j=1$。

情形 2：当 $j=1$，系统(18)过渡到系统(19)时，不稳定的分支会破坏周期解。

在第 1 种情形下，将 $\boldsymbol{x}^0(0)$看作初始值，可以运用数值方法找到 $j=1$ 时系统(19)的稳定周期解 $\boldsymbol{x}^1(t)$，这里要保证计算区间$[0,T]$充分大。然后可以考虑 $j=2$ 时系统(19)的周期解，将 $\boldsymbol{x}^2(0)=\boldsymbol{x}^1(T)$作为初始值，并经过一段充分长的运算时间 t 后，可以得到周期解 $\boldsymbol{x}^2(t)$。

继续以上的运算步骤，将 $\boldsymbol{x}^j(0)=\boldsymbol{x}^{j-1}(T)$作为初始值，可以找到 $j=m$ 时系统(19)(即原系统(17))的周期解 $\boldsymbol{x}^j(t)$。或者在运行到某一步时出现第 2 种情形，不稳定的分支破坏周期解。

为了确定初始周期解的初始值 $\boldsymbol{x}^0(0)$，通过非退化线性变换 $\boldsymbol{S}$，将带有非线性 $\varphi^0(\boldsymbol{x})$的系统(18)变换为如下形式：

$$\begin{cases}\dot{y}_1=-\omega_0 y_2+\varepsilon\varphi_1(y_1,y_2,\boldsymbol{y}_3),\\ \dot{y}_2=\omega_0 y_1+\varepsilon\varphi_2(y_1,y_2,\boldsymbol{y}_3),\\ \dot{\boldsymbol{y}}_3=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_3+\varepsilon\varphi_3(y_1,y_2,\boldsymbol{y}_3)。\end{cases} \tag{20}$$

这里 y_1,y_2 是标量，$\boldsymbol{y}_3$ 是$(n-2)$维向量；φ_1,φ_2 是标量函数，φ_3 是$(n-2)$维向量函数；$\boldsymbol{A}$ 是$(n-2)\times(n-2)$常数矩阵，所有特征值都具有负实部。不失一般性，假设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 存在一个正数 $s>0$，使得：

$$\boldsymbol{y}_3^*(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{y}_3\leqslant -2s|\boldsymbol{y}_3|^2,\ \forall\, \boldsymbol{y}_3\in\boldsymbol{R}^{n-2}。$$

找到一个 a_0 由下面描述函数所确定：

$$\Phi(a)=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}}[\varphi_1((\cos\omega_0 t)a,(\sin\omega_0 t)a,0)\cos\omega_0 t+\varphi_2((\cos\omega_0 t)a,(\sin\omega_0 t)a,0)\sin\omega_0 t]\mathrm{d}t。 \tag{21}$$

定理 3　如果可以找到一个正数 a_0 满足 $\Phi(a_0)=0$，$\frac{\mathrm{d}\Phi(a)}{\mathrm{d}a}\big|_{a=a_0}\neq 0$。则对于充分小的 ε 存在周期解 $\boldsymbol{x}^0(t)$，其初始值满足 $\boldsymbol{x}^0(0)=\boldsymbol{S}(y_1(0),y_2(0),\boldsymbol{y}_3(0))^*$，其中 $y_1(0)=a_0+O(\varepsilon)$，$y_2(0)=0$，$\boldsymbol{y}_3(0)=\boldsymbol{O}_{n-2}(\varepsilon)$，这里 $\boldsymbol{O}_{n-2}(\varepsilon)$ 是$(n-2)$维向量，并且 $\boldsymbol{O}_{n-2}(\varepsilon)=(O(\varepsilon),\cdots,O(\varepsilon))^{\mathrm{T}}$。

