2019 年 11 月　　重庆师范大学学报(自然科学版)　　Nov. 2019
第 36 卷 第 6 期　　Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)　　Vol. 36 No. 6

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20190613

α-半预不变凸型及其应用研究*

李　婷[1]，彭再云[2]，邵重阳[2]，王泾晶[2]
(1. 山西大学 商务学院，太原 030031；2. 重庆交通大学 数学与统计学院，重庆 400074)

摘要:【目的】提出并研究了一类新的广义凸型函数即 α-半预不变凸型函数。【方法】理论推导并举例进行验证。【结果】首先举例说明了 α-半预不变凸型函数的存在性及其与半预不变凸型函数、α-预不变凸型函数之间的关系;然后获得了 α-半预不变凸型函数的一些性质;最后给出了 α-半预不变凸函数分别在无约束及带不等式约束的非线性规划问题中的应用，并给出实例验证了所得结论的正确性。【结论】这些结果在一定程度上丰富了对广义凸函数的研究。

关键词:α-半不变凸集;α-半预不变凸函数;非线性规划;可行集;最优解集

中图分类号:O224　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2019)06-0001-07

众所周知,凸性与广义凸性是数学规划研究领域里的一个重要研究分支,在最优化理论及应用研究中起到了非常重要的作用。近些年来,一些学者相继提出了不变凸型函数、预不变凸型函数、半预不变凸型函数、α-预不变凸型函数等,并研究了这些广义凸型(类)函数的一些重要性质及它们在非线性规划问题中的一些应用[1-9]。

受文献[5-7,9]的启发,本文提出了一类新的广义凸型函数即 α-半预不变凸型函数。首先,给出 α-半预不变凸型函数的定义,举例说明该类型函数的存在性及它们与半预不变凸型函数、α-预不变凸型函数之间的关系;然后,获得了 α-半预不变凸型函数的一些性质;最后给出了 α-半预不变凸函数分别在无约束及带不等式约束的非线性规划问题中的应用,并给出例子对所得结论的正确性进行了验证。

1 基本概念

假设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中的非空子集,$f:K\to\mathbf{R}$ 和 $\alpha:K\times K\to\mathbf{R}\backslash\{0\}$是两个实值函数,$\eta:K\times K\to\mathbf{R}^n$ 是向量值函数。

下面先回顾一些相关定义。

定义 1[5]　如果对于 $\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$,有 $\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in K$,则称 K 为关于 η 和 α 的 α-不变凸集。

定义 2[5]　设 K 为关于 η 和 α 的 α-不变凸集,$f:K\to\mathbf{R}$ 是实值函数,如果对 $\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$ $\forall\lambda\in[0,1]$,有:

$$f(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y}),$$

则称 f 是 K 上关于 η 和 α 的 α-预不变凸函数。

以下定义中,$\eta:K\times K\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 是向量值函数。

定义 3[6]　如果存在一个非零向量映射 $\eta:K\times K\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$,使得对 $\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$,有 $\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in K$ 成立,则称 K 为关于 η 的半连通集。

定义 4[6]　设 K 是关于 η 的半连通集,$f:K\to\mathbf{R}$ 是实值函数。如果对 $\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$,满足 $\lim\limits_{\lambda\to0}\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)=0$,且 $f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})$,则称 f 是 K 上关于 η 的半预不变凸函数。

下面将给出 α-半不变凸集、α-半预不变凸型函数的概念。

定义 5　如果对于 $\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$,有 $\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in K$,则称 K 为关于 η 和 α 的 α-半不变凸集。

* 收稿日期:2019-03-26　修回日期:2019-10-26　网络出版时间:2019-11-25 10:34

资助项目:国家自然科学基金(No. 11301571);重庆市基础与前沿研究项目(No. cstc2018jcyjAX0337);重庆市巴渝学者计划项目、重庆市高校科研创新团队项目(No. CXTDX201601022);重庆交通大学创新项目(No. 2019S0123)

第一作者简介:李婷,女,副教授,研究方向为最优化理论与应用,E-mail: liting99999@126.com;通信作者:彭再云,男,教授,博士,E-mail: pengzaiyun@126.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20191125.1034.018.html