下面运用上述思想，给出定位系统(4)的隐藏吸引子的算法。首先将系统(4)改写为一个 Lur'e 系统：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}\psi(\boldsymbol{r}^*\boldsymbol{x}), \tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3$，且 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\alpha(a-1) & \alpha & 0\\ b & -c & 1\\ 0 & -\beta & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}-\alpha\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\psi(x,y,z)=x^2y+x^3$。

考虑谐波线性化系数 k 和一个小参数 ε，将系统(22)改写为如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}\varepsilon\varphi(\boldsymbol{r}^*\boldsymbol{x}), \tag{23}$$

其中 $\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{P}+k\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}^*=\begin{pmatrix}\alpha(a-1-k) & \alpha & 0\\ b & -c & 1\\ 0 & -\beta & 0\end{pmatrix}$, $\varphi(\sigma)=\psi(\sigma)-k\sigma$,且满足 $\lambda_{1,2}^{P_0}=\pm\mathrm{i}\omega_0$, $\lambda_3^{P_0}=-d<0$。

运用非退化线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{y}$,将系统(23)转化为如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}\varepsilon\varphi(\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{y}), \tag{24}$$

其中 $\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}0 & -\omega_0 & 0\\ \omega_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -d\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -h\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{r}^*\boldsymbol{S}$。

这里系统(24)的变换函数 $W_{\boldsymbol{H}}(p)$ 可以表示为 $W_{\boldsymbol{H}}(p)=\dfrac{-b_1p+b_2\omega_0}{p^2+\omega_0^2}+\dfrac{h}{p+d}$。

进一步,由系统(23)与系统(24)的等价性,可得 $W_{\boldsymbol{H}}(p)=\boldsymbol{r}^*(\boldsymbol{P}_0-p\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{q}$。其中 p 为复变量,初始频率 ω_0 由方程 $\mathrm{Im}W_{\boldsymbol{H}}(\mathrm{i}\omega_0)=0$ 所确定,谐波线性化系数 k 由 $k=-(\mathrm{Re}W_{\boldsymbol{H}}(\mathrm{i}\omega_0))^{-1}$ 所确定[2,7]。经过计算可得:$k=\dfrac{-\omega_0^2+\beta-\alpha c(a-1)-\alpha b}{\alpha c}$, $u=\dfrac{\omega_0^2-\beta+\alpha b+c^2}{c}$, $h=\dfrac{\alpha\beta-\alpha cd+\alpha d^2}{\omega_0^2+d^2}$, $b_1=\dfrac{\alpha\beta-\alpha cd-\alpha\omega_0^2}{\omega_0^2+d^2}$, $b_2=\dfrac{\alpha d(\beta-\omega_0^2)}{\omega_0(\omega_0^2+d^2)}$。

由于系统(24)是由系统(23)经过非退化线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{y}$ 得到的,因此矩阵 $\boldsymbol{S}$ 满足以下关系:

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{S},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{r}^*\boldsymbol{S}。\tag{25}$$

求解上述矩阵可得 $\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}s_{11} & s_{12} & s_{13}\\ s_{21} & s_{22} & s_{23}\\ s_{31} & s_{32} & s_{33}\end{pmatrix}$,其中:

$$s_{11}=1,\ s_{12}=0,\ s_{13}=-h,$$

$$s_{21}=a-1-k,\ s_{22}=-\frac{\omega_0}{\alpha},\ s_{23}=\frac{h[d+\alpha(a-1-k)]}{\alpha},$$

$$s_{31}=\frac{\alpha[c(a-1-k)-b]-\omega_0^2}{\alpha},\ s_{32}=-\frac{\omega_0[\alpha(a-1-k)+c]}{\alpha},\ s_{33}=\frac{h[d+\alpha(a-1-k)](\alpha c-d)+\alpha bh}{\alpha}。$$

对于充分小的 ε,可以得到以下初始值:

$$\boldsymbol{y}(0)=\begin{pmatrix}y_1(0)\\ y_2(0)\\ y_3(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}。\tag{26}$$

该初始值为定位隐藏吸引子算法的第一个步骤的初始值。由(26)式可以得到系统(23)与系统(24)之间的关系式为:

$$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{S}\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{S}\begin{pmatrix}a_0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0s_{11}\\ a_0s_{21}\\ a_0s_{31}\end{pmatrix}。\tag{27}$$

回到初始系统(4),获得以下用于定义初始数据的公式:

$$\begin{cases}x(0)=a_0s_{11}=a_0,\\ y(0)=a_0s_{21}=a_0(a-1-k),\\ z(0)=a_0s_{31}=a_0\ \dfrac{\alpha[c(a-1-k)-b]-\omega_0^2}{\alpha}。\end{cases}\tag{28}$$

其中 a_0 由描述函数所确定,并且满足定理3中的条件。

4 数值模拟

本节取 $a=1.05$,$b=1.25$,$c=3.05$,$\beta=200$,进行数值模拟。

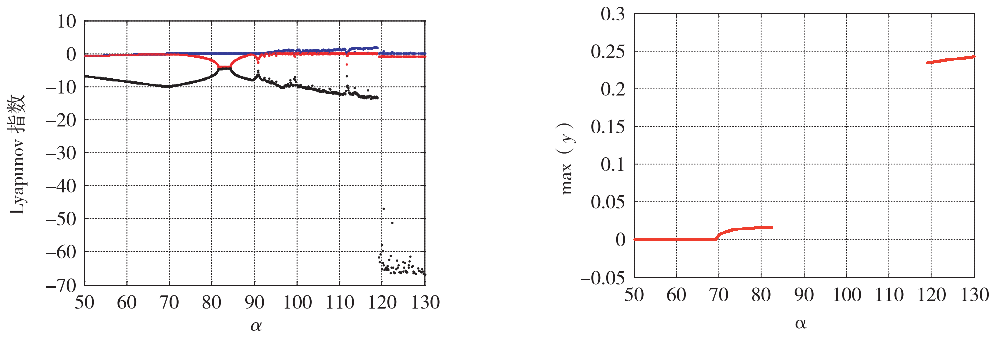
4.1 由不稳定的平衡点分支出的吸引子

由上述参数得到系统(4)的3个平衡点分别为:$O(0,0,0)$,$P(0.1\sqrt{5},0,-0.125\sqrt{5})$与 $Q(-0.1\sqrt{5},0,$

$0.125\sqrt{5}$)。由第 3 节的讨论可知平衡点 O 是不稳定的。对于平衡点 P,Q,它们在临界值 α_c 处经历 Hopf 分支。经过计算可得当 $2c(a-1)=0.305<b(2-a)=1.187\ 5$ 时,系统(4)有唯一正根,进一步计算得临界值 $\alpha_c=69.276\ 6$。即当 $\alpha\in(0,\alpha_c)$时,平衡点 P,Q 都是稳定的,而当 $\alpha>\alpha_c$ 时,平衡点 P,Q 都是不稳定的。并且当 $\alpha>\alpha_c$ 时,系统(4)具有更复杂的动力学行为。

图 1a 为系统(4)关于参数 α 的 Lyapunov 指数谱图,图 1b 为系统(4)关于参数 α 与变量 y 的分支图。由图 1a 可以看出,当 $\alpha\in[50,69.276\ 6)$时,最大 Lyapunov 指数均小于 0,并且由图 1b 可见平衡点 P,Q 在 $\alpha\in[50,69.276\ 6)$时是稳定的,此时没有周期轨分支出来。