下面举例说明α-半不变凸集是存在的。

例1　设$K=(-\infty,+\infty)$,$\forall x,y\in K$,令$\alpha(x,y)=\frac{y}{2}$,$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}\lambda x-y,x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ \lambda x-y,x<0,y<0\\ -y,x\geqslant 0,y<0\\ -y,x<0,y\geqslant 0\end{cases}$,容易验证$K$是关于$\eta$和$\alpha$的$\alpha$-半不变凸集。

定义6　设K是关于η和α的α-半不变凸集,$f:K\to\mathbf{R}$是实值函数。如果对$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$\forall\lambda\in[0,1]$,满足$\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)=0$,且$f(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})$,则称$f$是$K$上关于$\eta$和$\alpha$的$\alpha$-半预不变凸函数。

注1　由定义4和定义6可以看出,当$\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=1$时,$\alpha$-半预不变凸函数是关于同一$\eta$的半预不变凸函数。

注2　由定义2和定义6可以看出,当$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)=\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$时,$\alpha$-半预不变凸函数是关于同一$\alpha$和$\eta$的$\alpha$-预不变凸函数。

注3　α-半预不变凸型函数是普遍存在的,且α-半预不变凸型函数是不同于半预不变凸型函数和α-预不变凸型函数的一类新的函数,下面通过例2和例3进行说明。

例2　令$K=[0,2]$,$f(x)=\arctan x$,其中$\alpha(x,y)=x-y$,$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}x-y-\lambda,x\leqslant y,\lambda=0\\ \frac{1}{\lambda},x\leqslant y,\lambda\in(0,1]\\ \lambda(x+y),x>y,\lambda=0\\ 0,x>y,\lambda\in(0,1]\end{cases}$,则容易验证$f$是$K$上的$\alpha$-半预不变凸函数,即$\alpha$-半预不变凸函数是存在的。

分析　对$\forall x,y\in K$,$\forall\lambda\in[0,1]$,有以下几种情况:

1)当$x\leqslant y,\lambda=0$时,有:

$$y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)=y\in K,f[y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)]=f(y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y);$$

2)当$x\leqslant y,\lambda\in(0,1]$时,有:

$$y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)=y+\lambda(x-y)\frac{1}{\lambda}=x\in K,$$

$$f[y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)]=f(x)=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(x)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y);$$

3)当$x\geqslant y,\lambda=0$时,有:

$$y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)=y\in K,f[y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)]=f(y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y);$$

4)当$x>y,\lambda\in(0,1]$时,有:

$$y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)=y\in K,$$

$$f[y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)]=f(y)=\lambda f(y)+(1-\lambda)f(y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)。$$

综上可知,f是K上关于η和α的α-半预不变凸函数。

但是,当$x=\frac{\sqrt{3}}{3},y=\sqrt{3},\lambda=\frac{1}{2}$时,有:

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))=f(\sqrt{3}+1)=\arctan(\sqrt{3}+1)>\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)=\frac{\pi}{4}=\arctan 1,$$

即f不是K上关于η的半预不变凸函数。

例3　令$K=(-\infty,+\infty)$,$f(x)=2x-1$,其中:

$$\alpha(x,y)=\begin{cases}1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ 1,x<0,y<0\\ y,x>0,y<0\\ -1,x<0,y>0\end{cases},\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}x-y-\lambda,x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ x-y,x<0,y<0\\ 0,x>0,y<0\\ y-x,x<0,y<0\end{cases},$$

则容易验证 K 是关于 η 和 α 的 α-半不变凸集,且 f 是 K 上关于 η 和 α 的 α-半预不变凸函数,但 f 不是 K 上关于同一 α 和 $\eta^*(x,y)=0$ 的 α-预不变凸函数。事实上,当 $x=1,y=3,\lambda=\frac{1}{2}$ 时,显然有:

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))=f(3)=5>\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)=4。$$

2 α-半预不变凸函数的性质

本节将讨论 α-半预不变凸函数的几个性质。

定理 1　设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α-半不变凸集,

1) 假设 $f,g:K\to\mathbf{R}$ 是 K 上关于同一 η 和 α 的 α-半预不变凸型函数,则 $f+g$ 也是 K 上关于同一 η 和 α 的 α-半预不变凸型函数。