由图 1a 可以看出,当 $\alpha\in(69.276\ 6,70)$时,最大 Lyapunov 指数恒为 0,说明系统(4)有周期解。并且由图 1b 可见当 α 经过临界点 $\alpha_c=69.276\ 6$ 时,在平衡点 P,Q 处分支出周期解。当 $\alpha\in(70,130]$时,最大 Lyapunov 指数均大于 0,说明随着 α 的增加系统(4)由倍周期分支变为混沌(见图 1b)。



a　Lyapunov 指数谱　　　　b　关于变量 y 的分支图

注:初值为(0.001,0,0.001),$\alpha\in[50,130]$,$\beta=200$,$a=1.05$。

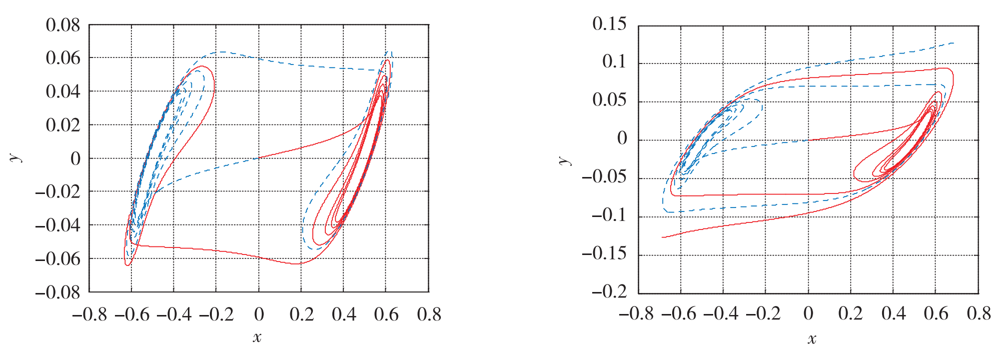
图 1　系统(4)关于参数 α 的 Lyapunov 指数谱与分支图

Fig. 1　Lyapunov exponential spectrum and bifurcation diagram about parameter α of system (4)

注　本节中的吸引子都是由不稳定的平衡点分支出来的,因此可以在平衡点的某个邻域内取合适点作为初始值,通过数值计算就可以找到这些吸引子。

4.2 隐藏吸引子

通过在平衡点 P,Q 的某个邻域内取任一点作为初始值,通过数值计算就可以找到吸引子,这些吸引子都是经典的类型。将采用本文第 3 节中的算法来确定一个初始值,通过数值模拟得到图 2 的结果,结果表明从这些初始值出发,得到的轨线不会进入平衡点 O 或 P,Q,也不会进入由平衡点 P,Q 分支出来的吸引子。也就是说这些初始值不是平衡点 P,Q 邻域内不稳定流形上的点,所以由这些初始值出发所得到的吸引子即为隐藏吸引子。