2) 假设 $f:K\to\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α-半预不变凸型函数,m 是一个常数,则 $f+m$ 也是 K 上关于同一 η 和 α 的 α-半预不变凸型函数。

3) 假设 $f:K\to\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α-半预不变凸型函数,$k>0$,则 kf 也是 K 上关于同一 η 和 α 的 α-半预不变凸型函数。

证明　1) 因为 $f,g:K\to\mathbf{R}$ 是 K 上关于同一 η 和 α 的 α-半预不变凸函数,则对 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\lambda\in[0,1]$,有:

$$f(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y}),$$

$$g(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\leqslant\lambda g(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)g(\boldsymbol{y}),$$

以上两式相加可得:

$$(f+g)(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))=f(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))+g(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\leqslant$$
$$\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})+\lambda g(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)g(\boldsymbol{y})=\lambda(f+g)(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)(f+g)(\boldsymbol{y}),$$

故 $f+g$ 是 K 上关于同一 η 和 α 的 α-半预不变凸函数。

2) 因为 $f:K\to\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α-半预不变凸函数,则对 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\lambda\in[0,1]$,有:

$$f(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y}),$$

从而有:

$$(f+m)(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))=f(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))+m\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})+m=$$
$$\lambda(f(\boldsymbol{x})+m)+(1-\lambda)(f(\boldsymbol{y})+m)=\lambda(f+m)(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)(f+m)(\boldsymbol{y}),$$

故 $f+m$ 是 K 上关于同一 η 和 α 的 α-半预不变凸函数。

3) 因为 $f:K\to\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α-半预不变凸函数,则对 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\lambda\in[0,1]$,有:

$$f(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y}),$$

从而有:

$$(kf)(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\leqslant k(\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y}))=\lambda(kf)(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)(kf)(\boldsymbol{y}),$$

故 kf 是 K 上关于同一 η 和 α 的 α-半预不变凸函数。　　证毕

定理 2　设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α-半不变凸集,如果 $f:K\to\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α-半预不变凸函数,则水平集 $S_k=\{\boldsymbol{x}\in K:f(\boldsymbol{x})\leqslant k\}$ 是一个关于 η 和 α 的 α-半不变凸集,其中 $k\in\mathbf{R}$。

证明　$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S_k$,则有 $f(\boldsymbol{x})\leqslant k$ 和 $f(\boldsymbol{y})\leqslant k$ 成立。由 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α-半不变凸集,有:

$$\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in K,\ \forall\,\lambda\in[0,1],$$

由于 $f:K\to\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α-半预不变凸函数,则对 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\lambda\in[0,1]$,有:

$$f(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})\leqslant\lambda k+(1-\lambda)k=k,$$

所以 $\boldsymbol{y}+\lambda k\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in S_k$,即 S_k 是一个关于 η 和 α 的 α-半不变凸集。　　证毕

定理 3　设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α-半不变凸集,如果 $f:K\to\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α-半预不变凸函数,$g:I\to\mathbf{R}$ 为单增凸函数,其中 $\operatorname{ran} gf\subseteq I$,那么复合函数 $g\circ f$ 是 K 上关于同一 η 和 α 的 α-半预不变凸型函数。

证明　因为 $f:K\to\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α-半预不变凸型函数,则对 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\lambda\in[0,1]$,有:

$$f(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})。$$

又由于 $g:I\to\mathbf{R}$ 为单增凸函数,则有:

$$g[f(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))]\leqslant g[\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})]\leqslant\lambda g[f(\boldsymbol{x})]+(1-\lambda)g[f(\boldsymbol{y})],$$

即 $g\circ f(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\leqslant\lambda g\circ f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)g\circ f(\boldsymbol{y})$。

故复合函数 $g\circ f$ 是 K 上关于同一 η 和 α 的 α-半预不变凸函数。 证毕

定理4 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α-半不变凸集,令 I 为有限或无限指标集,$f_i:K\to\mathbf{R}(i\in I)$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α-半预不变凸函数簇,记 $f(\boldsymbol{x})=\sup\{f_i(\boldsymbol{x}),i\in I\}$,$\forall\boldsymbol{x}\in K$。如果对 $\forall\boldsymbol{x}\in K$ 都存在一个 $i_j=i(\boldsymbol{x})\in I$,使得 $f(\boldsymbol{x})=f_{i_j}(\boldsymbol{x})$,那么 f 一定是 K 上关于同一 η 和 α 的 α-半预不变凸函数。

证明 假设 f 不是 K 上关于同一 η 和 α 的 α-半预不变凸函数,则存在 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$\lambda\in[0,1]$,有:

$$f(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))>\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})。\tag{1}$$

令 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)$,根据假设条件可知:$\exists\, i_0:=i(\boldsymbol{z})$,$\exists\, i_1:=i(\boldsymbol{x})$,$\exists\, i_2:=i(\boldsymbol{y})$,使得 $f(\boldsymbol{z})=f_{i_0}(\boldsymbol{z})$,$f(\boldsymbol{x})=f_{i_1}(\boldsymbol{x})$,$f(\boldsymbol{y})=f_{i_2}(\boldsymbol{y})$,因为 $f_i:K\to\mathbf{R}(i\in I)$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α-半预不变凸函数簇,所以 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$\lambda\in[0,1]$,有 $f_{i_0}(\boldsymbol{z})=f_{i_0}(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\leqslant\lambda f_{i_0}(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f_{i_0}(\boldsymbol{y})$。

又因为 $f_{i_0}(\boldsymbol{x})\leqslant f_{i_1}(\boldsymbol{x})$,$f_{i_0}(\boldsymbol{y})\leqslant f_{i_2}(\boldsymbol{y})$,所以 $f_{i_0}(\boldsymbol{z})\leqslant\lambda f_{i_1}(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f_{i_2}(\boldsymbol{y})$,即:

$$f(\boldsymbol{z})=f(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})。$$

上式与(1)式矛盾,故结论得证。 证毕

定理5 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α-半不变凸集,如果 $f:K\to\mathbf{R}$ 是关于 η 和 α 的可微 α-半预不变凸函数,则 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$\forall\lambda\in(0,1]$,有 $\langle\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\nabla f(\boldsymbol{y}),\hat{\eta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle\leqslant f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})$,其中 $\hat{\eta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)$。

证明 由 $f:K\to\mathbf{R}$ 是关于 η 和 α 的可微 α-半预不变凸函数知,$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$\forall\lambda\in(0,1]$,满足 $\lim\limits_{\lambda\to0}\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)=0$,且 $f(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})$,从而有:

$$\frac{f(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))-f(\boldsymbol{y})}{\lambda}\leqslant f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y}),$$

在上式两端令 $\lambda\to0^+$,得 $\langle\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\nabla f(\boldsymbol{y}),\hat{\eta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle\leqslant f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})$,其中 $\hat{\eta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)$。 证毕

定理6 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α-半不变凸集,$f:K\to\mathbf{R}$ 和 $g:K\to\mathbf{R}$ 是两个实值函数。如果 $f(\boldsymbol{x})\geqslant0$,$g(\boldsymbol{x})>0$,且 f 和 $-g$ 关于同一 η 和 α 的 α-半预不变凸函数,则 $\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}$ 是关于 α 和 $\bar{\eta}$ 的 α-半预不变凸函数,其中:

$$\bar{\eta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)=\frac{g(\boldsymbol{y})}{\lambda g(\boldsymbol{y})+(1-\lambda)g(\boldsymbol{x})}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)。$$

证明 由 f 和 $-g$ 关于同一 η 和 α 的 α-半预不变凸函数,且 $f(\boldsymbol{x})\geqslant0$,$g(\boldsymbol{x})>0$,则 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$\lambda\in[0,1]$,有:

$$\frac{f}{g}(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\bar{\eta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))=\frac{f(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\bar{\eta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))}{g(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\bar{\eta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))}=\frac{f\left[\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\dfrac{g(\boldsymbol{y})}{\lambda g(\boldsymbol{y})+(1-\lambda)g(\boldsymbol{x})}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\right]}{g\left[\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\dfrac{g(\boldsymbol{y})}{\lambda g(\boldsymbol{y})+(1-\lambda)g(\boldsymbol{x})}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\right]}\leqslant$$