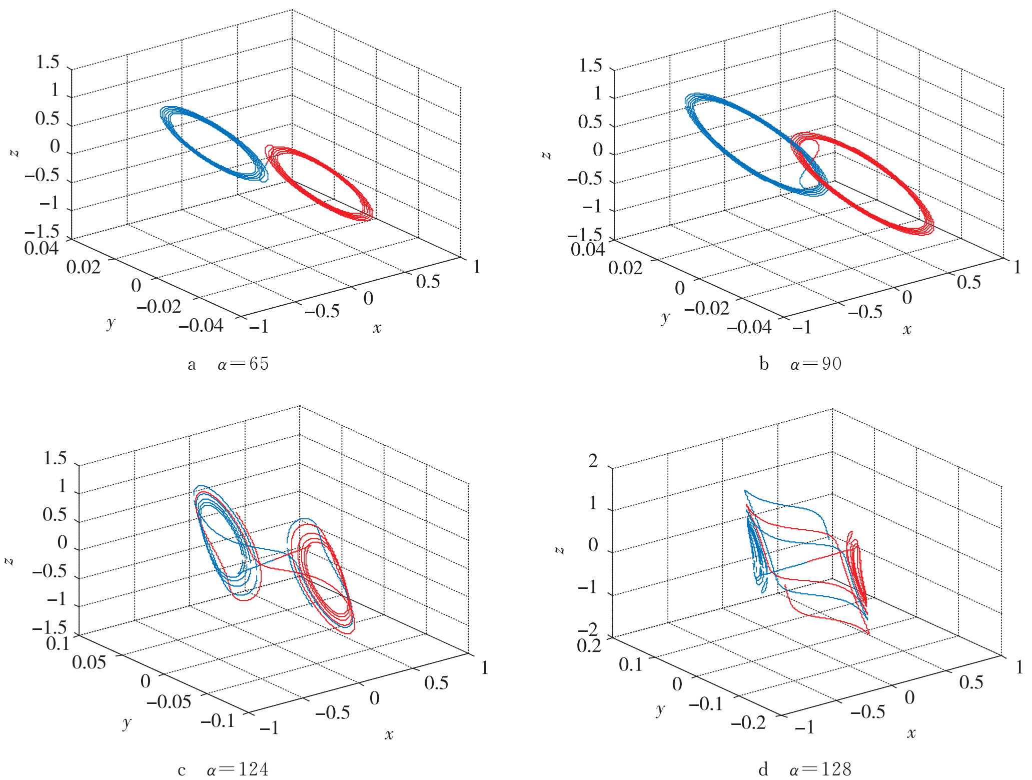
a　$\alpha=124$　　　　b　$\alpha=128$

注:初始值为(0.001,0,−0.001)(红色),(−0.001,0,0.001)(蓝色);$\beta=200$,$a=1.05$。

图 2　系统(4)的隐藏吸引子在(x,y)平面上的投影

Fig. 2　Projections of hidden attractors of system (4) on the plane (x,y)

图 2a 与图 2b 分别表示当 $\alpha=124$ 与 $\alpha=128$ 时,由上述初始值出发得到的隐藏吸引子在(x,y)平面上的投影。并且由图 1a 可以看出当 $\alpha=124$ 与 $\alpha=128$ 时,出现了混沌行为。



注:初始值为(0.001,0,−0.001)(红色),(−0.001,0,0.001)(蓝色)。

图3 系统(4)在 $\beta=200$,$a=1.05$ 时的相图

Fig. 3 Phase graphs of system (4) with $\beta=200$,$a=1.05$

图3a~d表示当 α 取不同值时,隐藏吸引子展现出的各种情形。图3a表示当 $\alpha=65$ 时,平衡点 P,Q 稳定并且隐藏吸引子围绕着平衡点 P,Q;图3b表示当 $\alpha=90$ 时,平衡点 P,Q 不稳定,并且隐藏吸引子围绕着由平衡点 P,Q 分别分支出的周期轨;图3c~d表示当 $\alpha=124,128$ 时,不稳定的平衡点 P,Q 周围出现混沌吸引子,并且隐藏吸引子围绕着这些混沌吸引子。

根据上述的数值结果,并通过数值模拟,可以发现并找到隐藏吸引子。

5 结论

本文研究了一类 Van der Pol-Duffing 振子模型的隐藏吸引子,并利用分析-数值方法对系统中存在的隐藏吸引子进行定位。根据 Lyapunov 指数谱与分支图,可以看出系统中不稳定的平衡点导致了周期振动和混沌振动行为的出现。数值结果表明,该系统中存在隐藏吸引子。

参考文献:

[1] LEONOV G A,KUZNETSOV N V. Hidden attractors in dynamical systems:from hidden oscillations in Hilbert-Kolmogorov,Aizerman,and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos,2012,23(1):187-219.

[2] LEONOV G A,KUZNETSOV N V,VAGAITSEV V I. Localization of hidden Chua's attractors[J]. Physics Letters A,2011,375(23):2230-2233.

[3] LEONOV G A,KUZNETSOV N V,KUZNETSOVA O A,et al. Hidden oscillations in dynamical systems[J]. Wseas Transactions on Systems & Control,2011,6(2):54-67.

[4] LEONOV G A,KUZNETSOV N V,VAGAITSEV V I. Hidden attractor in smooth Chua systems[J]. Physica D:Nonlinear Phenomena,2012,241(18):1482-1486.