$$\frac{\dfrac{\lambda g(\boldsymbol{y})}{\lambda g(\boldsymbol{y})+(1-\lambda)g(\boldsymbol{x})}f(\boldsymbol{x})+\left[1-\dfrac{\lambda g(\boldsymbol{y})}{\lambda g(\boldsymbol{y})+(1-\lambda)g(\boldsymbol{x})}\right]f(\boldsymbol{y})}{\dfrac{\lambda g(\boldsymbol{y})}{\lambda g(\boldsymbol{y})+(1-\lambda)g(\boldsymbol{x})}g(\boldsymbol{x})+\left[1-\dfrac{\lambda g(\boldsymbol{y})}{\lambda g(\boldsymbol{y})+(1-\lambda)g(\boldsymbol{x})}\right]g(\boldsymbol{y})}=$$

$$\frac{\lambda f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{y})+(1-\lambda)g(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{y})}{\lambda g(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{y})+(1-\lambda)g(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{y})}=\lambda\frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}+(1-\lambda)\frac{f(\boldsymbol{y})}{g(\boldsymbol{y})}=\lambda\frac{f}{g}(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)\frac{f}{g}(\boldsymbol{y}),$$

从而 $\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}$ 是关于 α 和 $\bar{\eta}$ 的 α-半预不变凸函数,其中 $\bar{\eta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)=\dfrac{g(\boldsymbol{y})}{\lambda g(\boldsymbol{y})+(1-\lambda)g(\boldsymbol{x})}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)$。 证毕

3 α-半预不变凸函数与最优化

本节将分别给出在无约束与带不等式约束下,α-半预不变凸型规划问题的几个最优性结果,并举例来验证所

得结果的正确性。

先考虑如下形式的无约束非线性规划问题(P_1)：

$$\min f(\boldsymbol{x}),$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{x}\in K,$$

其中 K 是 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集，$f:K\to\mathbf{R}$。

定理 7　设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α-半不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α-半预不变凸函数，则问题(P_1)的每一个局部最优解一定是它的全局最优解。如果对 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，有 $f(\boldsymbol{y}+\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},1))=f(\boldsymbol{x})$，则问题($P_1$)的最优解集是关于同一 η 和 α 的 α-半不变凸集。

证明　1) 假设 $\boldsymbol{x}_0\in K$ 是问题(P_1)的一个局部最优解，但不是全局最优解，则 $\exists\boldsymbol{x}^*\in K$，使得：

$$f(\boldsymbol{x}^*)<f(\boldsymbol{x}_0)。\tag{2}$$

由 $f:K\to\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α-半预不变凸函数及(2)式知，对 $\forall\lambda\in[0,1]$，有：

$$f(\boldsymbol{x}_0+\lambda\alpha(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}_0)\eta(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}_0,\lambda))\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x}^*)+(1-\lambda)f(\boldsymbol{x}_0)<\lambda f(\boldsymbol{x}_0)+(1-\lambda)f(\boldsymbol{x}_0)=f(\boldsymbol{x}_0),$$

于是，对 $\forall\lambda\in[0,1]$，有：

$$f(\boldsymbol{x}_0+\lambda\alpha(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}_0)\eta(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}_0,\lambda))<f(\boldsymbol{x}_0),\tag{3}$$

而 K 是 α-半不变凸集，所以 $\boldsymbol{x}_0+\lambda\alpha(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}_0)\eta(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}_0,\lambda)\in K$。

当 $\lambda>0$ 且充分小时，(3)式与 $\boldsymbol{x}_0\in K$ 是问题(P_1)的一个局部最优解矛盾。故 $\boldsymbol{x}_0\in K$ 是问题(P_1)的全局最优解，即问题(P_1)的每一个局部最优解一定是它的全局最优解。

2) 设 A 是问题(P_1)的最优解集，则 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$，有 $f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{y})$。

当 $\lambda=0,1$ 时，显然有 $\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in A$ 成立。因此，要证 A 是关于同一 η 和 α 的 α-半不变凸集，只需证明 $\forall\lambda\in(0,1)$，$\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in A$ 成立即可。

因为 K 是 α-半不变凸集，所以 $\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in A$。

假设 $\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\notin A$，则：

$$f(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))>f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{y})。\tag{4}$$

由 $f:K\to\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α-半预不变凸函数及 $f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{y})$，有：

$$f(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{y}),$$

上式与(4)式矛盾，故 $\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in A$。

因此问题(P_1)的最优解集 A 是关于同一 η 和 α 的 α-半不变凸集。　　证毕

下面的例 4 验证了定理 7 所得结果的正确性。

例 4　设 $K=[-1,0]$，$\alpha(x,y)=\cos x$，$\eta(x,y,\lambda)=\dfrac{\lambda x-y}{\cos x}$，$f(x)=1-x$，容易验证 K 是关于 η 和 α 的 α-半不变凸集，函数 f 是关于 η 和 α 的 α-半预不变凸函数。取 $x=0$，显然 $x=0$ 是问题(P_1)的局部最优解，也是(P_1)的全局最优解。容易验证最优解集 $A=\{0\}$是关于 η 和 α 的 α-半不变凸集。

考虑如下带不等式约束的非线性规划问题(P_2)：

$$\min f(\boldsymbol{x})$$
$$\text{s.t. } g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0,i\in J=\{1,\cdots,m\},\boldsymbol{x}\in K,$$

其中 K 是 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集，$f,g_i:K\to\mathbf{R},i\in J$。可行集 $D=\{\boldsymbol{x}\in K\,|\,g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0,i\in J\}$。

定理 8　设 K 是关于 η 和 α 的 α-半不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 和 $g_i:K\to\mathbf{R}(i\in J)$在 K 上关于同一 η 和 α 的 α-半预不变凸型函数，且对 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，有 $g_i(\boldsymbol{y}+\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},1))\leqslant g_i(\boldsymbol{x})(i\in J)$，$f(\boldsymbol{y}+\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},1))=f(\boldsymbol{x})$，则问题($P_2$)的可行解集 D 和最优解集 A 均是关于同一 η 和 α 的 α-半不变凸集。

证明　1) $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D,\forall\lambda\in[0,1]$，有 $\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in K$，且 $g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0,g_i(\boldsymbol{y})\leqslant 0,i\in J$。

又 $g_i:K\to\mathbf{R}(i\in J)$是 K 上关于 η 和 α 的 α-半预不变凸函数，则 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D,\lambda\in(0,1)$，有：

$$g_i(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\leqslant\lambda g_i(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)g_i(\boldsymbol{y})\leqslant 0,i\in J。$$

故 $\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in D$。

又当 $\lambda=0,1$ 时,$\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in D$ 成立。所以 D 是关于同一 η 和 α 的 α-半不变凸集。

2) $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$,有 $f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{y})$。由1)的证明过程可知 $\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in D$,假设 $\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\notin A$,则:

$$f(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))>f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{y})。\tag{5}$$

由 $f:K\to\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α-半预不变凸函数及 $f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{y})$,有:

$$f(\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda))\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{y})。$$

上式与(5)式矛盾,故 $\boldsymbol{y}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in A$。

因此问题(P_1)的最优解集 A 是关于同一 η 和 α 的 α-半不变凸集。 证毕

定理 9 设 K 是关于 η 和 α 的 α-半不变凸集,$f:K\to\mathbf{R}$ 和 $g_i:K\to\mathbf{R}(i\in J)$ 在 K 上关于同一 η 和 α 的 α-半预不变凸函数,如果 $\bar{\boldsymbol{x}}\in D$ 是问题(P_2)的局部最优解,那么 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 一定是(P_2)的全局最优解。

证明 反设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是问题(P_2)的全局最优解,则存在点 $\boldsymbol{x}^*\in D$,使得 $f(\boldsymbol{x}^*)<f(\bar{\boldsymbol{x}})$。

由定理8知,$\forall\,\lambda\in(0,1)$,有 $\bar{\boldsymbol{x}}+\lambda\alpha(\boldsymbol{x}^*,\bar{\boldsymbol{x}})\eta(\boldsymbol{x}^*,\bar{\boldsymbol{x}},\lambda)\in D$。

类似定理7的证明过程可知,$\forall\,\lambda\in(0,1)$,有 $f(\bar{\boldsymbol{x}}+\lambda\eta(\boldsymbol{x}^*,\bar{\boldsymbol{x}},\lambda))<f(\bar{\boldsymbol{x}})$,当 $\lambda>0$ 且充分小时,上式与 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(P_2)的局部最优解矛盾。故 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(P_2)的全局最优解。 证毕