[5] BRAGIN V O,VAGAITSEV V I,KUZNETSOV N V,et al. Algorithms for finding hidden oscillations in nonlinear systems. the Aizerman and Kalman conjectures and Chua's circuits[J]. Journal of Computer & Systems Sciences International,2011,50(4):511-543.

[6] KUZNETSOV N V,LEONOV G A,VAGAITSEV V I. Analytical-numerical method for attractor localization of generalized Chua's system[J]. IFAC Proceedings Volumes,2010,43(11):29-33.

[7] LEONOV G A, KUZNETSOV N V. Analytical-numerical methods for investigation of hidden oscillations in nonlinear control systems[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2011, 44(1): 2494-2505.

[8] JAFARI S, SPROTT J C, NAZARIMEHR F. Recent new examples of hidden attractors[J]. European Physical Journal Special Topics, 2015: 1469-1476.

[9] VAGAITSEV V I, KUZNETSOV N V, LEONOV G A. Localization of hidden attractors of the generalized Chua system based on the method of harmonic balance[J]. Vestnik St. Petersburg University: Mathematics, 2010, 43(4): 242-255.

[10] JAFARI S, SPROTT J C. Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria[J]. Physics Letters Section A General Atomic & Solid State Physics, 2013, 377(9): 699-702.

[11] WEI Z, YANG Q. Dynamical analysis of the generalized Sprott C system with only two stable equilibria[J]. Nonlinear Dynamics, 2011, 68(4): 543-554.

[12] JAFARI S, SPROTT J C. Simple chaotic flows with a line equilibrium[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2013, 57(4): 79-84.

[13] GUBAR N A. Investigation of a piecewise linear dynamical system with three parameters[J]. Journal of Applied Mathematics & Mechanics, 1961, 25(6): 1519-1535.

[14] MATOUK A E, AGIZA H N. Bifurcations, chaos and synchronization in ADVP circuit with parallel resistor[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2008, 341(1): 259-269.

[15] ZHAO H T, LIN Y P, DAI Y X. Hidden attractors and dynamics of a general autonomous Van der Pol-Duffing oscillator[J]. International Journal of Bifurcation & Chaos, 2014, 24(6): 1450080.

[16] EL-SAYED A M A, ELSAID A, NOUR H M, et al. Dynamical behavior, chaos control and synchronization of a memristor-based ADVP circuit[J]. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2013, 18(1): 148-170.

[17] VINCENT U E, NBENDJO B R N, AJAYI A A, et al. Hyperchaos and bifurcations in a driven Van der Pol-Duffing oscillator circuit[J]. International Journal of Dynamics & Control, 2015, 3(4): 363-370.

[18] 胡杨慧. 一个光滑 Chua 系统的反馈混沌控制[J]. 科技信息, 2013(17): 101-102.
HU Y H. Feedback chaos control of a smooth Chua's system[J]. Scientific Information, 2013(17): 101-102.

Hidden Attractors of a Class of Van der Pol-Duffing Oscillator

NIE Jiasheng, LI Shumin

(College of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)

Abstract: [**Purposes**]In order to analyze and study the problem of hidden attractors in Van der Pol-Duffing system, some new research results are obtained. [**Methods**] According to the Routh-Hurwitz criterion, using the Hopf bifurcation theory of the classical dynamic system, the harmonic linearization method and the analytical-numerical method are used to study the stability of the equilibrium points and the existence of hidden attractors in the system. [**Findings**] There are hidden attractors in the system, and there are phenomena in which hidden attractors coexist with stable equilibrium points, stable periodic orbits, and chaotic attractors. [**Conclusions**] It is concluded that the system has more complex dynamic behaviors, including periodic orbits, chaotic attractors and hidden attractors.

Keywords: hidden attractors; Hopf bifurcation; analytical-numerical methods; dynamic system

(责任编辑 许 甲)