下面举例验证定理8和定理9。

例 5 考虑如下带不等式约束的非线性规划问题(P_2):

$$\begin{aligned}&\min\ f(x)=\sin|x|,\\&\text{s.t.}\ \ g_1(x)=|x|-1\leqslant0,\\&\qquad\ g_2(x)=2x^2-1\leqslant0,x\in K,\end{aligned}$$

其中 $K=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,$\alpha(x,y)=\mathrm{e}^x$,$\eta(x,y,\lambda)=\dfrac{\lambda x-y}{\mathrm{e}^x}$。

由定义6,容易验证 f,g_1,g_2 均为 K 上关于同一 η 和 α 的 α-半预不变凸函数,即定理8和定理9的所有假设均满足。

通过计算,可行解集 $D=\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$,最优解集 $A=\{0\}$,显然 D 和 A 均是关于同一 η 和 α 的 α-半不变凸集,而且可验证 $x=0$ 是问题(P_2)的局部最优解,也是全局最优解。故定理8和定理9结论成立。

4 总结

本文研究了一类新的广义凸型函数 α-半预不变凸型函数,说明了此类函数的存在性及其与相关广义凸型函数间的关系,得到了此类函数的良好性质;并给出了 α-半预不变凸函数在两类非线性规划问题中的应用。对于 α-半预不变凸型函数的研究是很有意义的,能否得到此类函数在分式规划、多目标规划问题最优性及其对偶中的应用,这将是后续有趣的研究课题。

参考文献:

[1] WEIR T,MOND B. Preinvex functions in multiple objective optimization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1988,136(1):29-38.

[2] WEIR T,JEYAKUMAR V. A class of nonconvex functions and mathematical programming[J].Bulletin of the Australian Mathematical Society,1988,38(2):177-189.

[3] YANG X M,LI D. Semistrictly preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2001,258(1):287-308.

[4] YANG X M,YANG X Q,TEO K L. On properties of semipreinvex functions[J].Bulletin of the Australian Mathematical Society,2003,68(3):449-459.

[5] NOOR M A,NOOR K I. Some characterizations of strongly preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications,2006,316(2):697-706.

[6] YANG X Q,CHEN G Y. A class of nonconvex functions

and pre-variational inequalities[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 1992, 169(2): 359-373.

[7] PENG Z Y, CHANG S S. Some properties of semi-*G*-preinvex functions[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2013, 17(3): 873-884.

[8] 李科科，彭再云，万轩，等. 严格 *G*-半预不变凸性及其应用研究[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2015，32(6)：1-8.

LI K K, PENG Z Y, WAN X, et al. The study of strict G-semi-preinvexity and its application[J]. Journal of Normal University (Natural Science), 2015, 32(6): 1-8.

[9] 李科科，彭再云，刘亚威，等. 半预拟不变凸性的性质与应用注记[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2017，34(1)：12-22.

LI K K, PENG Z Y, LIU Y W, et al. Notes on characterizations and applications of semi-prequasi-invexity[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2017, 34(1): 12-22.

Operations Research and Cybernetics

The Study of α-Semi-preinvexity and Its Applications

LI Ting[1], PENG Zaiyun[2], SHAO Chongyang[2], WANG Jingjing[2]

(1. College of Business, Shanxi University, Taiyuan 030031;

2. College of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: [**Purposes**]A class of new generalized convex function: α-semi-preinvexity functions is mainly studied here. [**Methods**]Theoretical analysis, and examples for validation. [**Findings**]Firstly, an example is given to show the existence of α-semi-preinvexity functions and the relationship with preinvexity functions. Secondly, some properties of the α-semi-preinvexity functions are discussed. Finally, some optimality results are obtained in nonlinear programming problems without constraint and with inequality constraint, and examples are given for illustration of the corresponding results. [**Conclusions**]The obtained results enrich the study of generalized convex functions.

Keywords: α-semi-invex set; α-semi-preinvexity functions; nonlinear programming; the feasible set; the optimal solution set

(责任编辑　黄　颖)